ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 505, с. 46–49

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ЛАНДАУ И БЕККЕРА–ПОММЕРЕНКЕ

© 2022 г. О. С. Кудрявцева[1,2,*], А. П. Солодов[1,]**

Представлено академиком Б.С. Кашиным
Поступило 01.04.2022 г.
После доработки 30.04.2022 г.
Принято к публикации 27.05.2022 г.

Получено обобщение неравенств Ландау и Беккера–Поммеренке, лежащих в основе решения задачи о точных областях однолистности на подклассах голоморфных отображений.

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижные точки, угловая производная, область однолистности

DOI: 10.31857/S2686954322040117

ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Поиск области однолистности как для одной голоморфной функции, так и на классе голоморфных функций является классической задачей геометрической теории функций. Длительная история исследования этой задачи накопила разнообразные методы и подходы к ее решению. В настоящей работе мы сосредоточимся на идейно близких подходах Ландау и Беккера–Поммеренке. Успешное решение Ландау задачи о точном радиусе круга однолистности на классе ограниченных голоморфных функций с внутренней неподвижной точкой, а также недавние результаты Беккера, Поммеренке и Солодова об областях однолистности для функций, имеющих неподвижную точку на границе, так или иначе связаны с получением точных неравенств на соответствующих классах. В упомянутых неравенствах оценивается общее значение функции в двух различных точках. В данной работе получены оценки общего значения функции в n различных точках, что может найти применение в теории n-листных функций.

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
[2] *Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия*
**E-mail: kudryavceva_os@mail.ru*
***E-mail: apsolodov@mail.ru*

Пусть $\mathcal{B}$ – класс голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ в себя. Обозначим через $\mathcal{B}[0]$ подкласс функций с внутренней неподвижной точкой $z = 0$, а через $\mathcal{B}\{1\}$ – подкласс функций с граничной неподвижной точкой $z = 1$ и конечной угловой производной $f'(1)$:

$$\mathcal{B}[0] = \{f \in \mathcal{B} : f(0) = 0\},$$
$$\mathcal{B}\{1\} = \{f \in \mathcal{B} : \angle\lim_{z\to1} f(z) = 1,\ \angle\lim_{z\to1} f'(z) = f'(1) < \infty\}.$$

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{B}[0]$ и различные точки $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{D}$ таковы, что $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = c$. Тогда*

$$|c| \le \prod_{k=1}^{n} |a_k|. \tag{1}$$

Неравенство (1) при $n = 1$ – не что иное, как лемма Шварца. При $n = 2$ неравенство (1) было получено Ландау и позволило ему найти единый круг однолистности на классе $\mathcal{B}_M[0] = \{f \in \mathcal{B}[0] : |f'(0)| \ge 1/M\}$, $M > 1$.

Теорема А (Ландау [1]). *Пусть $f \in \mathcal{B}_M[0]$, $M > 1$. Тогда f однолистна в круге $|z| < M - \sqrt{M^2-1}$. При этом для любого $R > M - \sqrt{M^2-1}$ найдется функция $f \in \mathcal{B}_M[0]$, не однолистная в круге $|z| < R$.*

На классе $\mathcal{B}\{1\}$ имеет место неравенство, в некотором смысле аналогичное неравенству (1).

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathcal{B}\{1\}$ и различные точки $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{D}$ таковы, что $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = c$. Тогда*

$$f'(1)\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} \ge \sum_{k=1}^{n}\frac{1-|a_k|^2}{|1-a_k|^2}. \qquad (2)$$

Неравенство (2) при $n = 1$ – это хорошо известная лемма Жюлиа–Каратеодори (см. [2, гл. 1, § 1.4, теорема 1.5]). При $n = 2$ это неравенство было получено Беккером и Поммеренке и применялось ими для нахождения области однолистности для функции $f \in \mathcal{B}\{1\}$.

