

УДК 517.977.5

## УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ СКАЛЯРНОМ УПРАВЛЕНИИ ДВУМЯ НЕСИНХРОННЫМИ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

© 2022 г. Л. М. Берлин<sup>1,\*</sup>, член-корреспондент РАН А. А. Галяев<sup>1,\*\*</sup>

Поступило 25.02.2022 г.

После доработки 12.03.2022 г.

Принято к публикации 12.04.2022 г.

Рассматривается задача оптимального управления двумя несинхронными осцилляторами при наличии скалярного ограничения на управление по критерию быстродействия в задаче разгона из состояния покоя. Особенность данной задачи заключается в том, что в терминальный момент фазовые координаты второго осциллятора снова становятся равными нулю. Для заданного количества неизвестных моментов переключения, определяющих оптимальное релейное управление, предложены необходимые условия экстремума в виде нелинейных матричных равенств. Исследование необходимых и достаточных условий экстремума позволило в фазовом пространстве первого осциллятора найти аналитический вид кривой, соответствующей классу двух переключений управления, которая также отделяет множества достижимости класса трех переключений управления.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, гармонический осциллятор, принцип максимума Понтрягина, ограниченное скалярное управление

**DOI:** 10.31857/S2686954322040051

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи с недостатком ресурса управления, когда размерность вектора управления меньше или значительно меньше размерности пространства состояний физической системы, имеют широкое применение на практике. Колебательные системы, такие как электрические контуры, механические системы, квантовые осцилляторы и другие физические системы, управляемые одной внешней силой, являются примерами подобных систем. Математические модели, описывающие динамику различных систем, представляют собой системы несинхронных осцилляторов с ограничением не только на размерность вектора управления, но и на его максимальную амплитуду [1–5]. В результате управления такими системами зачастую необходимо, чтобы одна из подсистем как можно быстрее пришла в требуемое положение, тогда как вторая система должна остаться в состоянии покоя в терминальный момент. Если в каждый осциллятор системы входит отдельное управление, тогда задача оптимального быстродействия может быть решена путем рассмотрения

отдельных одиночных осцилляторов, для которых В.Г. Болтянским в [6] был приведен синтез оптимального управления. Впервые подобные задачи оптимального управления системой многих маятников были исследованы академиком РАН Ф.Л. Черноусько в [1], где приведено доказательство существования решения задач об оптимальном по быстродействию гашении колебаний и об оптимальном по быстродействию разгоне системы маятников с различными частотами колебаний, и указано, что данная задача при некотором соотношении частот осцилляторов была исследована С.А. Михайловым. Условия экстремума в классе  $2N - 1$  переключений управления, где  $N$  – количество осцилляторов, приведены в [5], а синтез асимптотически оптимального управления для системы из произвольного числа линейных осцилляторов при общем ограниченном управлении был представлен в работах [7, 8]. Одним из ключевых вопросов при поиске решения является исследование достижимости и управляемости системы двух несинхронных осцилляторов с ограниченным и скалярным управлением, что может быть показано как на основе геометрической теории управления [9], а именно: теоремы Суссмана-Джарджевича и теоремы Пуанкаре, так и с использованием результата классической теории оптимального управления, теоремы ЛаСалля-Конта [10]. В настоящей работе будут предло-

<sup>1</sup> Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: berlin.lm@phystech.edu

\*\*E-mail: galaev@ipu.ru

жены условия экстремума, при помощи которых удается описать множество достижимости первого осциллятора в системе двух несинхронных осцилляторов, а также выделить в нем подмножества, соответствующие различным классам переключений управления.

## 2. ЗАДАЧА СКАЛЯРНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВУМЯ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

### 2.1. Уравнения ПМП

Рассматривается следующая задача быстрогодействия для системы, состоящей из двух несинхронных осцилляторов:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ -w_1^2 q_1 \\ p_2 \\ -w_2^2 q_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$x = (q_1, p_1, q_2, p_2)^T \in \mathbb{R}^4 = M, \quad u \in [-\varepsilon, \varepsilon] = U,$$

$$x(0) = x_0 = (0, 0, 0, 0)^T, \quad (2)$$

$$x(T_0) = x_{T_0} = (q_1^{T_0}, p_1^{T_0}, 0, 0)^T,$$

$$T_0 = \int_0^{T_0} dt \rightarrow \min. \quad (3)$$

Для исследования задачи (1)–(3) и получения решения применяется принцип максимума Понтрягина (ПМП). Поскольку динамика (1) описывается следующей системой векторных полей

$$\mathcal{F}(x, u) = \{f_1 + uf_2 \mid u \in U\}, \quad (4)$$

$$f_1 = p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} - w_1^2 q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} - w_2^2 q_2 \frac{\partial}{\partial p_2}, \quad (5)$$

$$f_2 = \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2},$$

то упростить запись условий принципа максимума можно, введя неканонические координаты, построенные по векторным полям управляемой системы и их коммутаторам. Соответствующие линейные на слоях кокасательного расслоения гамильтонианы имеют вид

