ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 505, с. 37–41

МАТЕМАТИКА

УДК 517.954, 517.982

О МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ *p*-ЛАПЛАСА

© 2022 г. Ю. А. Алхутов[1,*], А. Г. Чечкина[2,3,]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 16.05.2022 г.
После доработки 10.06.2022 г.
Принято к публикации 15.06.2022 г.

Доказана повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы в ограниченной строго липшицевой области для неоднородного уравнения p-Лапласа.

Ключевые слова: задача Зарембы, оценки Мейерса, p-емкость, теоремы вложения, повышенная суммируемость

DOI: 10.31857/S2686954322040026

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследуются интегральные свойства обобщенных решений неоднородного уравнения p-Лапласа, где $p > 1$, решений задачи Зарембы в ограниченной строго липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n > 1$. Для постановки задачи Зарембы введем соболевское пространство функций $W_p^1(D,F)$. Здесь $F \subset \partial D$ – замкнутое множество, $W_p^1(D,F)$ – пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F, по норме пространства $W_p^1(D)$. Априори для функций $v \in W_p^1(D,F)$ предполагается выполненным неравенство Фридрихса

$$\int_D |v|^p\,dx \le C\int_D |\nabla v|^p\,dx, \tag{1.1}$$

о котором будет сказано ниже. Полагая $G = \partial D\backslash F$, рассмотрим задачу Зарембы

$$\begin{gathered} \Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = l \quad \text{в} \quad D, \\ u = 0 \quad \text{на} \quad F, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad G, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ означает внешнюю нормальную производную функции u, а l является линейным функционалом в пространстве, сопряженном к $W_p^1(D,F)$.

Под решением задачи (1.2) понимается функция $u \in W_p^1(D,F)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_D |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx = -l(\varphi) \tag{1.3}$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_p^1(D,F)$.

В силу неравенства Фридрихса (1.1) пространство $W_p^1(D,F)$ можно снабдить нормой, в которой присутствует только градиент. Поэтому, пользуясь теоремой Хана-Банаха, можно показать, что функционал l записывается в виде

$$l(\varphi) = -\sum_{i=1}^n \int_D f_i \varphi_{x_i}\,dx, \tag{1.4}$$

где $f_i \in L_{p'}(D)$, $i = 1, \ldots, n$, $p' = p/(p-1)$. В силу (1.3) для каждого конкретного функционала решение задачи (1.2) понимается в смысле интегрального соотношения

$$\int_D |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx = \int_D f \cdot \nabla\varphi dx \tag{1.5}$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_p^1(D,F)$, в котором компоненты вектор-функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ являются функциями из $L_{p'}(D)$.

Методом теории монотонных операторов устанавливается, что задача (1.2) однозначно раз-

[1] *Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия*
[2] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[3] *Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия*
**E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru*
***E-mail: chechkina@gmail.com*

решима в соболевском пространстве функций $W_p^1(D, F)$ (см., например, теорему 2.1 из второго раздела главы 2 монографии [1]).

Целью работы является вопрос о повышенной суммируемости градиента решений задачи (1.2) в предположении, что $f \in L_{p'+\delta}(D)$, где $\delta > 0$.

Повышенная суммируемость градиента решений линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами на плоскости вытекает из результатов работы [2]. Позже в многомерном случае для уравнений такого же вида повышенная суммируемость градиента решения задачи Дирихле в области с достаточно регулярной границей была установлена в [3]. Оценки типа Боярского-Мейерса решений задачи Зарембы в ограниченной липшицевой области для линейных эллиптических уравнений второго порядка известны из работ [4] и [5].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Главную роль играет условие на структуру множества носителя данных Дирихле F. Для формулировки результата нам потребуется понятие емкости. Определим для компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ емкость $C_q(K)$, которая при $1 < q < n$ определяется равенством

$$C_q(K) = \inf\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^q dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Величина показателя q связана со значением показателя p из (1.2), размерностью пространства n и определяется следующим образом: если $p \in (1, n/(n-1)]$, то $q = (p+1)/2$, а если $p \in (n/(n-1), n]$, где $n > 2$, то $q = np/(n+p)$.

