ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 505, с. 11–13

## МАТЕМАТИКА

УДК 512.55, 514.76

# ДВОЙСТВЕННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЛЕММЫ О ГОМОМОРФИЗМАХ ПОДСТАНОВКИ

© 2022 г. Академик РАН Р. В. Гамкрелидзе[1,2,*], А. В. Овчинников[3,2,**]

Поступило 14.03.2022 г.
После доработки 22.03.2022 г.
Принято к публикации 01.06.2022 г.

В данной заметке известная лемма анализа о гомоморфизмах подстановки сформулирована в виде утверждения о канонической двойственности между семейством всех гладких отображений одного гладкого многообразия в другое и семейством всех гомоморфизмов алгебр гладких скалярных функций на этих многообразиях. Указанная формулировка придает лемме максимальную возможную общность и одновременно явно фиксирует основную симметрию задачи: двойственность между “сопряжением” (переходом от отображений многообразий к гомоморфизмам алгебр гладких функций на них) и “косопряжением” (переходом от гомоморфизмов к отображениям).

*Ключевые слова:* гладкое многообразие, гладкая функция, гомоморфизм, двойственность

**DOI:** 10.31857/S2686954322040099

Настоящая заметка содержит нестандартную формулировку важной нетривиальной леммы анализа о гомоморфизмах подстановки. Лемма сформулирована как каноническая двойственность между семейством $\overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N)$ всех гладких отображений гладкого многообразия $M$ в гладкое многообразие $N$ (многообразия действительные и конечномерные) и семейством $\overleftarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(M),\ C^\infty(N))$ всех гомоморфизмов алгебры гладких скалярных функций $C^\infty(N)$ на $N$ в аналогичную алгебру $C^\infty(M)$ на $M$; стрелки указывают направления действия отображений и гомоморфизмов: если $f \in \overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M, N)$ – гладкое отображение $M \xrightarrow{\ f\ } N$, то каждая гладкая скалярная функция $b \in C^\infty(N)$ может быть “перенесена” на многообразие $M$ по правилу $b \circ f \in C^\infty(M)$, что порождает отображение $C^\infty(N) \xrightarrow{\ f^\sharp\ } C^\infty(M)$, которое будем записывать как $f^\sharp : C^\infty(M) \leftarrow C^\infty(N)$. Принятый нами подход придает лемме максимальную возможную общность и одновременно явно фиксирует в самой формулировке основную симметрию задачи: двойственность между “сопряжением” (переходом от отображений многообразий к гомоморфизмам алгебр гладких функций на них) и “косопряжением” (переходом от гомоморфизмов к отображениям), не делегируя этот решающий для всей рассматриваемой проблемы факт в скрытом виде в длинное доказательство. Мы знакомы с несколькими различными формулировками и независимыми доказательствами леммы (см. [1–4]); приведенное здесь доказательство можно рассматривать как несколько усовершенствованный вариант доказательства из [1].

Симметрия двойственности между семействами $\overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N)$ и $\overleftarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(M),C^\infty(N))$ наглядно передается следующими нестандартными теоретико-множественными обозначениями, которых будем придерживаться в дальнейшем изложении. Мы считаем, что аргументом отображения $f \in \overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M, N)$ является “бесструктурная переменная точка” $q \in M$, и аргумент в этом случае записывается справа от символа отображения, т.е. вместо общепринятого “$q \mapsto f(q)$” будем писать “$q \mapsto qf \in N$” или “$q \mapsto q \cdot f \in N$”. Действие же гомоморфизма $\varphi \in \overleftarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(M),C^\infty(N))$ на “точки” $b \in C^\infty(N)$ функционального пространства $C^\infty(N)$ записывается как “действие слева”: $b \mapsto \varphi b \in C^\infty(M)$ (или $b \mapsto \varphi \cdot b \in C^\infty(M)$) для каждой функции $b \in C^\infty(N)$. Таким образом, действие гомоморфизма $f^\sharp$, со-

[1] Математический институт им.В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия
[2] Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук, Москва, Россия
[3] Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
*E-mail: gam@ipsun.ras.ru
**E-mail: ovchinnikov@viniti.ru

пряженного к отображению $f$, на произвольной функции $b \in C^\infty(N)$ представляется как подстановка (суперпозиция) $f \circ b$:

$$q \cdot f^\sharp b := qf \cdot b = q \cdot f \circ b \quad \forall q \in M,$$
$$\forall b \in C^\infty(N),$$

и вся нетривиальная часть леммы сводится к доказательству обратимости *оператора сопряжения* $\sharp$ и каноническому описанию обратного к нему *оператора косопряжения* $\flat$, канонически спаривающего произвольный гомоморфизм алгебр $\varphi \in \overleftarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$ с соответствующим гладким отображением $\varphi_\flat \in \overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M, N)$.

