ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 505, с. 5–10

МАТЕМАТИКА

УДК 510.64, 510.65

СПЕКТРЫ КОНСЕРВАТИВНОСТИ И МОДЕЛЬ ЙООСТЕНА–ФЕРНАНДЕСА

 Академик РАН Л. Д. Беклемишев[1,*]

Поступило 24.03.2022 г.
После доработки 05.06.2022 г.
Принято к публикации 07.06.2022 г.

Рассматривается обобщение понятия спектра консервативности арифметической теории на язык с трансфинитно итерированными определениями истинности. Установлено естественное соответствие между спектрами консервативности и точками специальной модели Крипке, введенной Д. Фернандесом–Дуке и Й. Йоостеном. Для итерированных схем рефлексии над теориями определений истинности установлены результаты о консервативности, аналогичные хорошо известным формулам Шмерля.

Ключевые слова: схема рефлексии, предикат истинности, консервативность

DOI: 10.31857/S2686954322040038

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья продолжает работу [1], в которой методы логики доказуемости и алгебр рефлексии применены к исследованию теорий предикативной силы. В частности, понятие *спектра консервативности* арифметической теории обобщается на языки, в которых определимы множества гиперарифметической иерархии и соответствующие определения истинности. Говоря неформально, спектр консервативности теории S есть трансфинитная последовательность ординалов $\beta = \mathrm{ord}_\alpha(S)$, где β – максимальный ординал, для которого β-кратная итерация схемы рефлексии для формул класса $\Pi_{1+\alpha}$ над некоторой фиксированной теорией содержится в S. Таким образом, спектр консервативности теории S несет информацию о силе теории S в смысле доказуемости в ней формул каждого класса логической сложности $\Pi_{1+\alpha}$.

Спектры консервативности, соответствующие уровням арифметической иерархии[1], были введены Й. Йоостеном [8] под названием *разложения Тьюринга–Тейлора* арифметических теорий. Он установил каноническое взаимно-однозначное соответствие между ω-спектрами консервативности и точками так называемого фрейма Игнатьева. Позже было показано [4], что фрейм Игнатьева может также рассматриваться как естественная алгебраическая модель исчисления рефлексий RC, расширенного операторами консервативности. Фрейм Игнатьева (в первоначальном его варианте) был введен в работе [7] как универсальная модель Крипке для замкнутого фрагмента логики доказуемости Джапаридзе GLP.

В данной работе мы распространяем результаты [8] на определенное в работе [1] понятие λ-спектра консервативности для любых конструктивных ординалов λ, относящееся к существенно более широкому классу теорий. Д. Фернандес–Дуке и Й. Йоостен [6] ввели расширение фрейма Игнатьева для языка с трансфинитным числом модальностей. Основная теорема нашей работы показывает, что элементы этого фрейма, называемые в работе [6] ℓ-последовательностями, совпадают с λ-спектрами консервативности. В силу результатов [6] ℓ-последовательности имеют простую характеризацию в терминах ординальных функций, связанных с иерархией Веблена. Таким образом, наш результат дает явный ответ на вопрос о том, какие последовательности ординалов реализуются как λ-спектры консервативности, и подтверждает гипотезу из работы [1].

Данная работа опирается на большой подготовительный материал, обозначения и результаты из работы [1]. Поэтому мы предполагаем знакомство читателя с указанной работой.

[1] Более точно, последовательности, называемые в данной работе ω-спектрами консервативности.

[1] *Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: bekl@mi-ras.ru*

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Здесь мы коротко суммируем основные понятия и результаты, относящиеся к теориям итерированных предикатов истинности и подходу, развитому в работе [1].

2.1. Итерированные предикаты истинности

Пусть $\mathcal{L}_0$ означает язык элементарной арифметики EA. Зафиксируем некоторое элементарно определимое вполне упорядочение $(\Lambda, <)$ и рассмотрим язык

$$\mathcal{L}_\Lambda := \mathcal{L}_0 \cup \{\mathrm{T}_\alpha \,|\, \alpha < \Lambda\},$$

где T_α – унарные предикатные символы. Порядок $(\Lambda, <)$ определяет естественную гёделеву нумерацию всех синтаксических объектов языка $\mathcal{L}_\Lambda$. Мы не различаем ординалы и их коды (элементы Λ).