Ниже $B_r^{x_0}$ означает открытый шар радиуса r с центром в точке x_0. Сформулируем ограничение на множество F.

A. Если $1 < p \leq n$, то предполагается выполнение следующего условия: для произвольной точки $x_0 \in F$ при $r \leq r_0$ справедливо неравенство

$$C_q(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \geq c_0 r^{n-q}, \tag{2.6}$$

в котором положительная постоянная c_0 не зависит от x_0 и r.

B. Если $p > n$, то предполагается, что множество F не пусто: $F \neq \varnothing$.

В каждом из предполагаемых случаев выполнено неравенство Фридрихса (1.1). При выполнении условия (2.6) оно вытекает из неравенства Мазьи [6] (теорема из § 10.1.2). Если же $p > n$, то нужно воспользоваться определением внутреннего (кубического) диаметра открытого множества (см. [2], конец § 10.2) и воспользоваться теоремой 1 из § 10.2.3 монографии [6].

Пусть $mes_{n-1}(E)$ означает $(n-1)$- мерную меру Лебега множества $E \subset \partial D$. Заметим, что из условия $mes_{n-1}(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \geq c_0 r^{n-1}$, аналогичного (2.6), вытекает и само условие (2.6). Это следует из оценки предложения 4 [6, § 9.1].

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для пояснения схемы доказательства основного утверждения нам потребуется более детально определить, как определяется понятие липшицевой области D. Будем называть область D липшицевой, если для каждой точки $x_0 \in \partial D$ существует открытый куб Q с центром в x_0, грани которого параллельны координатным осям, длина ребра не зависит от x_0 и в некоторой декартовой системе координат с началом в x_0 множество $Q \cap \partial D$ есть график липшицевой функции $x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ с постоянной Липшица, не зависящей от x_0. Длину ребра таких кубов будем считать равной $2R_0$, а постоянную Липшица соответствующих функций g обозначим через L. При этом для определенности предполагаем, что множество $Q \cap D$ расположено выше графика функции g.

Справедливо следующее утверждение, в котором постоянная r_0 из условия (2.6) не превосходит константы R_0.

Теорема 1. *Если $f \in L_{p'+\delta_0}(D)$, где $\delta_0 > 0$, то существует положительная постоянная $\delta(n, p, \delta_0) < \delta_0$ такая, что для решения задачи* (1.2) *справедлива оценка*

$$\int_D |\nabla u|^{p+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{p'(1+\delta/p)} dx, \tag{3.7}$$

в которой константа C при $1 < p \leq n$ зависит только от p, δ_0, n, *величины c_0 из* (2.6) *и области D. При $p > n$ зависимость C от c_0 отсутствует.*

Замечание 1. *Сформулированное утверждение справедливо не только для оператора p-Лапласа, но и более общего оператора вида*

$$Lu = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} A \nabla u)$$

с измеримой симметрической и равномерно положительно определенной матрицей A такой, что оператор L является монотонным. Условие на матрицу A, обеспечивающее монотонность оператора L, можно найти в работе [7]. *Условие монотонности требуется только для однозначной разрешимости задачи Зарембы. Все остальные рассуждения опираются только на положительную определенность матрицы A.*

Сначала оценка повышенной суммируемости градиента решения задачи (1.2) устанавливается в окрестности границы области D. Здесь используется техника локального распрямления границы ∂D. Полагая $Q_{R_0} = \{x : |x_i| < R_0, i = 1,\ldots,n\}$, для произвольной граничной точки $x_0 \in \partial D$ рассмотрим локальную декартову систему координат с началом в x_0 такую, что часть границы ∂D, попадающая в куб Q_{R_0}, задается в этой системе координат уравнением $x_n = g(x')$, где $x' = (x_1,\ldots,x_{n-1})$, а g — липшицевая функция с показателем Липшица L. Предполагается, что область $D_{R_0} = Q_{R_0} \cap D$ расположена на множестве тех точек, где $x_n > g(x')$. Перейдем в Q_{R_0} к новой системе координат, совершив невырожденное преобразование переменных