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, f_i(x) \rangle, \quad (6)$$

где  $\lambda$  – элемент кокасательного пространства. Укороченный гамильтониан системы векторных полей (4) записывается в неканонических координатах в следующем виде

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f_1 + uf_2 \rangle = h_1 + uh_2, \quad (7)$$

а условие максимума представляется в виде максимизации (7) по всем допустимым управлениям

$$h_1 + uh_2 \rightarrow \max_{u \in |e|}. \quad (8)$$

Установить соответствие между скобками Пуассона гамильтонианов (6) и скобками Ли соответствующих векторных полей (5) можно при помощи следующей леммы [9]

**Лемма 1.** Пусть  $f_i, f_j \in \text{Vec}(M), i \neq j$ . Тогда:

$$\bullet \{h_{f_i}, h_{f_j}\} = h_{[f_i, f_j]},$$

$$\bullet [\vec{h}_{f_i}, \vec{h}_{f_j}] = \vec{h}_{[f_i, f_j]}.$$

Согласно Лемме 1, можно выписать векторные поля, составляющие алгебру Ли, используя следующие ненулевые скобки Ли:

$$f_3 = [f_1, f_2] = -\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_2},$$

$$f_4 = [f_1, f_3] = -w_1^2 \frac{\partial}{\partial p_1} - w_2^2 \frac{\partial}{\partial p_2},$$

$$f_5 = [f_1, f_4] = w_1^2 \frac{\partial}{\partial q_1} + w_2^2 \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Скобка Ли  $[f_1, f_5]$  в свою очередь является линейной комбинацией векторных полей  $f_2, f_4$ .

$$[f_1, f_5] = w_1^4 \frac{\partial}{\partial p_1} + w_2^4 \frac{\partial}{\partial p_2} =$$

$$= (-w_1^2 w_2^2) f_2 + (-w_1^2 - w_2^2) f_4.$$

Для системы (4) выполнена теорема Суссмана-Джарджевича о сильной достижимости.

**Теорема 1** (Суссман-Джарджевич). Аналитическая система  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  обладает свойством сильной достижимости в точке  $x$  тогда и только тогда, когда размерность идеала алгебры Ли, порожденной системой, совпадает с размерностью пространства состояний

$$\dim \mathcal{L}_0(x) = n.$$

В силу линейной независимости векторов  $f_2, f_3, f_4, f_5$ , их линейная оболочка будет являться следующим идеалом алгебры Ли

$$\mathcal{L}_0(x) = \text{span}\{f_2, [f_1, f_2], [f_1, [f_1, f_2]], [f_1, [f_1, [f_1, f_2]]]\},$$

$\dim \mathcal{L}_0(x) = n$ . Поэтому справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.** Система (1) с ограниченным и скалярным управлением является сильно достижимой.

Выполнение рангового условия управляемости Калмана и равенство нулю собственных значений структурной матрицы динамики системы позволяют применить теорему ЛаСалля-Конти [11] для доказательства леммы

**Лемма 3.** Система (1) с ограниченным и скалярным управлением является глобально управляемой.

Далее, согласно Лемме 1, вычисляются соответствующие скобки Пуассона для системы ПМП:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \{h_u, h_1\} = \{h_1 + uh_2, h_1\} = \\ &= u\{h_2, h_1\} = -u\{h_1, h_2\} = -uh_3, \\ \dot{h}_2 &= \{h_u, h_2\} = \{h_1 + uh_2, h_2\} = \{h_1, h_2\} = h_3, \\ \dot{h}_3 &= \{h_u, h_3\} = \{h_1 + uh_2, h_3\} = \{h_1, h_3\} + u\{h_2, h_3\} = h_4, \\ &\text{т.к. } [f_2, f_3] = 0, \\ \dot{h}_4 &= \{h_u, h_4\} = \{h_1 + uh_2, h_4\} = \{h_1, h_4\} + u\{h_2, h_4\} = h_5, \\ &\text{т.к. } [f_2, f_4] = 0, \\ \dot{h}_5 &= \{h_u, h_5\} = \{h_1 + uh_2, h_5\} = \\ &= \{h_1, h_5\} + u\{h_2, h_5\} = (-w_1^2 w_2^2)h_2 + (-w_1^2 - w_2^2)h_4. \end{aligned}$$