Для каждого $\alpha < \Lambda$ мы интерпретируем T_α как предикат истинности для языка $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_0 \cup \{\mathrm{T}_\beta \,|\, \beta < \alpha\}$. В соответствии с этим мы определяем $\mathcal{L}_{\alpha+1}$-теорию UTB_α, постулируя в качестве аксиом *эквивалентности Тарского*:

U1: $\forall \vec{x}\,(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \mathrm{T}_\alpha(\ulcorner\varphi(\underline{\vec{x}})\urcorner))$ для всех $\mathcal{L}_\alpha$-формул $\varphi(\vec{x})$ с указанными свободными переменными $\vec{x} = x_1, \ldots, x_k$;

U2: $\neg\mathrm{T}_\alpha(\underline{n})$, для всех n таких, что n не есть гёделев номер никакого $\mathcal{L}_\alpha$-предложения.

Здесь $\underline{n}$ означает нумерал для натурального числа n и $\ulcorner\varphi(\underline{\vec{x}})\urcorner$ – элементарно определимый терм, представляющий функцию, сопоставляющую набору $\vec{n} = n_1, \ldots, n_k$ гёделев номер предложения $\varphi(\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_k)$. Также мы положим $\mathrm{UTB}_{<\alpha} := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{UTB}_\beta$.

2.2. Гиперарифметическая иерархия формул

Пусть $\mathcal{L}$ – язык, расширяющий $\mathcal{L}_0$ новыми предикатными символами. $\Delta_0^{\mathcal{L}}$ означает класс всех формул, получаемых из атомарных $\mathcal{L}$-формул с помощью булевых связок и ограниченных кванторов. Классы $\Pi_n^{\mathcal{L}}$ и $\Sigma_n^{\mathcal{L}}$ получаются из $\Delta_0^{\mathcal{L}}$ обычным образом: $\Pi_0^{\mathcal{L}} = \Sigma_0^{\mathcal{L}} = \Delta_0^{\mathcal{L}}$, $\Pi_{n+1}^{\mathcal{L}} = \{\forall \vec{x}\varphi(\vec{x}) : \varphi \in \Sigma_n^{\mathcal{L}}\}$, и $\Sigma_{n+1}^{\mathcal{L}} = \{\exists \vec{x}\varphi(\vec{x}) : \varphi \in \Pi_n^{\mathcal{L}}\}$.

Поскольку предикат истинности соответствует ω-кратному применению операции скачка в гиперарифметической иерархии, систему ординальных обозначений $(\Lambda, <)$ необходимо расширить на несколько больший сегмент ординалов до $\omega(1+\Lambda)$. Например, мы можем закодировать ординалы вида $\omega\alpha + n$ парами $\langle\alpha, n\rangle$. Классы формул, соответствующие уровням гиперарифметической иерархии вплоть до $\omega(1+\Lambda)$, определены следующим образом:

- $\Pi_n := \Pi_n^{\mathcal{L}_0}$ если $n < \omega$; $\Pi_{\omega(1+\alpha)+n} := \Pi_{n+1}^{\mathcal{L}_{\alpha+1}}$ если $n < \omega$;
- $\Pi_{<\alpha} := \bigcup_{\beta<\alpha} \Pi_\beta$.

Заметим, что формулы класса $\Pi_{1+\alpha}$ определяют $\Pi_1(\mathbf{0}^{(\alpha)})$-множества в стандартной модели.

2.3. Схемы рефлексии

Пусть S – перечислимое расширение теории $\mathrm{EA} + \mathrm{UTB}_{<\Lambda}$ вместе с фиксированной элементарной формулой, определяющей множество гёделевых номеров ее аксиом в стандартной модели арифметики. Через $\Box_S$ обозначаем гёделевскую формулу доказуемости в теории S (как она определена, например, в работе [5]).

Пусть Γ – некоторое множество формул языка S. Через Γ-$\mathrm{RFN}(S)$ мы обозначаем *равномерную схему рефлексии для* Γ-формул, т.е. схему

$$\Gamma\text{-}\mathrm{RFN}(S): \quad \forall x(\Box_S(\ulcorner\varphi(\underline{x})\urcorner) \to \varphi(x)), \quad \varphi \in \Gamma.$$

