ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 505, с. 42–45

МАТЕМАТИКА

УДК 517.545

О ПРИБЛИЖЕННОМ СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ПУАНКАРЕ В МОДЕЛИ ШОТТКИ

 С. Ю. Лямаев

Представлено академиком РАН Е.Е. Тыртышниковым
Поступило 09.01.2022 г.
После доработки 16.04.2022 г.
Принято к публикации 12.05.2022 г.

Предложены модификации алгоритмов Богатырёва и Шмиза для приближенного суммирования рядов Пуанкаре в модели Шоттки вещественных гиперэллиптических кривых, позволяющие сократить число суммируемых членов без потери точности.

Ключевые слова: группы Шоттки, тета-ряды Пуанкаре, униформизация, вещественные гиперэллиптические кривые, римановы поверхности

DOI: 10.31857/S2686954322040129

Зафиксируем натуральное число g и разбиение $\{1,2,\ldots,g\} = \Sigma^+ \sqcup \Sigma^-$. На g непересекающихся отрезках положительной полуоси как на диаметрах построим окружности $C_1,\ldots,C_g$. Нумерация окружностей – слева направо. На всякой окружности C_j отметим пару точек: при $j \in \Sigma^+$ отметим точки пересечения с вещественной осью $c_j \pm r_j$, при $j \in \Sigma^-$ – произвольную пару комплексно сопряженных точек $c_j \pm ir_j$. Обозначим за G_j дробно-линейную инволюцию, оставляющую на месте каждую из отмеченных на C_j точек. Отображение G_j переводит внешность окружности C_j в ее внутренность, следовательно, гиперболическое преобразование $S_ju := G_j(-u)$ переводит внешность окружности $C_{-j} := -C_j$ во внутренность C_j. Преобразования $S_1,\ldots,S_g$ свободно порождают группу Шоттки, которую обозначим за $\mathfrak{S}$. Ее стандартная фундаментальная область $\mathcal{F}$ – это внешность $2g$ окружностей $C_{\pm1},\ldots,C_{\pm g}$ в сфере Римана. Факторпространство $\overline{\mathcal{F}}/\sim$, где отношение эквивалентности склеивает пары окружностей C_{-j}, C_j посредством преобразований S_j, $1 \le j \le g$, является вещественной гиперэллиптической кривой рода g с k вещественными и k ковещественными овалами, где $k := |\Sigma^+| + 1$, – и всякая такая кривая может быть получена в результате проделанной геометрической конструкции [2].

Эффективная теория функций на кривой в модели Шоттки строится на основе тета-рядов Пуанкаре. Так, ключевой объект теории – нормированный абелев дифференциал третьего рода η_{zw} с полюсами в точках $z, w \in \overline{\mathcal{F}}$ – получается усреднением по группе Шоттки рационального дифференциала на римановой сфере:

$$\eta_{zw}(u) = \sum_{S\in\mathfrak{S}} \left(\frac{1}{Su - z} - \frac{1}{Su - w} \right) d(Su).$$

Этот линейный ряд Пуанкаре абсолютно сходится, поскольку фундаментальная область $\mathcal{F}$ удовлетворяет критерию Шоттки. Настоящее сообщение – о приближенном вычислении суммы такого ряда на компьютере. Вся техника прямо переносится и на другие бесконечные суммы и произведения, которыми записываются теоретико-функциональные объекты на кривой в модели Шоттки.

Введем обозначения $\sigma_j := \pm 1$ при $j \in \Sigma^\pm$ и $S_{-j} := S_j^{-1}$, $c_{-j} := -c_j$, $r_{-j} := r_j$, $\sigma_{-j} := \sigma_j$ при $1 \le j \le g$. Справедлива формула

$$S_ju = c_j - \frac{\sigma_j r_j^2}{u + c_j}, \quad j \in \Xi := \{\pm1,\ldots,\pm g\}.$$

Группа Шоттки $\mathfrak{S}$ есть множество несократимых слов алфавита $\{S_j \mid j \in \Xi\}$ с операцией конкатенации. Обозначим за $|S|$ количество букв в несократимой записи слова $S \in \mathfrak{S}$. Определим на $\mathfrak{S}$ отно-

Институт вычислительной математики Российской академии наук им. Г.И. Марчука, Москва, Россия
E-mail: sergei.lyamaev@gmail.com

шение строгого частичного порядка: $S < T$, если $T = QS$, где $Q \neq id$ и $|T| = |Q + |S|$.

