

УДК 519.62

ТРАЕКТОРИЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ, ОТСЛЕЖИВАЮЩЕГО ДВИЖЕНИЕ ОБЪЕКТА ВОКРУГ ВЫПУКЛЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ В \mathbb{R}^2 И \mathbb{R}^3

© 2022 г. Академик РАН В. И. Бердышев^{1,*}

Поступило 28.04.2022 г.
После доработки 14.05.2022 г.
Принято к публикации 28.05.2022 г.

Автономный объект, движущийся в условиях наблюдения с постоянной по величине скоростью по кратчайшему пути, обходит упорядоченную совокупность попарно непересекающихся выпуклых множеств. Задача наблюдателя состоит в поиске траектории движения такой, что в каждый момент времени он наблюдает объект, находится на заданном расстоянии от него и движется с возможно малой по величине скоростью. В работе предлагаются варианты траекторий движения наблюдателя с указанием скоростного режима.

Ключевые слова: навигация, автономный аппарат, траектория, наблюдатель

DOI: 10.31857/S268695432204004X

1. Автономный объект t движется с постоянной по величине скоростью V_t по кратчайшей траектории \mathcal{T}_t , последовательно огибающей выпуклые попарно непересекающиеся множества из заданного набора $\{G_i\}_1^k$. Порядок обхода множеств диктуется требованием минимума длины траектории \mathcal{T}_t . Начальная и конечная точки t_*, t^* траектории \mathcal{T}_t лежат вне $\cup G_i$. Задача наблюдателя $f = f_\tau$ – поиск траектории \mathcal{T}_f , позволяющей ему двигаться с возможно малой скоростью $V(f_\tau)$ и держать объект $t = t_\tau$ в поле зрения в каждый момент времени τ на заданном фиксированном расстоянии $\delta > 0$, позволяющей, в частности, реализовать взаимно однозначное отображение $t \rightarrow f(t)$, $t \in \mathcal{T}_t$, $f(t) \in \mathcal{T}_f$, т.е. указать вектор наблюдения $t - f(t)$. В работе предлагаются варианты траектории \mathcal{T}_f с указанием скоростного режима $V(f)$ на разных ее участках.

Траектория объекта состоит (см. рис. 1) из набора дуг $\Delta_i = \widehat{t_i, \bar{t}_i} \subset \partial G_i$ ($i = 1, \dots, k$), и касательных к ним отрезков $\Lambda_i = [\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}]$ ($i = 0, \dots, k; \bar{t}_0 = t_*, \underline{t}_{k+1} = t^*$), где ∂G – граница множества G .

Наблюдателю приходится искать способы движения, учитывающие специфику слежения за объектом, преодолевающим дуги Δ_i и отрезки Λ_i .

2. Случай пространства \mathbb{R}^2 . Считаем, что соседние множества G_i, G_{i+1} разделяются прямой $\overline{\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}}$, содержащей точки $\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}$.

Простейший способ слежения за объектом, двигающимся по траектории \mathcal{T}_t – движение наблюдателя по траектории

$$\mathcal{T}_f = \left\{ f = t \pm \delta \frac{V_t}{|V_t|} : t \in \mathcal{T}_t \right\}, \quad (1)$$

вперед или за объектом с переменным вектором наблюдения $\frac{V_t}{|V_t|}$ с величиной скорости, зависящей от кривизны траектории \mathcal{T}_t . Эта скорость может принимать большие значения даже в случае гладкой траектории. В самом деле, представив фрагменты траекторий \mathcal{T}_t и \mathcal{T}_f графиками функций $t(\tau), f(\tau)$, зависящих от времени τ , получим выражение

$$V(f_\tau) = [1 + f'(\tau)^2]^{\frac{1}{2}} = \left\{ 1 + \left[t'(\tau) \pm \delta \frac{t''(\tau)}{(1 + t'(\tau)^2)^{\frac{3}{2}}} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

¹ Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия
*E-mail: bvi@imm.uran.ru

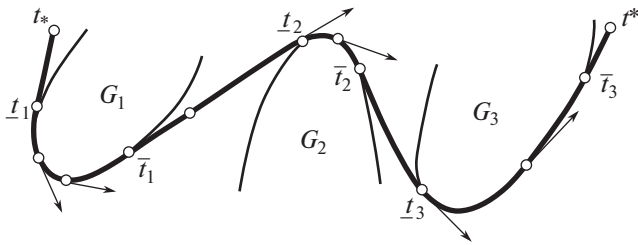


Рис. 1. На рисунке тонкими линиями отмечены границы множеств G_i , жирной линией изображена траектория \mathcal{T}_t , короткими отрезками – векторы скорости $V(t)$.