$$y' = x', \quad y_n = x_n - g(x'). \tag{3.8}$$

Ясно, что часть границы $Q_{R_0} \cap \partial D$ преобразуется в кусок гиперплоскости

$$P_{R_0} = \{y : |y_i| < R_0, i = 1,\ldots,n-1, y_n = 0\}$$

и нетрудно показать, что образ области Q_{R_0} содержит куб

$$K_{R_0} = \{y : |y_i| < (1 + \sqrt{n-1}L)^{-1} R_0, i = 1,\ldots,n\}. \tag{3.9}$$

В полукубе $K_{R_0}^+ = K_{R_0} \cap \{y : y_n > 0\}$, содержащимся в образе области $D \cap Q_{R_0}$, задача (1.2), за решением которой сохраним исходное обозначение, примет вид

$$\begin{gathered} L_1 u := \operatorname{div}(|\nabla_y u + u_{y_n} \nabla_y g|^{p-2} a(y) \nabla_y u) = \tilde{l} \ \text{ в } \ K_{R_0}^+, \\ u = 0 \quad \text{на} \quad \tilde{F}_{R_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tilde{\nu}} = 0 \quad \text{на} \quad \tilde{G}_{R_0}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Здесь симметричная матрица $a(y) = \{a_{ij}(y)\}$ равномерно положительно определена, а вектор-функция f, участвующая в записи функционала (1.4), преобразуется в вектор функцию $\tilde{f}$, компоненты которой определяются равенствами

$$\begin{gathered} \tilde{f}(y) = (\tilde{f}_1(y),\ldots,\tilde{f}_n(y)), \\ \text{где} \quad \tilde{f}_i(y) = f_i(y', y_n + g(y')) \\ \text{при} \quad i = 1,\ldots,n-1, \\ \tilde{f}_n(y) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g(y')}{\partial y_i} f_i(y', y_n + g(y')) + \\ + f_n(y', y_n + g(y')). \end{gathered} \tag{3.11}$$

Множества $\tilde{F}_{R_0}$ и $\tilde{G}_{R_0}$ таковы, что $\tilde{F}_{R_0} = \tilde{F} \cap P_{R_0} \cap K_{R_0}$ и $\tilde{G}_{R_0} = \tilde{G} \cap P_{R_0} \cap K_{R_0}$, где $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ — образы множеств $F \cap Q_{R_0}$ и $G \cap Q_{R_0}$ соответственно, а $\dfrac{\partial u}{\partial \tilde{\nu}}$ означает внешнюю конормальную производную функции u, порожденную матрицей a.

Продолжим функцию u, удовлетворяющую (3.10), четно относительно гиперплоскости $\{y : y_n = 0\}$. Продолженная функция, за которой вновь сохраним предыдущее обозначение, удовлетворяет соотношению

$$\begin{gathered} L_2 u = \operatorname{div}(|\tilde{\nabla} u|^{p-2} b(y) \nabla u) = l_h \\ \text{и} \quad K_{R_0} \backslash \tilde{F}_{R_0}, \quad u = 0 \text{ на } \tilde{F}_{R_0}. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Здесь $\tilde{\nabla} u$ сопадает с $\nabla u + u_{y_n} \nabla g$ при $y_n > 0$, а при $y_n < 0$ совпадает с таким же выражением с учетом того, что частная производная u_{y_n} продолжается нечетно. Положительно определенная матрица $b(y) = \{b_{ij}(y)\}$ такова, что $b_{jn}(y) = b_{nj}(y)$ при $j \neq n$ являются нечетными продолжениями $a_{jn}(y)$ из (3.10), а все остальные элементы $b_{ij}(y)$ — четным продолжением $a_{ij}(y)$. Компоненты вектор–функции $h = (h_1,\ldots,h_n)$ в (3.12), участвующей в представлении функционала l_h, определятся равенствами: ее компоненты $h_i(y)$ при $i = 1,\ldots,n-1$ — четные продолжения компонент $\tilde{f}_i(y)$ из (3.10), а $h_n(y)$ — нечетное продолжение $\tilde{f}_n(y)$. Отметим, что $C_1(L)|\nabla u| \le |\tilde{\nabla} u| \le C_2(L)|\nabla u|$.

