ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 505, с. 63–65

МАТЕМАТИКА

УДК 511.36

НОВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

© 2022 г. В. Г. Чирский[1,*]

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 19.05.2022 г.
После доработки 10.06.2022 г.
Принято к публикации 12.06.2022 г.

Приведены теоремы об ограниченной бесконечной линейной независимости значений обобщенных гипергеометрических рядов, параметры которых – трансцендентные полиадические числа Лиувилля. Сформулированы представляющие интерес задачи теории полиадических чисел.

Ключевые слова: полиадические числа Лиувилля, бесконечная линейная независимость, аппроксимации Эрмита-Паде

DOI: 10.31857/S2686954322040075

Символ $ord_p\alpha$ означает степень, в которой простое число p входит в каноническое разложение рационального числа α. p – адическая норма рационального числа α – определяется равенством $|\alpha|_p = p^{-ord_p\alpha}$. Поле p – адических чисел $\mathbb{Q}_p$ – представляет собой пополнение поля рациональных чисел по p – адической норме. Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p – адических чисел по всем простым числам p. Каноническое представление элемента θ кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда $\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z},\ 0 \le a_n \le n.$ Этот ряд сходится по всех полях p – адических чисел. Поэтому его можно рассматривать как бесконечномерный вектор, координаты которого в соответствующем кольце целых p – адических чисел обозначаем $\theta^{(p)}$.

Основы теории полиадических чисел изложены в [1]. Отметим, что эта теория имеет приложения к теории абелевых групп. Кроме того, в ряде прикладных задач используется так называемое факториальное разложение натуральных чисел (оно весьма короткое), представляющее собой частичную сумму ряда θ.

Будем называть полиадическое число θ *полиадическим числом Лиувилля* (или *лиувиллевым полиадическим числом*), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству $p \le P$, выполнено неравенство $|\theta - A|_p < A^{-n}$. Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля p – адических чисел.

Одним из важных направлений в теории трансцендентных чисел является исследование арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических рядов, т.е. рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_s)_n} z^n,$$

где символ Похгаммера $(\gamma)_n$ определяется равенствами $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)$ при $n \ge 1$. Если такие ряды имеют рациональные параметры, то они сводятся к E – или G – функциям Зигеля или к F – рядам. Это позволяет применить к ним метод Зигеля-Шидловского в теории трансцендентных чисел и его модификации. См., например, работы [2–8]. Этот краткий список не претендует на полноту, но позволяет получить представление о характере основных результатов.

Если среди параметров содержатся алгебраические иррациональные числа, то к исследованию арифметических свойств рядов применимы аппроксимации Эрмита-Паде, см., например, [9–11].

Во всех упомянутых выше работах параметры рядов являются алгебраическими числами. В статье описан новый подход к исследованию ариф-

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: vgchirskii@yandex.ru*

метической природы значений обобщенных гипергеометрических рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_m)_n z^n, \tag{1}$$

параметры которых $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ – трансцендентные полиадические числа Лиувилля. Частные случаи этой задачи, относящиеся к рядам

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+1)_n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)_n\lambda^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+1)_n\lambda^n$$

с лиувиллевым полиадическим параметром λ, рассмотрены в работах [12]–[14]. Во всех этих работах, включая и настоящую, существенно использованы аппроксимации Эрмита-Паде из работы Ю.В. Нестеренко [15].

О п р е д е л е н и е. *Бесконечная линейная независимость* полиадических чисел $\theta_1,\ldots,\theta_m$ означает, что для любой ненулевой линейной формы $h_1x_1+\ldots+h_mx_m$ с целыми коэффициентами $h_1,\ldots h_m$ существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство $h_1\theta_1^{(p)}\ldots+h_m\theta_m^{(p)}\neq 0$.

Вместе с тем представляют интерес задачи, в которых рассматриваются простые числа только из некоторых собственных подмножеств множества простых чисел. Будем говорить в таком случае о *бесконечной линейной независимости с ограничениями* на указанное множество. Пусть M – натуральное число. Рассмотрим приведенную систему вычетов по $\operatorname{mod}(M)$. Как обычно, число элементов этой системы обозначается $\varphi(M)$, где $\varphi(M)$ – функция Эйлера. Все простые числа принадлежат объединению арифметических прогрессий с разностью, равной числу M, первые члены которых образуют приведенную систему вычетов по $\operatorname{mod}(M)$. Пусть произвольным образом выбраны ρ различных элементов a_1, ..., a_ρ этой приведенной системы вычетов. Будем обозначать $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho$ множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями $a_i+Mk, i=1,\ldots,\rho, k\in\mathbb{Z}$. Будем обозначать $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho)$ множество простых чисел, входящих в объединение множеств $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho$. В сформулированных ниже теоремах будет доказана бесконечная линейная независимость значений обобщенных гипергеометрических рядов с ограничениями на множество $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho)$. Этот подход был ранее использован в работе Т. Матала-ахо, А.-М. Эрнвалл-Хитонен, Т. Сеппала [16], относящейся к так называемому ряду Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty}n!(-z)^n$.

Еще раз отметим, что цель работы – получение результата о значениях рядов (1), среди параметров которых – трансцендентные полиадические числа Лиувилля.

Сформулируем основные результаты работы. Пусть m – натуральное число, $m\geq 2$. Пусть λ_0 – произвольное натуральное число, большее 1. Положим $s_0=[\exp\lambda_0]+1$. Пусть λ_1 – произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p\leq s_0+2\lambda_0^2$ выполняется неравенство $ord_p\lambda_1\geq ms_0\ln s_0$ и пусть $s_1=[\exp\lambda_1]+1$. При $k\geq 1$ пусть λ_{k+1} – произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p\leq s_k+2\lambda_k^2$ выполняется неравенство $ord_p\lambda_{k+1}\geq ms_k\ln s_k$ и пусть $s_{k+1}=[\exp\lambda_{k+1}]+1$. Пусть $\mu_{i,0}, i=1,\ldots,m$ – натуральные числа. Пусть для любых $i=1,\ldots,m, k\geq 1$, числа $\mu_{i,k}$ – неотрицательные целые и удовлетворяют неравенству $\mu_{i,k}\leq\lambda_k$.