выгодна ему лишь, когда дуга Δ_2 имеет малую кривизну. Сказанное справедливо для любого вектора наблюдения

$$b = (1 - \lambda) \frac{V(\underline{t}_1)}{\|V(\underline{t}_1)\|} + \lambda \frac{\underline{t}_2 - \bar{t}_1}{\|\underline{t}_2 - \bar{t}_1\|} \quad (0 < \lambda < 1)..$$

В случае $i > 1$ для слежения за объектом, преодолевающим дугу Δ_i , предлагается (см. рис. 2 для $i = 2$) два варианта траектории \mathcal{T}_f :

2б) дуга $\mathcal{T}_f^{i,i+1}$, составленная из фрагментов двух дуг

$$\mathcal{T}_f^{b_j} \quad (j = i, i + 1), \quad \text{где} \quad b_j = \frac{(\underline{t}_{j+1} - \bar{t}_j)}{\|\underline{t}_{j+1} - \bar{t}_j\|},$$

а именно

$$\mathcal{T}_f^{i,i+1} = (\widehat{\underline{t}_i, f_{i,i+1}}) \cup (\widehat{f_{i,i+1}, \bar{t}_i}),$$

где $f_{i,i+1} = \mathcal{T}_f^{b_i} \cap \mathcal{T}_f^{b_{i+1}}$.

2с) $\mathcal{T}_f^{i,i+1}$ – совокупность точек f на отрезках $[t, q]$, $f - t = \delta$, где $q = \overline{\underline{t}_{i-1}, \underline{t}_i} \cap \overline{\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}}$, $t \subset \partial G_i$, $(t, q) \cap G_i = \emptyset$.

В случае 2б) векторами наблюдения являются $(1 - \lambda)b_i + \lambda b_{i+1}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), а в случае 2с) – векторы $t - f$. Нетрудно видеть, что $V(f_\tau) \leq V_t$. Если отрезки Λ_{i-1}, Λ_i параллельны, то наблюдатель движется по дуге $\mathcal{T}_f^{b_i}$.

Рассмотрим задачу наблюдения за объектом, движущимся по отрезку Λ_i после преодоления им дуги Δ_i в предположении, что дуга Δ_{i+1} имеет большую кривизну и выполняются условия

$$\min \{\|g - g'\| : g \in G_i, g' \in G_{i+1}\} \geq \delta, \quad \|\underline{t}_{i+1} - \bar{t}_i\| > 2\delta.$$

Положим $i = 1$ и определим ортогональную систему координат (x, y) с началом $\frac{\bar{t}_1 + \underline{t}_2}{2}$ и осью абс-

содержащее формулу кривизны кривой $t(\tau)$ в точке τ .

2а) Для отслеживания объекта, движущегося по дуге Δ_i с большой кривизной, в частности, негладкой, можно использовать часть \mathcal{T}_t^b траектории \mathcal{T}_t , “освещенную” пучком лучей, сонаправленных с заданным вектором (наблюдения) b , $\|b\| = 1$. Так, в случае $i = 1$ (см. рис. 2), $b = b_1 = \frac{\underline{t}_2 - \bar{t}_1}{\|\underline{t}_2 - \bar{t}_1\|}$, будет $\mathcal{T}_t^b = \Lambda_0 \cup \Delta_i$, а в качестве фрагмента траектории наблюдателя предлагается использовать дугу

$$\mathcal{T}_f^{b_i} = \mathcal{T}_t^b - \delta \cdot b. \quad (3)$$

Наблюдатель f_τ , отслеживая объект $t_\tau = f_\tau + \delta \cdot b_1$, движется с постоянным вектором наблюдения b_1 и постоянной скоростью $V_f = V_t$, вне зависимости от наличия участков большой кривизны и угловых точек дуги Δ_1 , а расстояние от f_τ до t_τ равно δ , и в этом преимущество дуги (3). Но после преодоления дуги (3) наблюдатель оказывается в позиции \bar{f}_1 , позади объекта $t = \bar{t}_1$ (см. рис. 2), которая