Мы будем рассматривать следующие схемы рефлексии для введенных выше классов для всех $\alpha < \omega(1+\Lambda)$:

$$\mathrm{R}_\alpha(S) := \Pi_{1+\alpha}\text{-}\mathrm{RFN}(S),$$

$$\mathrm{R}_{<\alpha}(S) := \Pi_{<\alpha}\text{-}\mathrm{RFN}(\mathrm{S}).$$

Теории, аксиоматизированные трансфинитными итерациями операторов рефлексии вдоль заданной системы ординальных обозначений $(\Omega, \prec)$, определяются формализацией следующего уравнения на неподвижную точку в S:

$$\forall \beta \in \Omega(\overline{\mathrm{R}}_\alpha^\beta(S) \equiv S + \cup\{\mathrm{R}_\alpha(\overline{\mathrm{R}}_\alpha^\gamma(S)) : \gamma \prec \beta\}). \quad (1)$$

Теории $\overline{\mathrm{R}}_\alpha^\beta(S)$, удовлетворяющие (1), единственны по модулю доказуемой эквивалентности в S [4]. Аналогично можно определить теории $\overline{\mathrm{R}}_{<\alpha}^\beta(S)$ с помощью трансфинитной итерации операторов $\overline{\mathrm{R}}_{<\alpha} : U \mapsto S + \mathrm{R}_{<\alpha}(U)$, действующих на полурешетке перечислимых расширений теории S.

Обозначим через EA^+ расширение теории EA аксиомой, утверждающей тотальность итерированной экспоненциальной функции. Для основных результатов работы [1], как и в настоящей рботе, мы выбираем в качестве базовой теории S теорию $\mathrm{IB} := \mathrm{EA}^+ + \mathrm{UTB}_{<\Lambda}$. Теории $\overline{\mathrm{R}}_\alpha^\beta(\mathrm{IB})$ и $\overline{\mathrm{R}}_{<\alpha}^\beta(\mathrm{IB})$ обозначаем сокращенно $\overline{\mathrm{R}}_\alpha^\beta$ и $\overline{\mathrm{R}}_{<\alpha}^\beta$ соответственно.

3. ФОРМУЛЫ ШМЕРЛЯ

Один из основных результатов работы [1] – результат о консервативности, соотносящий смешанные схемы рефлексии с трансфинитно итерированными схемами рефлексии сложности $\Pi_{1+\alpha}$. Мы выведем из этого результата соотношения между иерархиями итерированных схем рефлексии известными как *формулы Шмерля*. Подобные соотношения впервые возникли в работах Ульфа Шмерля [9, 10] и были впоследствии обобщены в [2].

Для любых ординалов $\alpha \leq \beta$ обозначим через $-\alpha+\beta$ единственный ординал γ такой, что $\alpha+\gamma=\beta$. Мы будем рассматривать небольшой вариант известной функции Веблена φ:

$$\overline{\varphi}_\alpha(\beta) := \begin{cases} 0, & \text{если } \beta = 0, \\ \omega^\beta, & \text{если } \alpha = 0, \beta \neq 0, \\ \varphi_\alpha(-1+\beta), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим через Cr_α класс всех значений функции $\overline{\varphi}_\alpha$. Нетрудно видеть, что $\mathrm{Cr}_{\alpha+1}$ есть класс всех неподвижных точек функции $\overline{\varphi}_\alpha$ и для предельных ординалов λ $\mathrm{Cr}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{Cr}_\alpha$. Функции $\overline{\varphi}_\alpha$ монотонно возрастают и непрерывны, и классы Cr_α замкнуты и неограниченны. Эти условия однозначно определяют функции $\overline{\varphi}_\alpha$ как только фиксирована функция $\overline{\varphi}_0$. Отметим, что в терминах иерархии "гиперэкспоненциальных функций", введенной в работе [6], можно выразить $\overline{\varphi}_\alpha(\beta)$ как $e^{\omega^\alpha}(\beta)$.

Ниже мы будем использовать специальные системы ординальных обозначений $\mathbb{W}^\Lambda$ (и $\mathbb{W}^\Lambda_\alpha$), определяемые на основе *исчисления рефлексий* RC_Λ (см. [1, раздел 6.2]). Эти системы дают обозначения для ординалов из начального сегмента, содержащего Λ и замкнутого относительно ординальных функций $+$ и $\overline{\varphi}_\alpha$ для всех $\alpha < \Lambda$. Ординал, соответствующий слову $A \in \mathbb{W}^\Lambda_\alpha$, обозначается $o_\alpha(A)$.

Обозначим через $U \equiv_\alpha V$ взаимную консервативность теорий U и V относительно $\Pi_{1+\alpha}$-предложений.

