ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 505, с. 66–70

МАТЕМАТИКА

УДК 517.938

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ РЕГУЛЯРНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ТИПА ДАНЖУА

© 2022 г. В. З. Гринес[1,*], Д. И. Минц[1,]**

Представлено академиком Д.В. Трещёвым
Поступило 17.03.2022 г.
После доработки 14.05.2022 г.
Принято к публикации 01.06.2022 г.

Рассматриваются регулярные гомеоморфизмы типа Данжуа двумерного тора, которые являются наиболее естественным обобщением гомеоморфизмов Данжуа окружности. Они, в частности, возникают как отображения Пуанкаре, индуцированные на глобальной секущей слоями одномерных ориентируемых неустойчивых слоений некоторых частично гиперболических диффеоморфизмов замкнутых трехмерных многообразий, обладающих двумерными аттракторами. Неблуждающее множество каждого регулярного гомеоморфизма типа Данжуа является множеством Серпинского, и каждый такой гомеоморфизм по определению полусопряжен минимальному сдвигу на двумерном торе. Вводится полный инвариант топологической сопряженности для регулярных гомеоморфизмов типа Данжуа, который характеризуется минимальным сдвигом тора, полусопряженным данному регулярному гомеоморфизму типа Данжуа, с отмеченным не более чем счетным множеством орбит.

Ключевые слова: топологическая классификация, гомеоморфизм типа Данжуа, множество Серпинского

DOI: 10.31857/S2686954322040105

Пусть X – топологическое пространство, $f : X \to X$ – гомеоморфизм. Непустое подмножество M пространства X называется минимальным множеством гомеоморфизма f, если оно замкнуто, инвариантно относительно f (т.е. $f(M) = M$) и не имеет непустых замкнутых инвариантных подмножеств, отличных от M. Если все пространство X является минимальным множеством гомеоморфизма f, то гомеоморфизм f называется минимальным. Хорошо известными примерами минимальных гомеоморфизмов являются минимальные повороты окружности и минимальные сдвиги на двумерном торе[1].

[1] Поворотом окружности называется отображение $R(x) = x + \alpha\ (mod\,1)$. Поворот R является минимальным тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Сдвигом на двумерном торе называется отображение $g(x, y) = (x + \alpha, y + \beta)\ (mod\ 1)$. Сдвиг g является минимальным тогда и только тогда, когда числа α, β и 1 независимы над полем рациональных чисел, т.е. когда $k_1\alpha + k_2\beta$ не является целым числом ни для какой совокупности целых чисел k_1, k_2, кроме $k_1 = k_2 = 0$.

[1] Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Нижний Новгород, Россия
**E-mail: vgrines@yandex.ru*
***E-mail: dmitriyminc@mail.ru*

В [13] впервые рассмотрены гомеоморфизмы окружности без периодических точек, топологически несопряженные с минимальным поворотом. Позднее такие диффеоморфизмы (гомеоморфизмы) окружности были названы диффеоморфизмами (гомеоморфизмами) Данжуа. Неблуждающее множество гомеоморфизма Данжуа минимально и гомеоморфно канторову множеству. Кроме того, каждый такой гомеоморфизм полусопряжен с минимальным поворотом и полный прообраз каждой точки окружности относительно полусопрягающего отображения является либо точкой, либо гомеоморфен замкнутому интервалу. Топологическая классификация гомеоморфизмов Данжуа была получена в [9].

В [10–12] рассмотрены отображения двумерного тора, которые обладают свойствами, характерными для гомеоморфизмов Данжуа окружности. Согласно [11], введем следующее определение.

Определение 1. *Гомеоморфизм $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ называется гомеоморфизмом типа Данжуа, если выполняются следующие условия*:

1. *f полусопряжен некоторому минимальному сдвигу $g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ посредством непрерывного гомо-*

топного тождественному отображения $p:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ (*т.е.* $p\circ f = g\circ p$);

2. *Множество* $B=\{x\in\mathbb{T}^2 : p^{-1}(x)$ *содержит более одной точки*[2]$\}$ *является непустым и счетным*.

Мы будем называть множество B характеристическим множеством гомеоморфизма f. Заметим, что если точка $x\in B$, то все точки ее орбиты относительно отображения g также принадлежат множеству B.