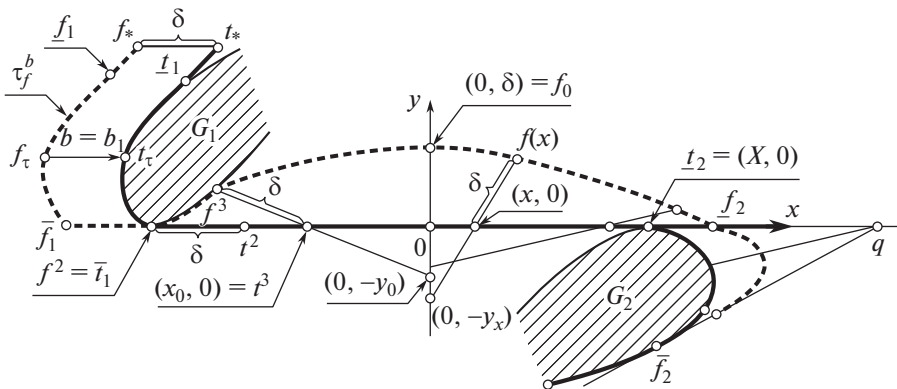


Рис. 2. На рисунке жирной сплошной линией обозначена траектория \mathcal{T}_t , жирной штриховой линией – траектория \mathcal{T}_f .

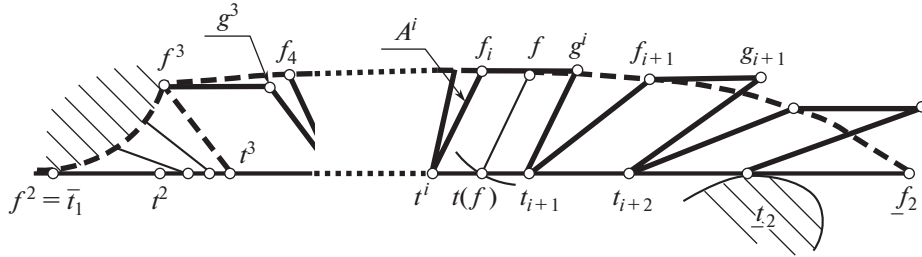


Рис. 3. На рисунке жирной штриховой линией изображена дуга траектории \mathcal{T}_f .

цисс $\overline{t_1}, \underline{t_2}$. После преодоления дуги $\mathcal{T}_f^{b_1}$ наблюдатель занимает позицию (см. рис. 2) $\overline{f_1}$ и затем $f^2 = \overline{t_1}$, а объект – позицию $\overline{t_1}$ и затем позицию $t^2 = \overline{t_1} + \delta b_1$ впереди наблюдателя. Далее одновременно движутся объект t_t по оси абсцисс до точки $t^3 = (x_0, 0)$, наблюдатель f_t по δG_1 до точки f^3 так, что $\|f_t - t_t\| = \delta$. Задача наблюдателя на этом этапе в момент прибытия объекта в точку $\underline{t_2}$, достичь пункт $\underline{f_2} = \underline{t_2} + \delta b_1$, опередив объект. Используем следующие два варианта дуги $\widehat{f^3, \underline{f_2}} \subset \mathcal{T}_f$.

2d) Пусть точка $(0, -y_0)$, $y_0 > 0$, такова, что $t^3 \in [f^3, (0, -y_0)]$ (см. рис. 2). Обозначим $\underline{t_2} = (X, 0)$, $Y = y_0 \cdot X \cdot (X - x_0)^{-1}$. Для точки $(x, 0)$, $x_0 \leq x < X$, определим число $y_x = Y - \frac{Y}{X}x > 0$ и на луче с вершиной $(0, -y_x)$, содержащем точку $(x, 0)$, отметим точку $f(x)$ такую, что $(x, 0) \in [(0, -y_x), f(x)]$ и $\|(x, 0) - f(x)\| = \delta$. Двигаясь по дуге $\{f(x) : x_0 \leq x \leq X\}$, наблюдатель следит за объектом $t = (x, 0)$. Имеем

$$f(x) = \left(x \cdot \left(1 + \frac{\delta}{\mathcal{D}} \right), \delta \cdot \frac{\left(Y - \frac{Y}{X}x \right)}{\mathcal{D}} \right), \quad \text{где} \quad (4)$$

$$\mathcal{D} = \left[x^2 + \left(Y - \frac{Y}{X}x \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

что позволяет найти скорость движения наблюдателя по дуге $\{f(x) : x_0 \leq x \leq X\}$.