Решением (3.12) является функция $u \in W_p^1(K_{R_0})$, для которой выполнено интегральное тождество (см. (1.5))

$$\int_{K_{R_0}} |\tilde{\nabla} u|^{p-2} b \nabla u \cdot \nabla \varphi dy = \int_{K_{R_0}} h \cdot \nabla \varphi dy \tag{3.13}$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_2^1(K_{R_0}, F_{R_0})$, которые являются замыканием множества бесконечно дифференцируемых в замыкании K_{R_0} функций, равных нулю в окрестности ∂K_{R_0} и F_{R_0} по норме пространства $W_p^1(K_{R_0})$.

Обозначим через $Q_R^{y_0}$ открытый куб с центром в точке y_0 с ребрами длиной $2R$, параллельными координатным осям. Ниже предполагается, что

$$y_0 \in K_{R_0/2} \backslash \partial K_{R_0/2}, \quad \text{где} \quad R \le \frac{1}{2} \operatorname{dist}(y_0, \partial K_{R_0/2}),$$

и полагается

$$⨍_{Q_R^{y_0}} f\,dx = \frac{1}{|Q_R^{y_0}|} \int_{Q_R^{y_0}} f\,dx,$$

где $|Q_R^{y_0}|$ означает n-мерную меру куба $Q_R^{y_0}$.

Пользуясь условиями на множество F, после соответствующего выбора пробной функции в (3.13) с помощью неравенства Мазьи [6] (теорема из § 10.1.2) при выполнении условия (2.6), неравенством теоремы 1 из § 10.2.3 монографии [6] при $p > n$, а также неравенства Пуанкаре-Соболева устанавливается, что

$$\left(\fint_{Q_R^{x_0}} |\nabla u|^p\, dx \right)^{1/p} \leq \leq C\left(\left(\fint_{Q_{2R}^{x_0}} |\nabla u|^q\, dx \right)^{1/q} + \left(\fint_{Q_{2R}^{x_0}} |h|^{p'}\, dx \right)^{1/p} \right). \tag{3.14}$$

Здесь постоянная q при $1 < p \leq n$ определяется как и в § 2, а при $p > n$ равна $(p+n)/2$. Постоянная C при $1 < p \leq n$ зависит только от n, p, L и константы c_0 из условия (2.6) а при $p > n$ зависимости от c_0 нет.

Из этой оценки, справедливой для всех рассматриваемых кубов $Q_R^{y_0}$ и обобщеной леммы Геринга (см. [8], а также [9], гл. VII) с учетом длины ребра куба K_{R_0} (см. (3.9)) в предположении, что $h \in L_{2+\delta_0}(K_{R_0})$, где $\delta_0 > 0$, имеем

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(K_{R_0/4})} \leq C\left(\|\nabla u\|_{L_p(K_{R_0/2})} + \left\| |h|^{p'/p} \right\|_{L_{p+\delta}(K_{R_0/2})} \right)$$

с положительной постоянной $\delta = \delta(n, p, \delta_0)$ и дополнительной зависимостью C от R_0. В силу четности функции u относительно гиперплоскости $\{y : y_n = 0\}$ ее можно переписать в виде (см. (3.10))

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(K_{R_0/4})} \leq \leq C\left(\|\nabla u\|_{L_p(K_{R_0/2})} + \left\| |\tilde{f}|^{p'/p} \right\|_{L_{p+\delta}(K_{R_0/2})} \right) \tag{3.15}$$

