ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 505, с. 50–55

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968

ЛУЧЕВАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ АКУСТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ

© 2022 г. Член-корреспондент РАН В. Г. Романов[1,*]

Поступило 27.04.2022 г.
После доработки 23.05.2022 г.
Принято к публикации 24.05.2022 г.

Для линейного уравнения акустики ставится и изучается лучевая постановка обратной задачи об определении трех неизвестных переменных коэффициентов, входящих в это уравнение. Предполагается, что искомые коэффициенты отличаются от заданных постоянных только внутри некоторой ограниченной области. На границе этой области располагаются точечные импульсные источники и приемники акустических сигналов. Временной импульс измеряется в приемниках в некоторой окрестности момента прихода сигнала от источника в приемник. Показывается, что эта информация позволяет однозначно найти все три искомых коэффициента. Алгоритмически исходная задача распадается на три последовательно решаемые задачи. Одна из них, об определении скорости звука, является хорошо известной обратной кинематической задачей, две другие приводят к одной и той же задаче интегральной геометрии на семействе геодезических линий, определяемых скоростью звука.

Ключевые слова: уравнение акустики, акустическая томография, лучевое разложение, обратная кинематическая задача, интегральная геометрия

DOI: 10.31857/S2686954322040142

Задачи акустической томографии были поставлены довольно давно (см., например, работы [1–4]). Исходной мотивацией для них явилось использование звуковых волн для возможной ранней диагностики рака молочной железы. В последнее время, в связи с распространением инфекции COVID-19, методы акустической томографии предложено использовать также для диагностики заболевания легких. Вычислительное моделирование задач акустической томографии выполнено в работах [5–9] (см. также многочисленные цитирования в них). Ниже мы рассматриваем один из возможных вариантов постановки задачи акустической томографии. В рассматриваемой задаче используются точечные импульсные источники возбуждения акустических сигналов расположенные вне той области, в которой разыскиваются переменные коэффициенты уравнения акустики, приемники акустических сигналов, размещены также вне этой области, а временные импульсы измеряются в небольшой окрестности момента прихода сигнала от источника в соответствующий приемник. Поставленная задача относится к классу лучевых обратных задач, введенных в монографии автора [10]. Характерной особенностью таких задач является распадение исходной задачи об определении нескольких коэффициентов на ряд последовательно решаемых задач об определении одного из искомых коэффициентов. В данном случае такими искомыми коэффициентами являются скорость звука $c(x)$, акустическое поглощение $\sigma(x)$ и плотность среды $\rho(x)$. При этом определение $c(x)$ сводится к решению хорошо известной обратной кинематической задачи, а определение $\sigma(x)$ и $\rho(x)$ приводится к решению некоторой задачи интегральной геометрии на семействе геодезических линий конформной римановой метрики, определяемой коэффициентом $c(x)$. В случае, когда $c(x) \equiv 1$, эта задача является обычной задачей рентгеновской томографии.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} &c^{-2}(x)p_{tt} + \sigma(x)p_t - \Delta p - \nabla \ln \rho(x) \cdot \nabla p = \\ &= \delta(x-y)\delta(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^4; \quad p|_{t<0} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

в которой $p = p(x,t)$ – звуковое давление, $c(x) > 0$ – скорость звука, $\sigma(x) \geq 0$ – акустическое поглощение, $\rho(x) > 0$ – плотность среды. Уравнение (1) описывает распространение акустических волн в неоднородной поглощающей среде. Это уравнение лежит в основе акустической томографии. Основная проблема акустической томографии состоит в решении обратной задачи для уравнения (1), а именно, построении коэффициентов

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
**E-mail: romanov@math.nsc.ru*

$c(x)$, $\sigma(x)$ и $\rho(x)$ внутри ограниченной области по заданной вне этой области информации о решениях уравнения (1) на некотором временном интервале $[0, T]$ и для некоторого множества точечных источников y. Ниже, для определенности, рассмотрим следующую модель.

Пусть B_R – шар радиуса R с центром в начале координат, S_R – его граница. Примем, что параметры $c(x)$, $\sigma(x)$, $\rho(x)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями всюду в $\mathbb{R}^3$ (см. ниже дополнительные условия (9)), неизвестны внутри шара B_{r_0}, $R > r_0 > 0$, а вне его постоянны и заданы,

$$\begin{gathered} c(x) = 1, \quad \sigma(x) = 0, \\ \rho(x) = \rho_0 > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash B_{r_0}. \end{gathered} \tag{2}$$

Обозначим через $S_R(y, r_0)$ проекцию шара B_{r_0} на сферу S_R от источника, расположенного в точке $y \in S_R$, т.е. $S_R(y, r_0) = \{x \in S_R \,|\, |x - y| \geq 2\sqrt{R^2 - r_0^2}\}$. Решение задачи (1) обозначим через $p(x, t, y)$, подчеркнув тем самым его зависимость от параметра y. Зафиксируем точки $y \in S_R$ и $x \in S_R(y, r_0)$. Пусть $T_0(x, y) := \sup\{\tau > 0 \,|\, p(x, t, y) \equiv 0, t \in (0, \tau)\}$.

Рассмотрим следующую постановку задачи акустической томографии (АК).