2e) Построим кусочно-линейную дугу $\widehat{f^3, \underline{f_2}} \subset \mathcal{T}_f$. Зададим $\gamma > 1$ и разобьем отрезок $[t^3, \underline{t_2}]$ (рис. 3) равномерной сеткой узлов t^i на частичные отрезки $\Delta^i = [t^{i-1}, t^i]$, $i = 1, \dots, k$. На каждом отрезке Δ^i , последовательно, начиная с $i = 4$, построим параллелограмм с основанием длины $|\Delta| = |\Delta^i|$, бо-

ковыми сторонами $[t^{i-1}, f^{i-1}]$, $[t^i, g^i]$ длины δ и отметим точку f^i такую, что

$$\|f^{i-1} - f^i\| = \gamma \cdot |\Delta|, \quad \|t^i - f^i\| = \delta. \quad (5)$$

Обозначим через $A^i = A^i(\delta, \gamma)$ угол между векторами $g^i - t^i$, $f^i - t^i$. Легко устанавливаются

Л е м м а 1. Для любого i справедливы утверждения:

- $A^i(\delta, \gamma) < A^i(\delta, \gamma')$ при $\gamma < \gamma'$;
- $A^i(\delta', \gamma) < A^i(\delta, \gamma)$ при $\delta < \delta'$;
- $A^i(\delta, \gamma) > 0$ при $\gamma > 1$.

Л е м м а 2. Для любой $f \in [f^{i-1}, f^i]$ существует единственная точка

$$t = t(f) \in [t^{i-1}, t^i], \quad \|f - t(f)\| = \delta \quad (6)$$

такая, что отображение $f \rightarrow t(f)$ взаимно однозначно, непрерывно и сохраняет порядок.

Обратное к (6) отображение обозначается через $f = f(t)$. С помощью леммы 1 устанавливается, что угол между вектором $f^i - t^i$ и осью абсцисс убывает с ростом i и в некоторой точке $t = t_\gamma$, ломаная $\bigcup_i [f^{i-1}, f^i]$ пересекает ось абсцисс, при этом ломаная непрерывно зависит от γ . Пусть $t = t(\gamma)$ – ближайшая к началу координат справа точка пересечения t_γ . Поскольку угол $A^i(\delta, \gamma)$ – непрерывная монотонная функция от γ , то найдется единственное значение γ^* , при котором $t(\gamma^*) = \underline{f_2}$. Пусть отрезки $[f^{i-1}, f^i]$ построены с использованием числа γ^* и i^* – номер, при котором $\gamma^* \in [f^{i^*}, f^{i^*+1}]$. Дуга $\widehat{f^3, \underline{f_2}}$ траектории \mathcal{T}_f , двигаясь по которой наблюдатель следит за $t \in [t^3, \underline{t_2}]$, имеет вид

$$\left(\bigcup_3^{i^*-1} [f^i, f^{i+1}] \right) \cup [f^{i^*}, t(\gamma^*)]. \quad (7)$$

Пусть $t^i f^i f^{i+1}, t^{i+1}$ – один из четырехугольников, использованных при построении кусочно-линейной дуги $\widehat{f^3, f_2}$, и угол $\angle f^i f^{i+1} t^{i+1}$ острый. Для точек $t^* \in (t^i, t^{i+1})$, $f^* = f(t^*) \in (f^i, f^{i+1})$ найдем точку q такую, что отрезок $[f^*, q]$ параллелен оси абсцисс, а отрезок $[q, f^{i+1}]$ ортогонален отрезку $[t^*, f^*]$.

Л е м м а 3. *Отображение $t \rightarrow f(t)$, $t \in (t^i, t^{i+1})$ дифференцируемо и*

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t^*} = \frac{\|f^* - f^{i+1}\|}{\|f^* - q\|}. \quad (8)$$

3. Траектория \mathcal{T}_f составлена из дуг $\mathcal{D}_\Delta, \mathcal{D}_\Lambda$, предназначенных для наблюдения за объектом, движущимся по дугам $\Delta = \Delta_i$, и, соответственно, отрезкам $\Lambda = \Lambda_i$ траектории \mathcal{T}_t . Дуга \mathcal{D}_Δ может иметь, в частности, вид (1) или (3), а дуга \mathcal{D}_Λ – вид (1), (4) или (7). Пусть

Φ – совокупность траекторий \mathcal{T}_t указанного вида;

$W(\Delta_i)$ – максимум величины скорости наблюдателя $f = t + \delta V_t$, отслеживающего движение объекта по дуге Δ_i ;

$W(\Lambda_i)$ – наименьший из максимумов величины скоростей движения наблюдателя по дугам (4), (7) слежения за объектом, преодолевающим отрезок Λ_i после дуги Δ_i с большой кривизной;

$W(\mathcal{T}_f)$ – максимум величины скорости наблюдателя, отслеживающего объект на всей траектории \mathcal{T}_t .