Следует отметить, что прямое произведение двух гомеоморфизмов Данжуа окружности не является гомеоморфизмом типа Данжуа двумерного тора.

Пусть $f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ – гомеоморфизм типа Данжуа. Тогда в силу [11] полный прообраз каждой точки $x\in\mathbb{T}^2$ относительно полусопрягающего отображения p связен и неблуждающее множество гомеоморфизма f является минимальным. Однако в отличие от гомеоморфизмов Данжуа окружности, неблуждающие множества гомеоморфизмов типа Данжуа могут быть не гомеоморфны (в индуцированных топологиях). В настоящей работе выделяется подкласс гомеоморфизмов типа Данжуа двумерного тора (см. определение 2 ниже), неблуждающие множества которых гомеоморфны. Рассматриваемые гомеоморфизмы являются наиболее естественным обобщением гомеоморфизмов Данжуа окружности и допускают полную топологическую классификацию, полученную в теореме 1 ниже.

Определение 2. *Гомеоморфизм типа Данжуа* $f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ *называется регулярным, если полный прообраз каждой точки его характеристического множества относительно полусопрягающего отображения* p *является замкнутым вложенным диском*[3] *и диаметры этих дисков образуют последовательность, сходящуюся к нулю*.

В [10] построен частично гиперболический диффеоморфизм h трехмерного тора $\mathbb{T}^3$, который обладает двумерным аттрактором и получен из алгебраического автоморфизма Аносова посредством бифуркации рождения инвариантной кривой (аналогичные конструкции также рассмотрены в [3, 5, 7]). Согласно [10], одномерное ориентируемое неустойчивое слоение диффеоморфизма h имеет глобальную секущую (двумерный тор), и его слои индуцируют на ней отображение Пуанкаре, являющееся регулярным гомеоморфизмом типа Данжуа.

[2] Под $p^{-1}(x)$ подразумевается полный прообраз точки x.

[3] Под замкнутым вложенным диском подразумевается образ замкнутого диска $D=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2\le 1\}$ относительно вложения $\tau: D\to\mathbb{T}^2$.

Далее опишем топологические свойства неблуждающих множеств регулярных гомеоморфизмов типа Данжуа, на которых основано доказательство результатов настоящей работы.

Определение 3. *Множеством Серпинского на двумерном торе* $\mathbb{T}^2$ *называется множество* $S=\mathbb{T}^2\setminus\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} int\,D_k$, *где* $\{D_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – *семейство множеств со следующими свойствами:*

1. *для каждого* $k\in\mathbb{Z}$ *множество* D_k *является замкнутым вложенным диском*;

2. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} int\,D_k$ *плотно в* $\mathbb{T}^2$;

3. $D_k\cap D_{k'}=\varnothing$ *при* $k\neq k'$;

4. $diam(D_k)$, $k\in\mathbb{Z}$, *образуют последовательность, сходящуюся к нулю*.

Пусть $S=\mathbb{T}^2\setminus\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} int\,D_k$ – множество Серпинского на двумерном торе $\mathbb{T}^2$. Для каждого $k\in\mathbb{Z}$ обозначим через L_k границу множества D_k. Поскольку D_k – это замкнутый вложенный диск, то L_k – это простая замкнутая кривая. Положим $I=S\setminus\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} L_k$. Каждую точку $x\in I$ назовем внутренней точкой множества S, а множество I – множеством внутренних точек множества S.

Пусть Q – стандартный ковер Серпинского на квадрате $V=[0;1]\times[0;1]$ (построение см., например, в [2], стр. 280–281). Определим на $\mathbb{T}^2$ множество C как $\pi|_V(Q)$, где $\pi|_V$ – это ограничение естественной проекции $\pi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{T}^2$ на квадрат V. Тогда множество C является множеством Серпинского. Множество внутренних точек множества C обозначим через I_C. В силу [4, 14], для любого множества Серпинского S существует гомеоморфизм $\theta:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ такой, что $\theta(S)=C$, $\theta(I)=I_C$.

Следующую лемму мы приводим без доказательства.

Лемма 1. *Неблуждающее множество регулярного гомеоморфизма типа Данжуа двумерного тора является множеством Серпинского.*

Согласно [1], отображение $\varphi:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ называется линейным, если его можно представить как суперпозицию алгебраического автоморфизма и сдвига на двумерном торе.