Т е о р е м а 3.1.

(i) $\overline{\mathrm{R}}^{\gamma}_{\alpha+\omega^\beta} \equiv_\alpha \overline{\mathrm{R}}^{\overline{\varphi}_\beta(\gamma)}_\alpha$;

(ii) $\overline{\mathrm{R}}^{\gamma_1}_{\alpha+\omega^\beta} \cup \overline{\mathrm{R}}^{\gamma_2+1}_\alpha \equiv_\alpha \overline{\mathrm{R}}^{\gamma_2+1+\overline{\varphi}_\beta(\gamma_1)}_\alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Мы предполагаем Λ настолько большим, что $\alpha+\omega^\beta < \Lambda$ и γ имеет обозначение в системе $\mathbb{W}^\Lambda_{\alpha+\omega^\beta}$. (Для любых конструктивных ординалов α, β, γ можно всегда выбрать подходящий Λ, и мы также можем считать ординал Λ аддитивно неразложимым.) Это означает, что существует слово $C \in \mathbb{W}^\Lambda_{\alpha+\omega^\beta}$ такое, что $o_{\alpha+\omega^\beta}(C) = \gamma$. По теореме 8 работы [1] мы имеем

$$C^* \equiv_{\alpha+\omega^\beta} \overline{\mathrm{R}}^{\gamma}_{\alpha+\omega^\beta}.$$

Поскольку $C \in \mathbb{W}^\Lambda_\alpha$, тот же результат дает

$$C^* \equiv_\alpha \overline{\mathrm{R}}^{o_\alpha(C)}_\alpha.$$

Значит, $\overline{\mathrm{R}}^{\gamma}_{\alpha+\omega^\beta} \equiv_\alpha \overline{\mathrm{R}}^{o_\alpha(C)}_\alpha$ и нам достаточно вычислить $o_\alpha(C)$.

Обозначим через $\nu \uparrow A$ результат замены каждой буквы x в слове A на $\nu + x$. Аналогично, $\nu \downarrow A$ означает результат замены каждой буквы x в A на $-\nu + x$. В силу трансляционной симметриии RC_Λ, которая имеет место для аддитивно неразложимых ординалов Λ, эти отображения представляют собой изоморфизмы между системами обозначений $(\mathbb{W}^\Lambda_\nu, <_\nu)$ и $(\mathbb{W}^\Lambda_0, <_0)$.

Положим $D := (\alpha+\omega^\beta) \downarrow C = \omega^\beta \downarrow (\alpha \downarrow C)$. Мы имеем

$$o(D) = o_{\alpha+\omega^\beta}(C) = \gamma.$$

Отсюда получаем

$$o_\alpha(C) = o(\alpha \downarrow C) = o(\omega^\beta \uparrow D) = \overline{\varphi}_\beta(o(D)) = \overline{\varphi}_\beta(\gamma),$$

по [3, Lemma 17] (см. также [1, Section 6.2)].

(ii) Рассуждая аналогичным образом, рассмотрим $C_1 \in \mathbb{W}^\Lambda_{\alpha+\omega^\beta}$ и $C_2 \in \mathbb{W}^\Lambda_\alpha$ такие, что $o_{\alpha+\omega^\beta}(C_1) = \gamma_1$ and $o_\alpha(C_2) = \gamma_2$. Тогда

$$\overline{\mathrm{R}}^{\gamma_1}_{\alpha+\omega^\beta} \equiv_{\alpha+\omega^\beta} C_1^* \quad \text{и} \quad \overline{\mathrm{R}}^{\gamma_2}_\alpha \equiv_\alpha C_2^*.$$

Вторая эквивалентность дает

$$\overline{\mathrm{R}}_\alpha(\overline{\mathrm{R}}^{\gamma_2}_\alpha) \equiv \overline{\mathrm{R}}_\alpha(C_2^*).$$

Поскольку R_α имеет сложность $\Pi_{1+\alpha}$, первая эквивалентность влечет

$$\overline{\mathrm{R}}^{\gamma_1}_{\alpha+\omega^\beta} \cup \overline{\mathrm{R}}_\alpha(\overline{\mathrm{R}}^{\gamma_2}_\alpha) \equiv_{\alpha+\omega^\beta} (C_1 \wedge \alpha C_2)^*.$$