Граф Кэли группы Шоттки имеет вид бесконечного дерева, вершины которого взаимно-однозначно соответствуют элементам группы. Всякая вершина S соединена ребрами с вершинами S_jS, $j \in \Xi$. Корень – вершина, отвечающая тождественному преобразованию id. Множество $\{S \in \mathfrak{S} : |S| = n\}$ будем называть n-м уровнем дерева. Вершины, соединенные с S ребром и лежащие на следующем уровне по сравнению с S, – это дети вершины S. При $S \neq \mathrm{id}$ имеется одна вершина, соединенная с S ребром и лежащая на предыдущем уровне, – будем называть ее родителем S. Назовем вершины братьями, если у них общий родитель. Если $T < S$, то вершину S будем называть потомком вершины T, а вершину T – предком вершины S.

Для приближенного суммирования ряда Пуанкаре из бесконечного дерева Кэли нужно выделить конечное поддерево $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, сумма по которому хорошо приближает точное значение. Скорость убывания членов ряда вдоль разных ветвей дерева Кэли значительно отличается, поэтому суммировать по нескольким первым уровням, взятым целиком, неэкономично. Для выделения конечного поддерева известны два эффективных подхода: алгоритм А.Б. Богатырёва [1, 2] и алгоритм М. Шмиза [3].

Существуют также другие подходы к вычислению теоретико-функциональных объектов в модели Шоттки, не связанные с непосредственным суммированием рядов Пуанкаре: метод В. Митюшева, Н. Рылко [4, 5] и метод Д. Крауди, Дж. Маршалла, Н. Трефтена [6]. В рамках настоящей работы сравнение с этими методами не проводилось.

Пусть точки $u, z, w \in \overline{\mathcal{F}}$ лежат в разных орбитах действия группы $\mathfrak{S}$. Можем оценить

$$\left|\frac{\eta_{zw}(u)}{du} - \sum_{S \in \mathfrak{T}} f(S)\right| \leq \Upsilon \sum_{S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}} |S'u|,$$

где $f(S) := ((Su - z)^{-1} - (Su - w)^{-1})S'u$ – это член ряда, Υ – сумма обратных расстояний от точек z и w до орбиты точки u. Пусть для каждого $T \in \mathfrak{S}$ известно число $\Phi(T)$ такое, что

$$\sum_{S \in \mathfrak{S} : S > T} |S'u| / |T'u| \leq \Phi(T).$$

Для простоты потребуем, чтобы $\Phi(T)$ зависело только от первой слева буквы в несократимой записи слова T.

Алгоритм Богатырёва имеет апостериорную оценку точности. В каждый момент будем хранить в памяти путь от корня дерева Кэли до текущей вершины T вместе со значениями Su и $S'u$ для всякой вершины S на этом пути. При вычислении значений Tu и $T'u$ для текущей вершины используем сохраненные в памяти значения для родительской вершины. Прибавим член ряда, отвечающий текущей вершине к приближенному значению суммы. Если число $\Omega(T) := \Phi(T)|T'u|$ не меньше заранее выбранного малого параметра μ, то продолжим движение по текущей ветви дерева Кэли – перейдем от вершины T к наибольшему в лексикографическом порядке ее ребенку. В противном случае исключим из счета все поддерево потомков вершины T и сместимся на соседнюю ветвь – перейдем к наибольшей в лексикографическом порядке вершине среди детей предков вершины T, меньших чем T в лексикографическом порядке. Если такой вершины нет, алгоритм останавливается – оценка погрешности равна сумме значений $\Omega(S)$ по всем листьям S поддерева просуммированных вершин $\mathfrak{T}$. Стартует алгоритм с корня дерева Кэли.