Т е о р е м а В (Беккер, Поммеренке [3]). *Пусть $f \in \mathcal{B}\{1\}$. Тогда f однолистна в области*

$$\left\{z \in \mathbb{D} : \frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > \frac{f'(1)}{2}\right\}.$$

В [4] показано, что на классе $\mathcal{B}\{1\}$ нет аналога теоремы А, т.е. нет единой области однолистности. Однако ситуация меняется, если рассмотреть сужение класса $\mathcal{B}\{1\}$, добавив, например, условие неподвижности внутренней точки. Горяйнов [5], изучая влияние угловой производной на поведение функции внутри круга, рассмотрел класс $\mathcal{B}[0,1] = \mathcal{B}[0] \cap \mathcal{B}\{1\}$ и показал, что все функции из $\mathcal{B}_\alpha[0,1] = \{f \in \mathcal{B}[0,1] : f'(1) \leqslant \alpha\}$, $\alpha \in (1,2)$, однолистны в некоторой области. Окончательное решение задачи о точной области однолистности на классе функций с двумя неподвижными точками опирается на следующую теорему.

Т е о р е м а 3. *Пусть $f \in \mathcal{B}[0,1]$ и различные точки $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ таковы, что $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = c$. Тогда*

$$f'(1)\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} \ge \sum_{k=1}^{n}\frac{1-|a_k|^2}{|1-a_k|^2} + \frac{\left|1-\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)\right|^2}{1-\left|\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)\right|^2}, \qquad (3)$$

где $\lambda(z) = -z(1-\bar{z})/(1-z)$.

З а м е ч а н и е 1. *В случае $z = 1$ считаем, что* $|1-z|^2/(1-|z|^2) = 0$.

З а м е ч а н и е 2. *Поскольку $|\lambda(z)| = |z|$ для любого $z \in \mathbb{D}$, то в силу теоремы* 1 *верна оценка* $\left|\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)\right| \le 1$. *Это влечет неотрицательность второго слагаемого в неравенстве* (3). *Тем самым, теорема 3 является усилением теоремы 2 на классе* $\mathcal{B}[0,1]$.

Заметим, что отображение λ обладает рядом других интересных свойств, которые подробно изучены в [6]. В частности, в силу равенства

$$\frac{|1-\lambda(c)|^2}{1-|\lambda(c)|^2} = \frac{1-|c|^2}{|1-c|^2}$$

теорема 3 допускает переформулировку в симметричном виде.

Т е о р е м а 3'. *Пусть $f \in \mathcal{B}[0,1]$ и различные точки $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ таковы, что $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = c$. Тогда*

$$f'(1)\frac{|1-\lambda(c)|^2}{1-|\lambda(c)|^2} \ge \sum_{k=1}^{n}\frac{|1-\lambda(a_k)|^2}{1-|\lambda(a_k)|^2} + \frac{\left|1-\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)\right|^2}{1-\left|\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)\right|^2}.$$

Неравенство (3) при $n = 1$ является уточнением леммы Жюлиа–Каратеодори в случае, если имеется дополнительная внутренняя неподвижная точка. При $n = 2$ неравенство (3) фактически было получено Солодовым и использовалось для нахождения точной области однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha[0,1]$.

Т е о р е м а С (Солодов [6]). *Пусть $f \in \mathcal{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,4]$. Тогда f однолистна в области*

$$\mathcal{Y} = \left\{z \in \mathbb{D} : \frac{\left|1-2z+|z|^2\right|}{1-|z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\right\}.$$

Какова бы ни была область $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{U} \subset \mathbb{D}$, найдется функция $f \in \mathcal{B}_\alpha[0,1]$, не однолистная в области $\mathcal{U}$.

З а м е ч а н и е 3. *Неравенства* (1), (2) *и* (3) *точные и достигаются на произведениях Бляшке порядка n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТОВ

В этом разделе мы докажем теоремы 1–3.