Объединяя все полученные компоненты, формируется вертикальная система ПМП:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -uh_3, \\ \dot{h}_2 = h_3, \\ \dot{h}_3 = h_4, \\ \dot{h}_4 = h_5, \\ \dot{h}_5 = (-w_1^2 w_2^2)h_2 + (-w_1^2 - w_2^2)h_4. \end{cases} \quad (9)$$

2.2. Исследование вертикальной подсистемы

Последние четыре уравнения системы (9) составляют следующую систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{\bar{h}} = A\bar{h}. \quad (10)$$

После замены:  $a = -w_1^2 w_2^2, b = -w_1^2 - w_2^2$ , матрица  $A$  примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Л е м м а 4. Система (10) не имеет первых интегралов в виде линейной комбинации  $h_2, h_3, h_4, h_5$ , но обладает двумя первыми интегралами в виде квадратичных форм:

$$V_1 = \frac{a}{2}h_3^2 - \frac{b}{2}h_4^2 + \frac{1}{2}h_5^2 - ah_4h_2, \quad (11)$$

$$V_2 = -\frac{a}{2}h_2^2 - \frac{1}{2}h_4^2 - \frac{b}{2}h_3^2 + h_5h_3. \quad (12)$$

С л е д с т в и е 1. Из двух первых интегралов (11), (12) можно составить две неотрицательно определенные квадратичные формы:

$$V_1^+ = 2V_1 + 2w_1^2 V_2 = w_2^2(w_1^2 h_2 + h_4)^2 + (h_3 w_1^2 + h_5)^2, \quad (13)$$

$$V_2^+ = 2V_1 + 2w_2^2 V_2 = w_1^2(w_2^2 h_2 + h_4)^2 + (h_3 w_2^2 + h_5)^2. \quad (14)$$

Для поиска решения системы (10) вычисляются собственные значения матрицы, которые равны

$$\lambda_{1,3} = \pm w_1 i,$$

$$\lambda_{2,4} = \pm w_2 i.$$

Поэтому решение  $\bar{h}$  системы (10) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \bar{h} &= c_1 \begin{pmatrix} \cos(w_1 t) \\ -w_1 \sin(w_1 t) \\ -w_1^2 \cos(w_1 t) \\ w_1^3 \sin(w_1 t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(w_1 t) \\ -w_1 \cos(w_1 t) \\ w_1^2 \sin(w_1 t) \\ w_1^3 \cos(w_1 t) \end{pmatrix} + \\ &+ c_3 \begin{pmatrix} \cos(w_2 t) \\ -w_2 \sin(w_2 t) \\ -w_2^2 \cos(w_2 t) \\ w_2^3 \sin(w_2 t) \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -\sin(w_2 t) \\ -w_2 \cos(w_2 t) \\ w_2^2 \sin(w_2 t) \\ w_2^3 \cos(w_2 t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (8), вид оптимального управления определяется функцией  $h_2(t)$ , которая называется функцией переключения управления, следующим образом

$$u^*(t) = \varepsilon \text{sign}(h_2(t)) = \varepsilon \text{sign}(C_1 \cos(w_1 t) + C_2 \sin(w_1 t) + C_3 \cos(w_2 t) + C_4 \sin(w_2 t)). \quad (15)$$

Эта функция определяется однозначно и не может быть равна нулю на целом интервале, за исключением изолированных точек, что приводит к отсутствию особых режимов управления.

3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Управление  $u^*(t)$ , согласно (15), является релейным. Переключения управления происходят в моменты времени  $t_i, i = 1, K - 1$ . Пусть  $\tau_n$  — длительности  $n$ -го интервала постоянства управления,  $n = 1, K$ . Тогда  $u^*(t)$  с  $K - 1$  переключением и  $K \in \mathbb{N}$  интервалами постоянства управления имеет вид, представленный на рис. 1.