Пусть f_1, f_2 – регулярные гомеоморфизмы типа Данжуа двумерного тора такие, что f_j ($j\in\{1,2\}$) полусопряжен минимальному сдвигу $g_j:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ посредством отображения $p_j:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$; пусть B_j – характеристическое множество гомеоморфизма f_j.

Т е о р е м а 1. *Пусть* f_1, f_2 — *регулярные гомеоморфизмы типа Данжуа двумерного тора. Тогда гомеоморфизмы* f_1 *и* f_2 *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует линейное отображение* $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ *такое, что* $\varphi \circ g_1 = g_2 \circ \varphi$, $\varphi(B_1) = B_2$.

В доказательстве теоремы 1 основным элементом является доказательство достаточности, т.е. построение гомеоморфизма $\psi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, который сопрягает гомеоморфизмы f_1 и f_2 и является модификацией отображения φ. Изложим схему этого построения, состоящую из пяти шагов.

1. Обозначим через S_1 и S_2 неблуждающие множества гомеоморфизмов f_1 и f_2 соответственно, через I_1 и I_2 — множества внутренних точек множеств S_1 и S_2 соответственно. Непосредственно проверяется, что ограничение отображения p_j, $j \in \{1,2\}$, на множество I_j является гомеоморфизмом I_j на образ $p_j(I_j)$.

2. Согласно [4, 14], существуют гомеоморфизмы $\theta_1 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ и $\theta_2 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такие, что $\theta_1(S_1) = C$, $\theta_1(I_1) = I_C$ и $\theta_2(S_2) = C$, $\theta_2(I_2) = I_C$. Тогда отображение $h : I_C \to I_C$, определенное как $h(x) = \theta_2(p_2^{-1}(\varphi(p_1(\theta_1^{-1}(x)))))$, где $x \in I_C$, является гомеоморфизмом.

3. Существует гомеоморфизм $\zeta : C \to C$ такой, что $\zeta(x) = h(x)$ для всех $x \in I_C$. Это следует из равномерной непрерывности отображения h, доказательство которой мы приводим ниже.

Определим отображение $\kappa : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ следующим образом: $\kappa(x) = \theta_1(p_1^{-1}(\varphi^{-1}(p_2(\theta_2^{-1}(x)))))$, где $x \in \mathbb{T}^2$, под $p_1^{-1}(\varphi^{-1}(p_2(\theta_2^{-1}(x))))$ подразумевается полный прообраз множества $\varphi^{-1}(p_2(\theta_2^{-1}(x)))$. Заметим, что $\kappa(x) = h^{-1}(x)$ для всех $x \in I_C$.

Для каждого натурального числа n обозначим через $Q_1^n, \ldots, Q_{8^n}^n$ равные квадраты, получаемые на n-м шаге построения ковра Серпинского Q (см. [2], стр. 280–281), через $K_1^n, \ldots, K_{8^n}^n$ соответственно образы квадратов $Q_1^n, \ldots, Q_{8^n}^n$ под действием отображения $\pi|_V$. Так как $Q \subset \bigcup\limits_{i=1}^{8^n} Q_i^n$ (для каждого $n \in \mathbb{N}$), то $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{8^n} K_i^n$ (для каждого $n \in \mathbb{N}$).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 2$) таким образом, что выполняется неравенство: $diam(K_i^m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Для каждого i определим множество $\tilde{K}_i^m$ следующим образом: $\tilde{K}_i^m = \kappa(K_i^m)$.

Пусть A и B — множества на двумерном торе $\mathbb{T}^2$. Введем расстояние между множествами A и B следующим образом: $dist(A,B) = inf\{\rho(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$, где ρ обозначает расстояние между точками на $\mathbb{T}^2$, индуцированное римановой метрикой.