Л е м м а. *Между семействами* $\overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N)$ *и* $\overleftarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$ *существует естественная двойственность, которая каждому произвольному гладкому отображению* $f \in \overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N)$ *канонически ставит в соответствие сопряженный с ним гомоморфизм алгебр* $f^\sharp \in \overleftarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$ *и, наоборот, произвольному гомоморфизму алгебр* $\varphi \in \overleftarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$ *канонически ставит в соответствие косопряженное с ним гладкое отображение* $\varphi_\flat \in \overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N)$:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N) \xrightarrow{\ \sharp\ } \overleftarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N)), \\ &\overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N) \xleftarrow{\ \flat\ } \overleftarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N)). \end{aligned} \tag{1}$$

*Отображения (операторы)* $\sharp$ *и* $\flat$ *обращают друг друга*:

$$\flat \circ \sharp = \mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N)}, \quad \sharp \circ \flat = \mathrm{id}_{\overleftarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))},$$

*где* $\mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N)}$ *– тождественный оператор*

$$\mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N)} : \overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N) \to \overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N), \quad f \mapsto f,$$

*для любого гладкого отображения* $f \in \overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N)$ *(аналогично для* $\mathrm{id}_{\overleftarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))}$*)*.

Оператор сопряжения $\sharp$ был определен выше; конструкция оператора косопряжения $\flat$ существенно использует результат леммы о “гомоморфизмах вычисления” и приведена далее вместе кратким наброском доказательства.

Рассмотрим алгебру $C^\infty(N)$ гладких скалярных функций на гладком вещественном многообразии $N$. Известно (см. [2]), что всякий гомоморфизм алгебр $\psi \in \overrightarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(N), \mathbb{R})$ является *гомоморфизмом вычисления*, т.е. существует такая однозначно определенная точка $r \in N$, что значение гомоморфизма $\psi$ на произвольной функции $b \in C^\infty(N)$ совпадает со значением функции $b$ в точке $r$:

$$\psi b = rb \quad \forall b \in C^\infty(N).$$

Для произвольной точки $r \in N$ обозначим через $\hat{r}$ гомоморфизм вычисления $C^\infty(N) \to \mathbb{R}$ в точке $r$; тогда сформулированное выше утверждение можно записать в виде формулы

$$\psi \in \overrightarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(N), \mathbb{R}) \Rightarrow \exists! r \in N : \psi = \hat{r}. \tag{2}$$

Пусть теперь $\varphi$ – произвольный гомоморфизм алгебр $C^\infty(N)$ и $C^\infty(M)$, т.е. $\varphi \in \overleftarrow{\mathrm{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$. Докажем существование однозначно определенного отображения $\varphi_\flat$, косопряженного с гомоморфизмом алгебр $\varphi$. Уравнение относительно $\varphi_\flat$ имеет вид

$$q\varphi_\flat \cdot b = q \cdot \varphi b \quad \forall q \in M, \forall b \in C^\infty(N);$$

оно однозначно разрешимо, ибо его правая часть $\varphi b$ при каждом фиксированном $q$ является гомоморфизмом вычисления $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ в некоторой однозначно определенной точке $r_q \in M$; следовательно, полагая

$$q\varphi_\flat := \hat{r}_q \quad \forall q \in M,$$

приходим к завершающему нашу конструкцию тождеству

$$q\varphi_\flat \cdot b = \hat{r}_q b = q \cdot \varphi b$$
$$\forall q \in M, \quad \forall b \in C^\infty(N).$$

Соотношения (1) проверяются очевидным образом. Например, если $\varphi = f^\sharp$, то для произвольной точки $q \in M$ и произвольной гладкой функции $b \in C^\infty(N)$ имеем

$$qf \cdot b = q \cdot f^\sharp b = q \cdot \varphi b = q\varphi_\flat \cdot b,$$

так что $f = \varphi_\flat = (f^\sharp)_\flat$, т.е. $\flat \circ \sharp = \mathrm{id}|_{\overrightarrow{\mathrm{Hom}}(M,N)}$. Аналогично, если $f = \varphi_\flat$, то

$$q \cdot \varphi b = q\varphi_\flat \cdot b = qf \cdot b = q \cdot f^\sharp b,$$

так что $\varphi = f^\sharp = (\varphi_\flat)^\sharp$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В., Вахрамеев С.А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения на векторных расслоениях и хронологическое исчисление // Итоги науки техн. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. 1989. Т. 35. С. 3–107.
2. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 392 с.
3. *Бухштабер В.М., Рис Э.Г.* Кольца непрерывных функций, симметрические произведения и алгебры Фробениуса // Усп. мат. наук. 2004. Т. 59. № 1 (355). С. 125–144.
4. *Кириллов А.А.* Лекции по методу орбит. Новосибирск: Научная книга. 2002. 289 с.

# DUAL FORMULATION OF THE LEMMA ON SUBSTITUTION HOMOMORPHISMS

**Academician of the RAS R. V. Gamkrelidze[a,b] and A. V. Ovchinnikov[c,b]**

[a] *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation*

[c] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

This paper contains a nonstandard formulation of the well-known lemma on substitution homomorphisms stated as the canonical duality between the family of all smooth mappings of one smooth manifold into another and the family of all homomorphisms of algebras of smooth scalar functions on these manifolds. This formulation gives the lemma the maximum possible generality and emphasizes the fundamental symmetry of the problem: the duality between "conjugation" (transition from mappings of manifolds to homomorphisms of algebras of smooth functions on them) and "skew conjugation" (transition from homomorphisms to mappings).

*Keywords:* smooth manifold, differentiable function, homomorphism, duality