Решение системы (1) для двух несинхронных осцилляторов с граничными условиями (2) записывается следующим образом [1, 12]:

$$\begin{cases} q_1(T_0) = \frac{1}{w_1} \int_0^{T_0} \sin(w_1(T_0 - \tau)) u(\tau) d\tau = q_1^{T_0}, \\ p_1(T_0) = \int_0^{T_0} \cos(w_1(T_0 - \tau)) u(\tau) d\tau = p_1^{T_0}, \\ q_2(T_0) = \frac{1}{w_2} \int_0^{T_0} \sin(w_2(T_0 - \tau)) u(\tau) d\tau = 0, \\ p_2(T_0) = \int_0^{T_0} \cos(w_2(T_0 - \tau)) u(\tau) d\tau = 0. \end{cases} \quad (16)$$

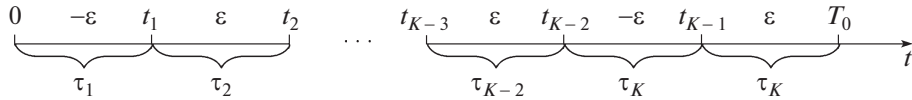


Рис. 1. Вид оптимального управления  $u^*(t)$ .

Учитывая вид оптимального управления  $u^*(t)$ , можно записать решение системы (16) при различных значениях  $K$ . Стоит также отметить, что управление на первом интервале может быть выбрано как  $\epsilon$ , так и  $-\epsilon$ , для чего вводится параметр  $k$ , равный 0 и 1 соответственно.

$$\begin{cases} 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \cos \left( w_1 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \cos \left( w_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = \\ = (-1)^{K-1} + (-1)^{k+1} \frac{q_1^{T_0} w_1^2}{\epsilon}, \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \sin \left( w_1 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \sin \left( w_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = (-1)^k \frac{p_1^{T_0} w_1}{\epsilon}, \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \cos \left( w_2 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \cos \left( w_2 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = (-1)^{K-1}, \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \sin \left( w_2 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \sin \left( w_2 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Функция  $h_2(t)$  равна нулю в моменты времени  $t_i, i = \overline{1, K-1}$ , когда происходят переключения управления.

$$h_2(t_i) = C_1 \cos(w_1 t_i) + C_2 \sin(w_1 t_i) + C_3 \cos(w_2 t_i) + C_4 \sin(w_2 t_i) = 0, \quad i = \overline{1, K-1}. \quad (18)$$

Уравнение (18) в матричной форме имеет вид

$$(C, \Omega_i) = 0, \quad i = \overline{1, K-1}, \quad (19)$$

где

$$C = (C_1, C_2, C_3, C_4), \quad \Omega_i = \begin{pmatrix} \cos(w_1 t_i) \\ \sin(w_1 t_i) \\ \cos(w_2 t_i) \\ \sin(w_2 t_i) \end{pmatrix}.$$

Объединяя все уравнения (19), можно записать следующую систему

$$\begin{pmatrix} \cos(w_1 t_1) & \cos(w_1 t_2) & \dots & \cos(w_1 t_{K-2}) & \cos(w_1 t_{K-1}) \\ \sin(w_1 t_1) & \sin(w_1 t_2) & \dots & \sin(w_1 t_{K-2}) & \sin(w_1 t_{K-1}) \\ \cos(w_2 t_1) & \cos(w_2 t_2) & \dots & \cos(w_2 t_{K-2}) & \cos(w_2 t_{K-1}) \\ \sin(w_2 t_1) & \sin(w_2 t_2) & \dots & \sin(w_2 t_{K-2}) & \sin(w_2 t_{K-1}) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \vec{0}. \quad (20)$$

Поскольку в моменты  $t_i = \sum_{n=1}^i \tau_n$  выполнено (19), то условие невырожденности вектора  $C$  эквивалентно  $K-4$  равенствам

$$\det(\Omega_i, \Omega_{i+1}, \Omega_{i+2}, \Omega_{i+3}) = 0, \quad i = \overline{1, K-4}. \quad (21)$$

Справедлива следующая теорема

**Теорема 2** (Необходимые условия экстремума). Любое решение задачи (1)–(3) в классе релейных управлений (15) удовлетворяет совместной системе (17) и (21).

**Замечание 1.** В случае, когда управление имеет три переключения, а число интервалов постоянства управления равно четырем, для нахождения интервалов  $\tau_i$  достаточно использовать только уравнения системы (17).