Для построения траектории \mathcal{T}_f вычислим величины

$$W(\Delta_i), \quad i = 1, \dots, k; \quad W(\Lambda_i), \quad i = 1, \dots, k - 1,$$

используя (2), (4), (8). Пусть $|V_t| = 1$. На нулевом шаге наблюдатель $f = t + \delta V_t$, стартуя в точке $t_* + \delta V_t$, движется до встречи с дугой Δ_i . На первом шаге наблюдатель следит за движением объекта на объединении $\Delta_1 \cup \Lambda_1$. Имеем два случая:

$$W(\Delta_1) \geq W(\Lambda_1), \quad W(\Delta_1) < W(\Lambda_1).$$

В первом случае наблюдатель f_t , отслеживая движущийся по Δ_1 объект t_t , должен проследовать по дуге $\mathcal{T}_f^{b_1}$ со скоростью V_t , где $b_1 = \frac{t_2 - \bar{t}_1}{\|t_2 - \bar{t}_1\|}$, а далее из дуг (4), (8) он выбирает дугу с меньшей величиной $W(\Lambda_1)$, и с нее следит за $t_t \in \Lambda_1$. Во втором случае наблюдатель следует по дуге $\{f = t + \delta \cdot V_t : t \in \Delta_1 \cup \Lambda_1\}$. Таким образом, $W(\Delta_1 \cup \Lambda_1) =$

$= \min\{W(\Delta_1), W(\Lambda_1)\}$. Первый шаг завершают объект в точке t_2 , а наблюдатель – в точке $f_2 = t_2 + \delta \cdot b_1$. Такая позиция t_λ и f_λ выгодна наблюдателю. Второй шаг алгоритма отличается от первого лишь тем, что наблюдатель вместо дуги \mathcal{T}^b использует дугу $\mathcal{T}^{1,2}$ (см. п. 2b), 2c)). Следующие шаги выполняются по аналогии с первым. Построенную траекторию наблюдателя обозначим через \mathcal{T}_f^* . Имеет место

Т е о р е м а. *Имеет место равенство*

$$\min\{W(\mathcal{T}_f) : \mathcal{T}_f \in \Phi\} = W(\mathcal{T}_f^*).$$

Для двигающегося по траектории \mathcal{T}_f^ наблюдателя, отслеживающего объект, который преодолевает кратчайшую траекторию \mathcal{T}_t с постоянной скоростью V_t , максимум $W(\Delta_i \cup \Lambda_i)$ величины скорости V_f удовлетворяет равенству*

$$W(\Delta_i \cup \Lambda_i) = \min\{W(\Delta_i), W(\Lambda_i)\}, \\ i = 1, \dots, k.$$

4. Случай пространства \mathbb{R}^3 . Для построения дуги, двигаясь по которой наблюдатель может следить за объектом, преодолевающим дугу $\Delta_i = \widehat{t_i, \bar{t}_i}$, найдем точки $q_j \in \overline{\bar{t}_{j-1}, t_j}$ ($j = i, i + 1$), на которых достигается расстояние между скрещивающимися прямыми $\overline{\bar{t}_{j-1}, t_j}$ ($j = i, i + 1$), и обозначим $q = \frac{q_i + q_{i+1}}{2}$. Искомая дуга имеет вид $\{f \in [t, g] : \|f - t\| = \delta, t \in \Delta_i\}$, а $t - f$ – вектор наблюдения. Задачу поиска дуги, с которой наблюдатель может следить за передвигающимся по отрезку $\Lambda_{i-1} = [\bar{t}_{i-1}, t_i]$ объектом, можно свести к двумерной, решая ее в плоскости, которая касается множества G_i в точке t_i и содержит отрезок Λ_{i-1} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berdyshev V.I.* The observer's trajectory following the object passing the obstacle on the shortest curve // Eurasian journal of mathematical and computer applications. 2021. V. 9. № 4. P. 4–16.
2. *Лю В.* Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58.

TRAJECTORY OF THE OBSERVER TRACKING OBJECT MOTION AROUND CONVEX OBSTACLES IN \mathbb{R}^2 AND \mathbb{R}^3

Academician of the RAS V. I. Berdyshev^a

^a *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
Yekaterinburg, Russian Federation*

An autonomous object moving under observation conditions with a constant velocity along the shortest path bypasses an ordered collection of pairwise disjoint convex sets. The task of the observer is to find a trajectory of motion such that at each moment of time he observes the object, is at a given distance from it and moves at a possibly low speed. The paper proposes options for the observer's trajectories with an indication of the speed limit.

Keywords: navigation, autonomous vehicle, trajectory, observer