Мы имеем $C_1 \wedge \alpha C_2 =_{\mathrm{RC}_\Lambda} C_1 \alpha C_2$, поскольку $C_1 \in \mathbb{W}^\Lambda_{\alpha+1}$. Более того,

$$o_\alpha(C_1 \alpha C_2) = o_\alpha(C_2) + 1 + \omega^{o_{\alpha+1}(C_1)} = \gamma_2 + 1 + \overline{\varphi}_\beta(\gamma_1).$$

Тогда по [1, теорема 8] мы получаем

$$(C_1 \wedge \alpha C_2)^* \equiv_\alpha \overline{\mathrm{R}}^{\gamma_2+1+\overline{\varphi}_\beta(\gamma_1)}_\alpha,$$

что и требовалось. ⊣

Заметим, что формула (ii) может быть также выведена из формулы (i) с помощью рефлексивной индукции как в [4, лемма 7.3].

4. СПЕКТРЫ КОНСЕРВАТИВНОСТИ

Как и ранее, мы рассматриваем ординалы, представимые в системе обозначений $\mathbb{W}^{\Lambda}$ для достаточно больших ординалов Λ. Определяем *спектр консервативности* теории S (длины λ) как λ-последовательность ординалов $\mathrm{ord}_{\alpha}(S)$, для всех $\alpha < \lambda$, где

$$\mathrm{ord}_{\alpha}(S) := \sup\{\gamma \in \mathbb{W}^{\Lambda} : S \vdash \overline{\mathrm{R}}^{\gamma}_{\alpha}\}.$$

Спектр консервативности называем *собственным*, если значение $\mathrm{ord}_{\alpha}(S)$ лежит в $\mathbb{W}^{\Lambda}$ для каждого $\alpha < \lambda$. Мы будем неявно предполагать все рассматриваемые спектры собственными.

Очевидно, последовательность $\mathrm{ord}_{\alpha}(S)$ является невозрастающей по α. Следующая теорема дает более сильное необходимое условие того, чтобы данная λ-последовательность ординалов представляла спектр консервативности некоторой теории S. Нам понадобится известная функция *ординального логарифма* ℓ, определяемая условиями: $\ell(0) = 0$ и $\ell(\alpha + \omega^{\beta}) = \beta$ для любых ординалов α и β. Заметим, что в силу теоремы о канторовской нормальной форме эти условия однозначно определяют значение $\ell(\alpha)$ для любого α.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть f — спектр консервативности теории S длины λ. Тогда для любых* α, β *таких, что* $\alpha + \omega^{\beta} < \lambda$,

(i) $\ell(f(\alpha)) \geq f(\alpha + 1)$;

(ii) $\ell(f(\alpha)) \geq \overline{\varphi}_{\beta}(f(\alpha + \omega^{\beta}))$, *если* $\beta > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Обозначим $\gamma := f(\alpha + 1)$ и допустим, от противного, что $\gamma > \ell f(\alpha)$. В этом случае $f(\alpha) \geq f(\alpha + 1) = \gamma > 0$ и мы можем представить $f(\alpha)$ в виде $\alpha_0 + \omega^{\ell f(\alpha)}$ для некоторого α_0.

По определению спектра

$$S \vdash \overline{\mathrm{R}}^{\gamma}_{\alpha+1} \cup \overline{\mathrm{R}}^{\alpha_0+1}_{\alpha}.$$

По теореме 3.1 (ii) отсюда следует, что $S \vdash \overline{\mathrm{R}}^{\alpha_0+1+\omega^{\gamma}}_{\alpha}$. Следовательно, $\mathrm{ord}_{\alpha}(S) \geq \alpha_0 + \omega^{\gamma} > \alpha_0 + \omega^{\ell f(\alpha)} = f(\alpha)$, противоречие.

(ii) Обозначим $\gamma := f(\alpha + \omega^{\beta})$ для некоторого $\beta > 0$, и допустим, от противного, что $\ell f(\alpha) < \overline{\varphi}_{\beta}(\gamma)$. Поскольку $\beta > 0$, мы также получаем $\overline{\varphi}_{\beta}(\gamma) = \omega^{\overline{\varphi}_{\beta}(\gamma)} > \omega^{\ell f(\alpha)}$.