**Замечание 2.** В случае, когда  $K-1=4$ , получаем следующее условие невырожденности вектора  $C$

$$\det \begin{pmatrix} \cos(w_1 t_1) & \cos(w_1 t_2) & \cos(w_1 t_3) & \cos(w_1 t_4) \\ \sin(w_1 t_1) & \sin(w_1 t_2) & \sin(w_1 t_3) & \sin(w_1 t_4) \\ \cos(w_2 t_1) & \cos(w_2 t_2) & \cos(w_2 t_3) & \cos(w_2 t_4) \\ \sin(w_2 t_1) & \sin(w_2 t_2) & \sin(w_2 t_3) & \sin(w_2 t_4) \end{pmatrix} = 0. \quad (22)$$

Если  $K-1 > 4$ , получаем  $C_{K-1}^4$  условий невырожденности вектора  $C$

$$\det \begin{pmatrix} \cos(w_1 t_{m_1}) & \cos(w_1 t_{m_2}) & \cos(w_1 t_{m_3}) & \cos(w_1 t_{m_4}) \\ \sin(w_1 t_{m_1}) & \sin(w_1 t_{m_2}) & \sin(w_1 t_{m_3}) & \sin(w_1 t_{m_4}) \\ \cos(w_2 t_{m_1}) & \cos(w_2 t_{m_2}) & \cos(w_2 t_{m_3}) & \cos(w_2 t_{m_4}) \\ \sin(w_2 t_{m_1}) & \sin(w_2 t_{m_2}) & \sin(w_2 t_{m_3}) & \sin(w_2 t_{m_4}) \end{pmatrix} = 0, \quad (23)$$

$m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_4; \quad m_1, m_2, m_3, m_4 = \overline{1, K-1}$ ,

и для нахождения интервалов  $\tau_i$  совместно с (17) можно использовать  $K - 4$  уравнений из набора (23).

Используя теорему 2, можно вычислить все требуемые моменты переключения  $t_i, i = \overline{K-1}$ . Полученные значения позволят определить вектор  $C$  как вектор ядра соответствующего линейного отображения в (20). Отсюда следует еще одно необходимое условие экстремума, которое формулируется в виде следующей леммы.

**Лемма 5.** *Экстремальное управление  $u^*(t)$  с вектором  $C$ , полученным из (20) для случая  $K - 1$  переключения, содержит ровно  $K - 1$  переключение управления.*

**Предложение 1** (Достаточные условия оптимальности). *Существует единственный (с точностью до множителя) вектор  $C$ , определяющий по теореме 1 оптимальное управление  $u^*(t)$ .*

#### 4. ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ ПЕРВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Для иллюстрации полученных теоретических результатов приводится пример, когда управление имеет два, три и четыре переключения для различных конечных состояний первого осциллятора  $(q_1^T, p_1^T)$ . Выбраны следующие параметры системы:

$$\varepsilon = 0.4, \quad w_1 = 1, \quad w_2 = 1.4.$$

В [10] при исследовании зависимости количества классов переключений от значения  $\varepsilon$  наблюдалось обнуление интервала  $\tau_3$  в классе четырех переключений. Обнуление внутреннего интервала приводит к классу двух переключений, для которого справедлива следующая лемма

**Лемма 6.** *В классе двух переключений для интервалов постоянства управления  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  справедливы функциональные зависимости*

$$\begin{aligned} \cos(w_2\tau_1) &= \cos(w_2\tau_3), \\ \text{т.е. } \tau_1 &= \tau_3 + \frac{2\pi n}{w_2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \cos(w_2\tau_2) &= \frac{2\cos^2(w_2\tau_1) - 4\cos(w_2\tau_1) + 3}{5 - 4\cos(w_2\tau_1)}. \end{aligned}$$

Различные классы управления представлены на рис. 2. Голубая и красная области отвечают классу трех переключений с начальным управлением  $\varepsilon, -\varepsilon$  соответственно. Класс четырех переключений представлен оранжевой и зеленой областями с управлением на начальном интервале  $-\varepsilon, \varepsilon$  соответственно. Классы трех переключений управления разделяются между собой параметрическими кривыми, полученными по лемме 5. Обнуление внутреннего интервала управления в