Пусть $\alpha_i=\sum_{l=0}^{\infty}\mu_{i,l}\lambda_l, i=1,\ldots,m.$ Если при некотором k для всех $l\geq k$ выполняются равенства $\mu_{i,l}=0$, то α_i – натуральное число. Иначе этот ряд представляет собой полиадическое число Лиувилля.

Будем рассматривать ряды

$$f_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_m)_n z^n,$$
$$f_i(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1+1)_n\ldots(\alpha_i+1)_n(\alpha_{i+1})_n\ldots(\alpha_m)_n z^n,$$
$$i=1,\ldots,m-1,$$
$$f_m(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1+1)_n\ldots(\alpha_m+1)_n z^n.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть $m\geq 2, M,\rho$ – натуральные числа. Пусть $(m+1)\rho>\varphi(M)m$. Тогда для любых целых чисел $h_0,\ldots h_m$, не равных нулю одновременно и любого натурального числа ξ существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho)$ таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство*

$$|L(\xi)|_p=|h_0f_0(\xi)+\ldots+h_mf_m(\xi)|_p>0.$$

Пусть натуральные числа μ_k удовлетворяют при любом k неравенству $\mu_k\leq\lambda_k$. Пусть $\Xi=\sum_{l=0}^{\infty}\mu_l\lambda_l$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $m \geq 2$, M, ρ *– натуральные числа. Пусть* $(m+1)\rho > \varphi(M)m$. *Тогда для любых целых чисел* $h_0, \ldots h_m$, *не равных нулю, одновременно существует бесконечное множество простых чисел p из множества* $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_\rho)$ *таких, что в поле* $\mathbb{Q}_p$ *выполняется неравенство*

$$|L(\Xi)|_p = |h_0 f_0(\Xi) + \ldots + h_m f_m(\Xi)|_p > 0.$$

В неравенствах заключений теорем символы $f_i(\xi), f_i(\Xi), i = 0, \ldots, m$ означают суммы этих рядов в поле $\mathbb{Q}_p$.

Можно высказать гипотезу о том, что значения рядов, рассмотренных в этих теоремах, линейно независимы в любом поле p – адических чисел, а значение любого рассмотренного в этих теоремах ряда является трансцендентным числом в любом поле p – адических чисел. При определенных естественных условиях на параметры естественно предположить алгебраическую независимость значений этих рядов в любом поле p – адических чисел.

Существующие методы теории трансцендентных чисел в полиадической области не позволяют пока получить такие результаты (с современным состоянием вопроса можно ознакомиться в [8]). Тем не менее планируется применить идеи настоящей работы для развития обобщенного метода Зигеля-Шидловского и получить общие теоремы, подобные теоремам из [8], но для класса рядов, коэффициенты которых – трансцендентные числа. Использование подходов работ [3] и [4] позволит доказать бесконечную алгебраическую независимость значений рядов вида (1) с трансцендентными параметрами.

Еще одно важное направление планируемых исследований – изучение статистических свойств цифр факториальных разложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Постников А.Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971. 416 с.
2. *Шидловский А.Б.* Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. 448 с.
3. *Салихов В.Х.* Критерий алгебраической независимости одного класса гипергеометрических E – функций //Матем. сб. 1990. Т. 181. № 2. С. 189–211.
4. *Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G.* Siegel normality // Ann. Math. 1988. Ser. 127. P. 279–308.
5. *Bombieri E.* On G-functions // Recent Progress in Analytic Number Theory.V. 2. London: Academic Press. 1981. P. 1–68.
6. *Галочкин А.И.* Об алгебраической независимости значений E-функций в некоторых трансцендентных точках // Вестник МГУ. Сер. 1, матем., механ. 1970. № 5. С. 58–63.
7. *Bertrand D., Chirskii V., Yebbou J.* Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. V. 13. № 2. P. 241–260.
8. *Chirskii V.G.* Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019. V. 26. № 3. P. 286–305.
9. *Chudnovsky G.V.* On application of Diophantine approximations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1985. V. 81. P. 7261–7265.
10. *Иванков П.Л.* О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 1. С. 53–62.
11. *Matala-aho T., Zudilin W.*, Euler factorial series and global relations, J. Number Theory. 2018. V. 186. P. 202–210.
12. *Чирский В.Г.* Арифметические свойства рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром // ДАН. 2020. Т. 494. № 2. С. 69–70.
13. *Chirskii V.G.* Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter // Russ. J. Math. Phys. 2021. V. 28. № 3. P. 294–302.
14. *Чирский В.Г.* Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 3. С. 156–167.
15. *Нестеренко Ю.В.* Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 3. С. 39–72.
16. *Ernvall-Hytonen A.-M., Matala-aho T., Seppela L.* Euler's divergent series in arithmetic progressions // J. Integer Sequences. 2019. V. 22. Article 19.2.2. 10 p.

NEW PROBLEMS OF THE THEORY OF TRANSCENDENTAL POLYADIC NUMBERS

V. G. Chirskii[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

Theorems on the bounded infinite linear independence of the values of generalized hypergeometric series whose parameters are transcendental polyadic Liouville numbers are presented. Problems of interest in the theory of polyadic numbers are formulated.

Keywords: polyadic Liouville numbers, infinite linear independence, Hermite-Pade approximations