По определению спектра

$$S \vdash \overline{\mathrm{R}}^{\gamma}_{\alpha+\omega^{\beta}} \cup \overline{\mathrm{R}}^{\alpha_0+1}_{\alpha}.$$

По теореме 3.1 (ii) отсюда следует, что $S \vdash \overline{\mathrm{R}}^{\alpha_0+1+\overline{\varphi}_{\beta}(\gamma)}_{\alpha}$. Значит, $\mathrm{ord}_{\alpha}(S) \geq \alpha_0 + \overline{\varphi}_{\beta}(\gamma) > \alpha_0 + \omega^{\ell f(\alpha)} = f(\alpha)$, противоречие.

Д. Фернандес-Дуке и Й. Йоостен [6, предложение 5.2] определяют понятие *ℓ-последовательности* как ординальной последовательности длины λ такой, что для всех $\xi < \zeta < \lambda$

$$\ell f(\xi) \geq \ell e^{\omega^{\ell\zeta}} f(\zeta).$$

Напомним, что функция e такова, что $e^{\omega^{\alpha}}(\beta) = \overline{\varphi}_{\alpha}(\beta)$. Поэтому их условие эквивалентно требованию $\ell f(\xi) \geq f(\zeta)$, если $\zeta = \xi + 1$, и

$$\ell f(\xi) \geq \overline{\varphi}_{\beta}(f(\zeta)),$$

если $\zeta = \xi + \omega^{\beta}$ для некоторого $\beta > 0$. (Если $\beta > 0$, то $\overline{\varphi}_{\beta}(f(\zeta))$ есть неподвижная точка ℓ, поэтому применение ℓ перед $\overline{\varphi}$ может быть опущено.) Отсюда следует, что необходимое условие в теореме 4.1 эквивалентно тому, что f является ℓ-последовательностью.

С л е д с т в и е 4.2. λ-спектр консервативности любой теории S является ℓ-последовательностью.

Для доказательства того, что всякая ℓ-последовательность является спектром консервативности некоторой теории, отметим несколько свойств ℓ-последовательностей.

Пусть f — ℓ-последовательность длины λ и $\alpha < \lambda$. Обозначим $\gamma_1 := f(\alpha)$ и $\gamma_2 := \min\{f(\gamma) : \gamma < \alpha\}$.

Л е м м а 4.3. $\overline{\mathrm{R}}^{\gamma_1}_{\alpha} \cup \overline{\mathrm{R}}^{\gamma_2}_{<\alpha} \equiv_{<\alpha} \overline{\mathrm{R}}^{\gamma_2}_{<\alpha}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\alpha = \alpha_0 + 1$ для некоторого α_0, то $\gamma_2 = f(\alpha_0)$, $l(\gamma_2) \geq \gamma_1$ и требуется показать

$$\overline{\mathrm{R}}^{\gamma_1}_{\alpha_0+1} \cup \overline{\mathrm{R}}^{\gamma_2}_{\alpha_0} \equiv_{\alpha_0} \overline{\mathrm{R}}^{\gamma_2}_{\alpha_0}.$$

Мы также можем считать $\gamma_1 > 0$ (в противном случае утверждение тривиально), отсюда $\gamma_2 \in \mathrm{Lim}$.

Рассмотрим любой ординал-последователь $\delta < \gamma_2$. По формуле Шмерля

$$\overline{\mathrm{R}}^{\gamma_1}_{\alpha_0+1} \cup \overline{\mathrm{R}}^{\delta}_{\alpha_0} \equiv_{\alpha_0} \overline{\mathrm{R}}^{\delta+\omega^{\gamma_1}}_{\alpha_0}.$$

Заметим теперь, что $\delta + \omega^{\gamma_1} \leq \delta + \omega^{\ell\gamma_2} \leq \gamma_2$. Значит, для любого $\delta < \gamma_2$ теория $\overline{\mathrm{R}}^{\gamma_1}_{\alpha_0+1} \cup \overline{\mathrm{R}}^{\delta}_{\alpha_0}$ $\Pi_{1+\alpha_0}$-консервативна над $\overline{\mathrm{R}}^{\gamma_2}_{\alpha_0}$, откуда следует требуемое.

Допустим, что $\alpha = \alpha_0 + \omega^{\beta}$, где $\beta > 0$. Выберем $\alpha' < \alpha$ такое, что $\alpha' \geq \alpha_0$ и $f(\alpha') = \gamma_2$. Тогда $\alpha' + \omega^{\beta} = \alpha$ и $\ell(\gamma_2) \geq \overline{\varphi}_{\beta}(\gamma_1)$.