Для каждого множества $\tilde{K}_i^m$ определим величину d_i следующим образом: $d_i = \min\limits_j(dist(\tilde{K}_i^m, \tilde{K}_j^m))$, где $\tilde{K}_j^m$ — множество, которое не имеет общих точек с множеством $\tilde{K}_i^m$. Выберем $\delta > 0$ так, что $\delta < \min\limits_{i \in \{1,\ldots,8^m\}} d_i$. Любые две точки $x_1, x_2 \in I_C$ такие, что $\rho(x_1, x_2) < \delta$, находятся либо в одном множестве $\tilde{K}_i^m$, либо в двух разных множествах $\tilde{K}_i^m$ и $\tilde{K}_j^m$, имеющих хотя бы одну общую точку. Тогда $h(x_1)$ и $h(x_2)$ лежат либо в одном множестве K_i^m, либо в двух разных множествах K_i^m и K_j^m, имеющих хотя бы одну общую точку. Отсюда и того, что $diam(K_i^m) < \frac{\varepsilon}{2}$, получаем $\rho(h(x_1), h(x_2)) < \varepsilon$. Таким образом, отображение h является равномерно непрерывным на множестве I_C.

4. Определим отображение $\chi : S_1 \to S_2$ следующим образом: $\chi(x) = \theta_2^{-1}(\zeta(\theta_1(x)))$, где $x \in S_1$. Тогда выполняются следующие равенства: $p_2 \circ f_2|_{I_2} = g_2 \circ p_2|_{I_2} = \varphi \circ g_1 \circ \varphi^{-1} \circ p_2|_{I_2} = \varphi \circ g_1 \circ p_1 \circ \chi^{-1}|_{I_2} = \varphi \circ p_1 \circ f_1 \circ \chi^{-1}|_{I_2} = p_2 \circ \chi \circ f_1 \circ \chi^{-1}|_{I_2}$. Таким образом, $\chi \circ f_1|_{I_1} = f_2 \circ \chi|_{I_1}$. Из непрерывности отображений χ, f_1, f_2 и плотности I_1 в S_1 следует, что $\chi \circ f_1|_{S_1} = f_2 \circ \chi|_{S_1}$.

5. Из леммы 1 и равенства $\varphi(B_1) = B_2$ следует, что гомеоморфизм χ продолжается до гомеоморфизма $\psi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такого, что $\psi \circ f_1 = f_2 \circ \psi$.

Таким образом, доказательство достаточности условий теоремы 1 завершено.

Из теоремы 1 вытекает следующий результат.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* f_1, f_2 — *регулярные гомеоморфизмы типа Данжуа двумерного тора такие, что характеристическое множество каждого из них состоит из одной орбиты. Тогда гомеоморфизмы* f_1 *и* f_2 *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует алгебраический автоморфизм* $\eta : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ *такой, что* $\eta \circ g_1 = g_2 \circ \eta$.

Необходимость немедленно следует из теоремы 1. Докажем достаточность.

Пусть O_1 и O_2 — орбиты, являющиеся характеристическими множествами гомеоморфизмов f_1 и f_2 соответственно. Так как $\eta \circ g_1 = g_2 \circ \eta$, то η переводит орбиты g_1 в орбиты g_2. Тогда можно выбрать сдвиг $\gamma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой, что отображение $\varphi = \gamma \circ \eta$ переводит орбиту O_1 в орбиту O_2. По построению отображение φ является линейным отображением. Также отображение φ сопрягает сдвиги g_1 и g_2. Далее достаточность следует из теоремы 1.

Следуя [8], для любого минимального сдвига g и любого множества B, состоящего из n $(n \geq 1)$ орбит g, существует регулярный гомеоморфизм типа Данжуа, который полусопряжен сдвигу g и его характеристическое множество совпадает с множеством B. Из теоремы 1 и работы [8] следует существование стандартного представителя в каждом классе топологической сопряженности регулярных гомеоморфизмов типа Данжуа с характеристическими множествами, состоящими из конечного числа орбит. Авторам неизвестно, построен ли кем-нибудь пример регулярного гомеоморфизма типа Данжуа с характеристическим множеством, состоящим из счетного числа орбит[4].

Т е о р е м а 2. *Для любого минимального сдвига $g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ и любого натурального числа $n \geq 2$ существует континуальное множество попарно топологически несопряженных регулярных гомеоморфизмов типа Данжуа двумерного тора, каждый из которых полусопряжен сдвигу g и имеет характеристическое множество, состоящее из n орбит.*

Поясним идею доказательства теоремы 2.

Пусть $g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ — минимальный сдвиг и $n \geq 2$ — натуральное число. В силу теоремы 1 и работы [8] достаточно показать, что существует континуум множеств B_ν, обладающих следующими свойствами:

1. каждое множество B_ν является объединением n орбит сдвига g.