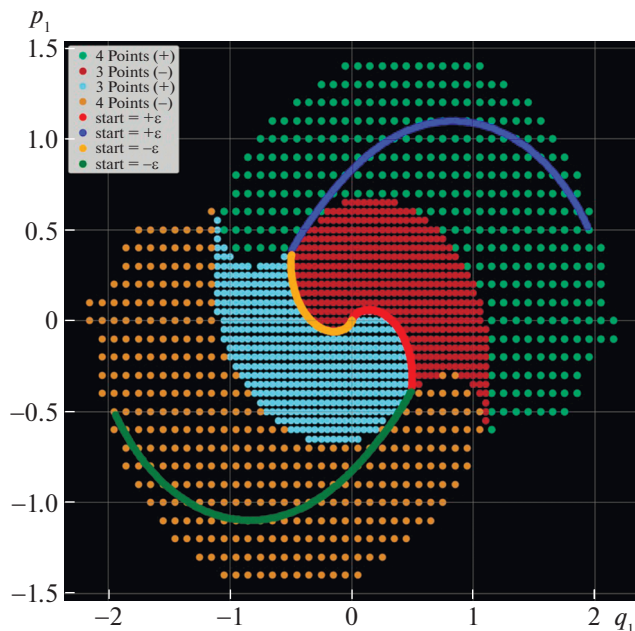


Рис. 2. Точки фазовой плоскости первого осциллятора.

классе четырех переключений приводит к кривым (синяя и зеленая), соответствующим классу двух переключений при различных начальных управлениях. Обнуление крайнего интервала управления в классе трех переключений также приводит к классу двух переключений (оранжевая и красная кривые).

#### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Необходимые условия экстремума задачи оптимального быстрогодействия в системе, состоящей из двух несинхронных осцилляторов, сформулированные в виде Теоремы 1, позволяют найти моменты переключения в любом классе переключений управления. Сформулирована Лемма 5, связывающая получаемое управление с выбранным классом переключений. Для заданных частот и фиксированного ограничения на управление построено множество достижимости на фазовой плоскости первого осциллятора для классов трех и четырех переключений. Получены аналитические выражения для описания кривой класса двух переключений, которая разделяет области трех переключений с различным управлением на начальном интервале. Предложенный в работе подход может быть распространен на системы, состоящие из произвольного числа осцилляторов, в том числе и с учетом произвольных терминальных условий второго и следующих осцилляторов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
2. Andresen B., Hoffmann K.H., Nulton J., Tsirlin A., Salamon P. Optimal control of the parametric oscillator // European Journal of Physics 2011. V. 32. No. 3. P. 827–843.
3. Hoffmann K.H., Andresen B., Salamon P. Optimal control of a collection of parametric oscillators // Physical Review E 2013. V. 87. Iss. 6:062106.
4. Andresen B., Salamon P., Hoffmann K.H., Tsirlin A.M. Optimal Processes for Controllable Oscillators // Automation and Remote Control 2018. V. 79. No. 12. P. 3–15.
5. Галяев А.А. Скалярное управление группой несинхронных осцилляторов // Автоматика и телемеханика 2016. № 9. С. 3–18.
6. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
7. Федоров А.К., Овсеевич А.И. Асимптотически оптимальное управление в форме синтеза для системы линейных осцилляторов // Доклады Академии наук 2013. Том 452 №. 3. С. 266–270.
8. Fedorov A.K., Ovseevich A.I. Asymptotic control theory for a system of linear oscillators // Moscow Mathematical Journal 2016. V. 16. Iss. 3. P. 561–598.
9. Сачков Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления. М.: Ленанд, 2021.
10. Берлин Л.М., Галяев А.А., Лысенко П.В. Геометрический подход к задаче оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2022, С. 1–9. (в печати)
11. La Salle J.P. The Time Optimal Control Problem // Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations (AM-45) 1960. V. 5. P. 1–24.
12. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005.

## EXTREMUM CONDITIONS FOR LIMITED SCALAR CONTROL OF TWO NON-SYNCHRONOUS OSCILLATORS IN THE TIME-OPTIMAL CONTROL PROBLEM

L. M. Berlin<sup>a</sup> and Corresponding member of the RAS A. A. Galyaev<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Institute of Control Sciences of the RAS, Moscow, Russian Federation

The time-optimal control problem of two non-synchronous oscillators with a restriction on a scalar control in the problem of acceleration from rest is considered. For a given number of unknown switching moments that determine optimal relay control, the necessary extremum conditions in the form of nonlinear matrix inequalities are proposed. The study of the necessary and sufficient conditions of the extremum made it possible to find an analytical form of the curve corresponding to the class of two switches in the phase space of the first oscillator.

*Keywords:* optimal control, harmonic oscillator, Pontryagin's Maximum Principle, limited scalar control