Алгоритм Шмиза имеет априорную оценку точности и является жадным алгоритмом: на каждой итерации прибавляется вершина с наибольшей оценкой вклада в сумму. Реализовать эту идею можно, например, следующим образом. В каждый момент в памяти будем хранить все листья S поддерева просуммированных вершин, для них будем помнить значения Su, $S'u$, $\Omega(S)$ и первую слева букву в несократимой записи слова S. На каждой итерации из памяти удаляется вершина T с максимальным значением $\Omega(T)$, вместо нее в память помещаются все ее дети и прибавляются к приближенному значению суммы. Текущая оценка погрешности равна сумме значений $\Omega(S)$ по всем сохраненным в памяти вершинам S – алгоритм останавливается, как только она становится меньше требуемого значения ε.

В обоих алгоритмах поддерево просуммированных вершин $\mathfrak{T}$ заранее неизвестно и формируется непосредственно в процессе счета. Если за μ в алгоритме Богатырёва положить минимальное значение $\Omega(\cdot)$ среди всех нелистовых вершин поддерева, по которому просуммировал алгоритм Шмиза, то при условии, что в дереве Кэли есть только одна вершина с таким значением, алгоритм Богатырёва просуммирует ровно по тому же поддереву.

Заметим, что в обоих алгоритмах на основании значения $\Omega(T)$ принимается решение об учете в сумме сразу всех детей T. Это приводит к тому, что часть листьев поддерева просуммированных вершин $\mathfrak{T}$ вносит пренебрежимо малый вклад в сумму. При этом листовых вершин при $\mathfrak{T} \supset \{S \in \mathfrak{S} : |S| < n\}$, $n \to \infty$ и $g > 1$ в $2g - 2$ раз больше, чем нелистовых. Особенно много неэффективной работы алгоритмы производят в ситуациях, когда какие-либо из граничных окружностей фундаментальной области очень близки друг к другу – в этом случае в поддереве просуммированных вершин будут присутствовать длинные ветви, у большинства вершин которых ровно один из $2g-1$ детей вносит весомый вклад в сумму.

Предложим модификации алгоритмов на основе следующей идеи: решение об учете в сумме будем принимать по отдельности для каждого ребенка S_jT вершины T с использованием оценки

$$\left|\frac{(S_jT)'u}{T'u}\right| = \frac{r_j^2}{|Tu+c_j|^2} \le \frac{r_j^2}{\rho^2(C_t,-c_j)} =: \Lambda_{jt},$$

где $t \neq j$ – индекс первой слева буквы S_t несократимого слова $T \neq id$, $\rho(\cdot,\cdot)$ – евклидово расстояние. Положим

$$\Psi(S_jT) := (\Phi(S_jT)+1)\begin{cases}\Lambda_{jt}, & T \neq \mathrm{id},\\ r_j^2/|u+c_j|^2, & T = \mathrm{id}.\end{cases}$$

Будем добавлять ребенка S_jT вершины T в поддерево $\mathfrak{T}$, если $\Theta(S_jT) := \Psi(S_jT)|T'u| \ge \mu$, где μ – фиксированный малый параметр. Для братьев T_1 и T_2 введем старшинство: T_1 старше T_2, если $\Psi(T_2) < \Psi(T_1)$. Обозначим за $\mathfrak{B}(S)$ множество, состоящее из самой вершины S и ее младших братьев. Для несократимых слов T_1 и T_2, у которых подслова из $n \ge 1$ первых справа букв являются братьями, определим старшинство так: T_1 старше T_2, если указанное подслово у T_1 старше, чем у T_2.

А л г о р и т м 1. (Модифицированный алгоритм Богатырёва). Зафиксируем $\mu > 0$. Присвоим $\mathtt{sum} := f(\mathrm{id})$ и $\mathtt{err} := 0$. Будем хранить в памяти массив со следующей структурой: в момент перехода в вершину $T = S_{i_{|T|}} \ldots S_{i_2} S_{i_1}$ в n-й ячейке массива при $1 \le n \le |T|-1$ записаны буква S_{i_n} и вектор $h(T_{[n]})$, где $h(S) := (Su, S'u, |S'u|)$, $T_{[n]} := S_{i_n} \ldots S_{i_2} S_{i_1}$. Перейдем в самую старшую вершину первого уровня.