2. для любых двух множеств B_{ν_1} и B_{ν_2} не существует линейного отображения $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такого, что $\varphi(B_{\nu_1}) = B_{\nu_2}$.

Зафиксируем $n - 1$ произвольных различных орбит $O_1, \ldots, O_{n-1}$ сдвига g и введем множество $B_\nu = \bigcup_{i=1}^{n-1} O_i \cup O_\nu$, где O_ν — орбита сдвига g, отличная от орбит $O_1, \ldots, O_{n-1}$. Непосредственно проверяется, что можно выбрать континуум различных орбит O_ν и, следовательно, континуум различных множеств B_ν таким образом, что множества B_ν удовлетворяют требуемым условиям.

[4] В одномерном случае, в соответствии с [6], можно построить гомеоморфизм Данжуа окружности с характеристическим множеством, состоящим из счетного числа орбит.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Окончательная версия работы выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 21-11-00010) с использованием материалов, полученных ранее при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 17-11-01041). Кроме того, доказательство теоремы 2 было получено при финансовой поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2022-1101.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аров Д.З.* О топологическом подобии автоморфизмов и сдвигов компактных коммутативных групп // УМН. 1963. Т. 18. № 5 (113). С. 133–138.
2. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.
3. *Bonatti C., Viana M.* SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting // Israel J. Math. 2000. V. 115. P. 157–193.
4. *Borsuk K.* On embedding curves in surfaces // Fund. Math. 1966. V. 59. P. 73–89.
5. *Carvalho M.* Sinai–Ruelle–Bowen measures for N-dimensional derived from Anosov diffeomorphisms // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1993. V. 13. № 1. P. 21–44.
6. *Denjoy A.* Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. // J. Math. Pures Appl. 1932. V. 11. P. 333–376.
7. *Horita V., Viana M.* Hausdorff dimension for non-hyperbolic repellers II: DA diffeomorphisms // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2005. V. 13. № 5. P. 1125–1152.
8. *Kwakkel F.* Minimal sets of non-resonant torus homeomorphisms. // Fund. Math. 2011. V. 211. № 1. P. 41–76.
9. *Markley N.G.* Homeomorphisms of the circle without periodic points. // Proc. London Math. Soc. 1970. V. 3. № 20. P. 688–698.
10. *McSwiggen P.D.* Diffeomorphisms of the torus with wandering domains // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 117. № 4. P. 1175–1186.
11. *Norton A., Sullivan D.* Wandering domains and invariant conformal structures for mappings of the 2-torus // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1996. V. 21. № 1. P. 51–68.
12. *Norton A., Velling J.A.* Conformal irregularity for Denjoy diffeomorphisms of the 2-torus // Rocky Mountain J. Math. 1994. V. 24. № 2. P. 655–671.
13. *Poincaré J.H.* Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles (III). // J. Math. Pures Appl. 1885. V. 1. P. 167–244.
14. *Whyburn G.T.* Topological characterization of the Sierpiński curve. // Fund. Math. 1958. V. 45. P. 320–324.

ON TOPOLOGICAL CLASSIFICATION OF REGULAR DENJOY TYPE HOMEOMORPHISMS

V. Z. Grines[a] **and D. I. Mints**[a]
[a] *HSE University, Nizhny Novgorod, Russian Federation*
Presented by Academician of the RAS D.V. Treschev

We consider regular Denjoy type homeomorphisms of the two-dimensional torus which are the most natural generalization of Denjoy homeomorphisms of the circle. In particular, they arise as Poincaré maps induced on global cross-sections by leaves of one-dimensional orientable unstable foliations of some partially hyperbolic diffeomorphisms of closed three-dimensional manifolds. The non-wandering set of each regular Denjoy type homeomorphism is Sierpiński set and each such homeomorphism by definition is semiconjugate to the minimal translation on the two-dimensional torus. We introduce the complete invariant of topological conjugacy for regular Denjoy type homeomorphisms that is characterized by the minimial translation, which is semiconjugate to the given regular Denjoy type homeomorphism, with distinguished at most countable set of orbits.

Keywords: topological classification, Denjoy type homeomorphism, Sierpiński set