Совершая здесь преобразование, обратное к (3.8), заметим что прообраз полукуба $K^+_{R_0/2}$ содержится в множестве D_{R_0}, а прообраз полукуба $K^+_{R_0/4}$ содержит множество $D_{\theta R_0}$, где $\theta = \theta(n, L) > 0$. Учитывая еще соотношение (3.11), в силу (3.15) будем иметь

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(D_{\theta R_0})} \leq C\left(\|\nabla u\|_{L_p(D_{R_0})} + \left\| |f|^{p'/p} \right\|_{L_{p+\delta}(D_{R_0})} \right)$$

Переходя здесь к декартовой системе координат с началом в точке $x_0 \in \partial D$, из которой исходили с самого начала рассуждений, получим

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(D \cap Q^{x_0}_{\theta R_0})} \leq \leq C\left(\|\nabla u\|_{L_p(D \cap Q^{x_0}_{R_0})} + \left\| |f|^{p'/p} \right\|_{L_{p+\delta}(D \cap Q^{x_0}_{R_0})} \right)$$

Поскольку $x_0 \in \partial D$ произвольная граничная точка, а граница ∂D компактна, то можно найти такое конечное покрытие ∂D, что замкнутое множество

$$\mathcal{D}_{\theta_1 R_0} = \{x \in D : dist(x, \partial D) \leq \theta_1 R_0\}, \quad \theta_1 = \theta_1(n, L) > 0$$

содержится в объединении множеств $D \cap Q^{x_i}_{\theta R_0}$, где $x_i \in \partial D$. Поэтому, суммируя неравенства

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(D \cap Q^{x_i}_{\theta R_0})} \leq C\left(\|\nabla u\|_{L_p(D \cap Q^{x_i}_{R_0})} + \left\| |f|^{p'/p} \right\|_{L_{p+\delta}(D \cap Q^{x_i}_{R_0})} \right),$$

придем к оценке

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(\mathcal{D}_{\theta_1 R_0})} \leq C\left(\|\nabla u\|_{L_p(D)} + \left\| |f|^{p'/p} \right\|_{L_{p+\delta}(D)} \right).$$

Внутренняя оценка

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(D \setminus \mathcal{D}_{\theta_1 R_0})} \leq C\left(\|\nabla u\|_{L_p(D)} + \left\| |f|^{p'/p} \right\|_{L_{p+\delta}(D)} \right)$$

не учитывает граничных условий и доказывается намного проще. В итоге, сочетая две последние оценки и пользуясь энергетическим неравенством для первого слагаемого в правых частях этих оценок, приходим к (3.7).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РНФ (проект 22-21-00292).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных задач. Москва: Издательство Мир, 1972.
2. *Боярский Б.В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. 1957. Т. 43(85). № 4. С. 451–503.
3. *Meyers N.G.* An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic deivergence equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e série. 1963. V. 17. № 3. P. 189–206.
4. *Алхутов Ю.А., Чечкин Г.А.* Повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы для уравнения Пуассона // Доклады РАН. 2021. Т. 497. № 2. С. 3–6.
5. *Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A.* The Meyer's Estimate of Solutions to Zaremba Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form // C R Mécanique. 2021. V. 349. № 2. P. 299–304.
6. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1985.
7. *Лаптев Г.И.* Условия монотонности для одного класса квазилинейных дифференциальных операторов, зависящих от параметров // Матем. заметки. 2014. Т. 96. № 3. С. 405–417.
8. *Gehring F.W.* The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. 1973. V. 130. P. 265–277.
9. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.

ON MANY DIMENSIONAL ZAREMBA PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS *p*-LAPLACE EQUATION

Yu. A. Alkhutov[a] **and A. G. Chechkina**[b,c]

[a] *A.G. and N.G. Stoletov Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation*

[b] *M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[c] *Institute of Mathematics with Computing Center — Subdivision of the Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Science, Ufa, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

A higher integrability of the gradient of a solution to the Zaremba problem in a bounded Lipschitz many dimnsional domain is proved for the inhomogeneous p-Laplace equation.

Keywords: Zaremba problem, Meyers estimates, p-capacity, imbedding theorems, higher integrability