Итерация. Пусть T – вершина, в которую только что перешел алгоритм. Используя $(|T|-1)$-ю ячейку массива, вычислим вектор $h(T)$ и поместим его в $|T|$-ю ячейку вместе с буквой $S_{i_{|T|}}$. Присвоим $\mathtt{sum} := \mathtt{sum} + f(T)$. Найдем следующую вершину рекурсивной процедурой поиска. Вначале за $\mathfrak{U}$ обозначим множество, состоящее из детей вершины T, а также из младших чем вершина T детей ее предков. Пусть S – самая старшая вершина в $\mathfrak{U}$ среди лежащих на максимальном уровне в этом множестве. Если $\Theta(S) \ge \mu$, то поиск закончен – перейдем от T к S. Иначе учтем вершину S и всех ее младших братьев вместе с поддеревьями потомков в оценке погрешности $\mathtt{err} := \mathtt{err} + \sum_{B \in \mathfrak{B}(S)} \Theta(B)$, переобозначим $\mathfrak{U} := \mathfrak{U} \setminus \mathfrak{B}(S)$ и повторим процедуру поиска с новым $\mathfrak{U}$. Если $\mathfrak{U} = \varnothing$, алгоритм останавливается и имеем $|\eta_{zw}(u)/du - \mathtt{sum}| \le \Upsilon \cdot \mathtt{err}$.

А л г о р и т м 2 (Модифицированный алгоритм Шмиза). Выберем целевую точность $\varepsilon > 0$. Присвоим $\mathtt{sum} := f(id)$, $\mathtt{err} := \sum_{j \in \Xi} \Theta(S_j)$ и сохраним в памяти самую старшую вершину первого уровня. Для всякой сохраненной в памяти вершины S будем помнить вектор $h(Q)$, где Q – родитель S, а также $\Theta(S)$ и две первых слева буквы несократимого слова S.

Итерация. Удалить из памяти вершину T с максимальным значением $\Theta(T)$, поместить в память ее старшего ребенка и, если T не самый младший среди братьев, следующего по старшинству брата. Присвоить $\mathtt{sum} := \mathtt{sum} + f(T)$ и $\mathtt{err} :=$ $:= \mathtt{err} - \Theta(T) + \sum_{j \in \Xi:\, S_jT > T} \Theta(S_jT)$. Как только $\mathtt{err} <$ $< \varepsilon/\Upsilon$, алгоритм останавливается.

Перед стартом Алгоритма 1 необходимо вычислить и запомнить значения $\mu/\Psi(S_jT)$ и $\sum_{B \in \mathfrak{B}(S_jT)} \Psi(B)$ для всех комбинаций первых двух слева букв слова S_jT, перед стартом Алгоритма 2 – значения $\Psi(S_jT)$ и $\sum_{j \in \Xi} \Psi(S_jT)$.

Если за μ в Алгоритме 1 положить минимальное значение $\Omega(\cdot)$ по всем вершинам, просуммированным Алгоритмом 2, то при условии, что в дереве Кэли есть только одна вершина с таким значением, Алгоритм 1 просуммирует ровно по такому же поддереву.

Результаты сравнения алгоритмов на шести численных примерах – в табл. 1. В алгоритмах с апостериорной оценкой точности для малого параметра μ, подаваемого на вход, подбиралось максимальное значение, с которым на выходе алгоритма достигается нужная точность ε. Во всех примерах алгоритмы Богатырёва и Шмиза суммировали одинаковое числов вершин N_1, поэтому их результаты объединены в одну колонку. По этой же причине в одну колонку объединены Алгоритмы 1 и 2, для них число просуммированных вершин обозначено за N_2. В качестве $\Phi(T)$ использовалась оценка Бернсайда [3, 7] $\Phi(T) :=$ $:= \lambda_t/(1-\lambda)$, применимая при условии $\lambda < 1$, где $\lambda_l := \sum_{j \in \Xi \setminus \{-l\}} \Lambda_{jl}$, $\lambda := \max_{l \in \Xi} \lambda_l$, t – индекс первой слева буквы в несократимой записи слова $T \neq id$.

Таблица 1. Сравнение алгоритмов

№	N_1	N_2	N_1/N_2
1	9617	7129	1.35
2	43912	17629	2.49
3	52565	17910	2.93
4	14582	2899	5.03
5	23922	2007	11.92
6	15126	398	38.01

Во всех примерах использовались точки $u = -1 + 2i$, $z = 3 + i$ и $w = -2$.