Рассмотрим любой ординал-последователь $\delta < \gamma_2$. По формуле Шмерля

$$\overline{\mathrm{R}}_{\alpha}^{\gamma_1} \cup \overline{\mathrm{R}}_{\alpha'}^{\delta} \equiv_{\alpha'} \overline{\mathrm{R}}_{\alpha'}^{\delta+\overline{\varphi}_{\beta}(\gamma_1)}.$$

Поскольку $\ell\gamma_2 \geq \overline{\varphi}_{\beta}(\gamma_1)$, имеем $\delta + \overline{\varphi}_{\beta}(\gamma_1) \leq \gamma_2$. Так как это верно для всех достаточно больших ординалов $\alpha' < \alpha$ и $\delta < \gamma_2$, получаем требуемое утверждение.

Т е о р е м а 4.4. *Любая ℓ-последовательность длины λ есть спектр консервативности некоторой теории S.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что любая ℓ-последовательнрость f не возрастает и поэтому принимает не более конечного числа различных значений, скажем $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ в порядке убывания. Положим

$$\alpha_i = \min\{\alpha : f(\alpha) = \gamma_{i+1}\}.$$

Тогда значение f есть константа γ_{i+1} на каждом интервале $[\alpha_i, \alpha_{i+1})$, где $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_n := \lambda$. Положим

$$S_n := \overline{\mathrm{R}}_{<\alpha_n}^{\gamma_n} \cup \overline{\mathrm{R}}_{<\alpha_{n-1}}^{\gamma_{n-1}} \cup \cdots \cup \overline{\mathrm{R}}_{<\alpha_1}^{\gamma_1}.$$

Мы утверждаем, что спектр консервативности теории S_n совпадает с f. Для доказательства нам понадобятся две дополнительные леммы.

Л е м м а 4.5. *Допустим* $\alpha_{i-1} \leq \alpha < \alpha_i$. *Тогда* $\overline{\mathrm{R}}_{\alpha_i}^{\gamma_i} \equiv_{\alpha} \overline{\mathrm{R}}_{\alpha}^{\gamma_i}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы можем представить α_i в виде $\alpha_i := \alpha + \omega^{\beta_1} + \cdots + \omega^{\beta_k}$. Положим $\overline{\alpha}_j := := \alpha + \omega^{\beta_1} + \cdots + \omega^{\beta_j}$, где $\overline{\alpha}_0 := \alpha$. Поскольку f есть ℓ-последовательность и $f(\overline{\alpha}_j) = \gamma_i$, мы имеем $\gamma_i \geq \ell(\gamma_i) \geq \overline{\varphi}_{\beta_j}(\gamma_i)$. Следовательно, γ_i есть неподвижная точка функции φ_{β_j} для каждого j. Тогда индукцией по $j = k, \ldots, 0$ из теоремы 3.1 (i) мы получаем

$$\overline{\mathrm{R}}_{\alpha_i}^{\gamma_i} \equiv_{\overline{\alpha}_j} \overline{\mathrm{R}}_{\overline{\alpha}_j}^{\gamma_i}.$$

Утверждение леммы получается для $j = 0$. $\dashv$

Л е м м а 4.6. *Для любого $i < n$, $S_{i+1} \equiv_{<\alpha_i} S_i$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, по лемме 4.5,

$$\overline{\mathrm{R}}_{<\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}} \equiv_{<\alpha_{i+1}} \overline{\mathrm{R}}_{\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}} \equiv_{\alpha_i} \overline{\mathrm{R}}_{\alpha_i}^{\gamma_{i+1}}.$$

Поскольку S_i есть множество формул сложности $\Pi_{<\alpha_i}$, отсюда следует, что

$$S_{i+1} \equiv S_i \cup \overline{\mathrm{R}}_{<\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}} \equiv_{\alpha_i} S_i \cup \overline{\mathrm{R}}_{\alpha_i}^{\gamma_{i+1}} \equiv$$
$$\equiv S_{i-1} \cup \overline{\mathrm{R}}_{<\alpha_i}^{\gamma_i} \cup \overline{\mathrm{R}}_{\alpha_i}^{\gamma_{i+1}}.$$

Поскольку S_{i-1} имеет сложность $\Pi_{<\alpha_{i-1}}$, по лемме 4.3 получаем

$$S_{i-1} \cup \overline{\mathrm{R}}_{<\alpha_i}^{\gamma_i} \cup \overline{\mathrm{R}}_{\alpha_i}^{\gamma_{i+1}} \equiv_{<\alpha_i} S_{i-1} \cup \overline{\mathrm{R}}_{<\alpha_i}^{\gamma_i} \equiv S_i.$$

Теперь индукцией по $i = 0, \ldots, n$ мы покажем, что α_i-спектр консервативности теории S_i совпадает с $f \upharpoonright \alpha_i$. Теорема 4.4 получается отсюда при $i = n$. Для $i = 0$ утверждение тривиально.