Доказательство теоремы 1. По функции $f \in \mathcal{B}[0]$ составим дробно-линейное преобразование

$$g(z) = \frac{f(z)-c}{1-\bar{c}f(z)}.$$

Очевидно, что $g \in \mathcal{B}$, причем $g(a_1) = \ldots = g(a_n) = 0$. Тогда в силу леммы Шварца–Пика (см. [7, гл. VIII, § 1]) функция g представима в виде

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n}\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}h(z),$$

где $h \in \mathcal{B}$, либо h – тождественная константа, по модулю не превосходящая единицы. Полагая в этом представлении $z = 0$, получаем $-c = \prod_{k=1}^{n}a_k h(0)$, откуда следует доказываемое неравенство.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f \in \mathcal{B}\{1\}$. Тогда функция

$$g(z) = \frac{1-\bar{c}}{1-c}\frac{f(z)-c}{1-\bar{c}f(z)}$$

также принадлежит классу $\mathcal{B}\{1\}$, причем $g(a_1)=\ldots=g(a_n) = 0$. Согласно лемме Шварца—Пика функция g допускает следующее представление:

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n}\frac{1-\bar{a}_k}{1-a_k}\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}h(z),$$

где $h \in \mathcal{B}\{1\}$, либо $h(z) \equiv 1$. Если $h(z) \equiv 1$, имеем равенство в (2). Если $h \in \mathcal{B}\{1\}$, функция

$$h(z) = \prod_{k=1}^{n}\frac{1-a_k}{1-\bar{a}_k}\frac{1-\bar{a}_k z}{z-a_k}\frac{1-\bar{c}}{1-c}\frac{f(z)-c}{1-\bar{c}f(z)}$$

имеет в точке $z = 1$ положительную угловую производную. С другой стороны,

$$h'(1) = f'(1)\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1-|a_k|^2}{|1-a_k|^2}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $f \in \mathcal{B}[0,1]$. Как и при доказательстве теоремы 2, рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1-\bar{c}}{1-c}\frac{f(z)-c}{1-\bar{c}f(z)}$$

из класса $\mathcal{B}\{1\}$ со свойством $g(a_1) = \ldots = g(a_n) = 0$. Более того, $g(0) = \lambda(c)$ и угловая производная в точке $z = 1$ имеют вид

$$g'(1) = f'(1)\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2}. \tag{4}$$

В силу леммы Шварца—Пика функция g допускает представление

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n}\frac{1-\bar{a}_k}{1-a_k}\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}h(z), \tag{5}$$

где $h \in \mathcal{B}\{1\}$, либо $h(z) \equiv 1$. Если $h(z) \equiv 1$, имеем равенство в (3). Пусть $h \in \mathcal{B}\{1\}$. Из (5) видно, что $g(0) = \prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)h(0)$. Следовательно,

$$h(0) = \frac{\lambda(c)}{\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)}. \tag{6}$$

Из (4) и (5) находим значение угловой производной функции h в точке $z = 1$

$$h'(1) = f'(1)\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1-|a_k|^2}{|1-a_k|^2}. \tag{7}$$

Поскольку $h \in \mathcal{B}\{1\}$, то согласно лемме Жюлиа—Каратеодори имеет место неравенство

$$\frac{|1-h(0)|^2}{1-|h(0)|^2} \le h'(1). \tag{8}$$

Учитывая (6)—(8), получаем оценку

$$\frac{\left|1-\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)\right|^2}{1-\left|\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)\right|^2} \le f'(1)\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1-|a_k|^2}{|1-a_k|^2}.$$

Теорема доказана.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность П.А. Бородину за полезные обсуждения данной темы на семинаре по геометрической теории приближений.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00131) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Landau E.* Der Picard—Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. 1926. V. 32. P. 467—474.
2. *Ahlfors L.V.* Conformal invariants: Topics in geometric function theory. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.
3. *Becker J., Pommerenke Ch.* Angular derivatives for holomorphic self-maps of the disk // Comput. Methods Funct. Theory. 2017. V. 17. 487—497.
4. *Кудрявцева О.С., Солодов А.П.* Двусторонние оценки областей однолистности классов голоморфных отображений круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 7. 120—144.
5. *Горяйнов В.В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 3. 54—71.
6. *Солодов А.П.* Точная область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 5. 190—218.
7. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

GENERALIZATION OF LANDAU AND BECKER–POMMERENKE INEQUALITIES

O. S. Kudryavtseva[a,b] and A. P. Solodov[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

[b] *Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

A generalization of Landau and Becker–Pommerenke inequalities which are used in solving of the problem of sharp domains of univalence on subclasses of holomorphic maps is obtained.

Keywords: holomorphic map, fixed points, angular derivative, domain of univalence