Массивы c и r имеют длину g — в них объединены значения для индексов $1,\ldots,g$. За ε обозначена требуемая оценка точности на выходе алгоритмов. Во всех примерах, кроме третьего, $\sigma_j = 1$, $1 \le j \le g$. Пример 1: $g = 3$, $c = (0.1,\ 0.6,\ 1)$, $r = 0.05 \cdot (1,\ 1,\ 1)$, $\varepsilon = 10^{-10}$. Пример 2: $g = 3$, $c = (0.1,\ 0.9,\ 1)$, $r = (0.05,\ 0.04,\ 0.04)$, $\varepsilon = 10^{-10}$. Пример 3: $g = 4$, $\sigma = (1,-1,-1,1)$, $c = (0.1,\ 0.5,\ 0.8,\ 1)$, $r = 0.01 \cdot (1, 1, 6, 8)$, $\varepsilon = 10^{-10}$, окружность C_2 имеет центр ≈ 0.5610 и радиус ≈ 0.06184, окружность C_3 — центр ≈ 0.8057 и радиус ≈ 0.06027. Пример 4: $g = 8$, $c = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.7, 0.75, 0.9, 1)$, $r = 0.01 \cdot (0.1, 4, 4, 0.1, 0.1, 0.1, 4, 4)$, $\varepsilon = 10^{-7}$. Пример 5: $g = 12$, $c = (0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.52,\ 0.67,\ 0.78,\ 0.84,\ 0.88,\ 0.91,\ 0.96,\ 0.98,\ 1)$, $r = 0.01 \cdot (2,\ 4.5,\ 1,\ 0.8, 3.6, 0.9, 1, 2, 0.5, 0.5, 0.5, 1)$, $\varepsilon = 10^{-4}$. Пример 6: $g = 100$, $c_j = j/100$, $r_j = 10^{-4}$, $1 \le j \le 100$, $\varepsilon = 10^{-10}$.

С изменением точности ε при фиксированных остальных параметрах относительная разница между алгоритмами мало меняется. К примеру, в Примере 4 при $\varepsilon = 10^{-5}$ имеем $N_1/N_2 \approx 5.05$, при $\varepsilon = 10^{-6}$ имеем $N_1/N_2 \approx 4.85$, при $\varepsilon = 10^{-8}$ — $N_1/N_2 \approx 5.00$, при $\varepsilon = 10^{-9}$ — $N_1/N_2 \approx 4.99$.

Предложенные алгоритмы по сравнению с алгоритмами Богатырёва и Шмиза позволяют суммировать меньшее число членов ряда для достижения той же оценки точности на выходе: на десятки процентов в обычных ситуациях и в несколько раз в ситуациях медленной сходимости.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РНФ 21-11-00325. Методология модифицированных алгоритмов разработана при поддержке отделения ИВМ РАН Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 075-15-2019-1624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богатырёв А.Б.* Матем. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 15–50.
2. *Богатырёв А.Б.* Матем. сб. 2003. Т. 194. №‘4. С. 3–28.
3. *Schmies M.,* Numerische Methoden für Riemannsche Flächen und Helikoide mit Henkeln. Ph.D. Thesis, Technische Universität Berlin, 2005.
4. *Mityushev V., Rylko N.* Mathematical and Computer Modelling. 2013. V. 57. P. 1350–1359.
5. *Mityushev V.* Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions, Springer. 2014. P. 827–852.
6. *Crowdy D.G., Marshall J.S.* Comput. Methods Funct. Theory. 2010. V. 10. P. 501–517.
7. *Burnside W.* Proc. London Math. Soc. 1891. V. 23. P. 49–88.

ON THE APPROXIMATE SUMMATION OF POINCARE SERIES IN THE SCHOTTKY MODEL

S. Yu. Lyamaev

Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russia Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.E. Tyrtyshnikov

Modifications of the Bogatyrev and Schmiz algorithms for approximate summation are proposed. Poincaré series in the Schottky model of real hyperelliptic curves, allowing reduce the number of summed terms without loss of precision.

Keywords: Schottky groups, Poincare theta series, uniformization, real hyperelliptic tic curves, Riemann surfaces