Допустим, что утверждение имеет место для i и докажем его для $i + 1$. По лемме 4.6 $\mathrm{ord}_{\alpha}(S_{i+1}) = \mathrm{ord}_{\alpha}(S_i)$ для всех $\alpha < \alpha_i$. Поэтому мы можем считать, что $\alpha_i \leq \alpha < \alpha_{i+1}$. В этом случае, поскольку сложность теории S_i есть $\Pi_{<\alpha_i}$ и S_i корректна,

$$\mathrm{ord}_{\alpha}(S_{i+1}) = \mathrm{ord}_{\alpha}(S_i \cup \overline{\mathrm{R}}_{<\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}}) = \mathrm{ord}_{\alpha}(\overline{\mathrm{R}}_{<\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}}).$$

Наконец, по лемме 4.5

$$\overline{\mathrm{R}}_{<\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}} \equiv_{\alpha} \overline{\mathrm{R}}_{\alpha}^{\gamma_{i+1}}.$$

Значит, $\mathrm{ord}_{\alpha}(\overline{\mathrm{R}}_{<\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}}) = \gamma_{i+1} = f(\alpha)$. Теорема 4.4 доказана.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00318, https://rscf.ru/project/21-11-00318/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beklemishev L., Pakhomov F.* Reflection algebras and conservation results for theories of iterated truth. Annals of Pure and Applied Logic, 2022. https://doi.org/10.1016/j.apal.2022.103093
2. *Beklemishev L.D.* Proof-theoretic analysis by iterated reflection. Archive for Mathematical Logic. 2003. V. 42. P. 515–552.
3. *Beklemishev L.D.* Veblen hierarchy in the context of provability algebras. In P. Hájek, L. Valdés-Villanueva, and D. Westerståhl, editors, Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the Twelfth International Congress (Kings College Publications, London, 2005), p. 65–78.
4. *Beklemishev L.D.* Reflection calculus and conservativity spectra. Russian Math. Surveys. 2018. V. 73. № 4. P. 569–613. Russian original: Uspekhi Matematicheskikh Nauk. 2018. V. 73. № 4 (442). P. 3–52.
5. *Feferman S.* Arithmetization of metamathematics in a general setting. Fundamenta Mathematicae. 1960. V. 49. P. 35–92.
6. *Fernández-Duque D., Joosten J.* Models of transfinite provability logic. J. Symbolic Logic. 2013. V. 78. № 2. P. 543–561.
7. *Ignatiev K.N.* On strong provability predicates and the associated modal logics. The Journal of Symbolic Logic. 1993. V. 58. P. 249–290.

8. *Joosten J.J.* Turing–Taylor expansions of arithmetical theories. Studia Logica. 2015. V. 104. P. 1225–1243. https://doi.org/10.1007/s11225-016-9674-z
9. *Schmerl U.R.* A fine structure generated by reflection formulas over Primitive Recursive Arithmetic. In M. Boffa, D. van Dalen, and K. McAloon, editors, Logic Colloquium'78. North Holland, Amsterdam, 1979, p. 335–350.
10. *Schmerl U.R.* A proof-theoretical _ne structure in systems of ramified analysis. Archive for Mathematical Logic. 1982. V. 22. P. 167–186.

CONSERVATIVITY SPECTRA AND JOOSTEN-FERNÁNDEZ MODEL

Academician of the RAS Lev D. Beklemishev

[a] *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

We study a generalization of the notion of conservativity spectrum of an arithmetical theory to a language with transfinitely many truth definitions. We establish a natural correspondence of conservativity spectra and points of a special Kripke model introduced by D. Fernández-Duque and J. Joosten. For iterated reflection principles over theories of truth definitions we also establish conservation results analogous to the well-known Schmerl formulas.

Keywords: reflection principle, truth definition, conservativity