Задача АК. Пусть $p(x, t, y)$ – решение задачи (1) и известна функция

$$\begin{gathered} F(x, t, y) = p(x, t, y) \quad \text{для всех} \quad y \in S_R, \\ x \in S_R(y, r_0), \quad t \in (0, T_0(x, y) + \varepsilon), \end{gathered} \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$ фиксировано и произвольно мало. По функции $F(x, t, y)$ требуется найти $c(x)$, $\sigma(x)$, $\rho(x)$ внутри B_{r_0}.

Введением новой функции $u(x, t, y) = p(x, t, y)\rho^{1/2}(x)$ задача (1) при $y \in S_R$ преобразуется к виду

$$\begin{gathered} Lu \equiv c^{-2}(x)u_{tt} + \sigma(x)u_t - \Delta u + q(x)u = \\ = \rho_0^{1/2}\delta(x - y)\delta(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4; \quad u|_{t<0} = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

в которой коэффициент $q(x)$ вычисляется по формуле

$$q(x) = \rho^{-1/2}(x)\Delta\rho^{1/2}(x). \tag{5}$$

Если коэффициент $q(x)$ известен, то, как следует из (5), функция $m(x) = \rho^{1/2}(x)$ может быть найдена внутри B_{r_0} как решение следующей задачи Дирихле

$$\Delta m(x) - q(x)m(x) = 0, \quad x \in B_{r_0}; \quad m|_{r=r_0} = \rho_0^{1/2}, \tag{6}$$

в которой $r = |x|$. Более того, из условия (2) на функцию $\rho(x)$ и условия ее непрерывной дифференцируемости всюду в $\mathbb{R}^3$, следует, что решение задачи (6) должно удовлетворять требованию $\frac{\partial m}{\partial r} = 0$ при $r = r_0$. Это дополнительное условие гарантирует единственность определения функции $m(x)$, следовательно, и $\rho(x)$, по заданной $q(x)$. Поэтому вместо задачи об определении $c(x)$, $\sigma(x)$, $\rho(x)$ в B_{r_0} удобно рассматривать обратную задачу о нахождении в той же области коэффициентов $c(x)$, $\sigma(x)$ и $q(x)$ для уравнения (4) по информации, аналогичной (3):

$$\begin{gathered} \Phi(x, t, y) = u(x, t, y) \quad \text{для всех} \quad y \in S_R, \\ x \in S_R(y, r_0), \quad t \in (0, T_0(x, y) + \varepsilon). \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $\Phi(x, t, y) = F(x, t, y)\rho_0^{1/2}$, а ε фиксировано и произвольно мало.

Подобные задачи рассмотрены к книге [10] для $x \in \mathbb{R}^2$ в следующих случаях:

1) $c(x) \equiv 1$, $\sigma(x)$ и $q(x)$ – неизвестны (раздел 5.2),

2) $\sigma(x) \equiv 0$, $c(x)$ и $q(x)$ – неизвестны (раздел 5.3).

Кроме того, в [10] (в разделе 5.4) рассмотрена двумерная обратная задача электродинамики. В случае, когда свойства среды не зависят от координаты x_3, уравнение для компоненты E_3 вектора электрической напряженности совпадает с уравнением (1), в котором роль функции $\rho(x)$ играет магнитная проницаемость среды, а коэффициент $\sigma(x)$ определяет электрическую проводимость среды. В этой обратной задаче определяются все три неизвестных коэффициента по динамической информации о решениях трех задач Коши, в которых вместо точечного источника $\delta(x - y)$ используется источник типа плоской волны $\delta(x \cdot \nu^{(k)})$, в котором $\nu^{(k)}$ – единичный вектор, и $k = 1, 2, 3$.

Рассмотрим риманову метрику, в которой элемент длины $d\tau$ определяется формулой $d\tau = |dx|/c(x)$, $|dx| = \left(\sum_{k=1}^{3}(dx_k)^2\right)^{1/2}$. Всюду в дальнейшем мы полагаем, что выполнено следующее

П р е д п о л о ж е н и е. Риманова метрика $d\tau = |dx|/c(x)$ является простой в $\mathbb{R}^3$, т.е. любые две точки x и y в пространстве $\mathbb{R}^3$ могут быть соединены единственной геодезической линией $\Gamma(x, y)$.

Заметим, что достаточным условием простоты комформной римановой метрики в $\mathbb{R}^3$ является условие (см. [11]):

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 (\ln c(x))}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j \leq 0, \quad \forall \xi, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

в котором $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Замечание 1. На самом деле, в рамках лучевой постановки обратной задачи, сделанное выше предположение можно ослабить, а именно, требовать простоту римановой метрики нужно только внутри фиксированного шара $B_{R'}$ при $R' > R$. Мы ограничились более жестким предположением, чтобы не делать лишних оговорок в дальнейшем.

Предположим, что существуют конечные числа c_0 и c_{00} такие, что

$$0 < c_0 \leq c(x), \quad x \in \mathbb{R}^3; \quad \|c\|_{C^2(\mathbb{R}^3)} \leq c_{00}, \tag{8}$$

и коэффициенты уравнения (4) обладают следующей гладкостью

$$c \in C^6(\mathbb{R}^3), \quad \sigma \in C^4(\mathbb{R}^3), \quad q \in C^2(\mathbb{R}^3). \tag{9}$$

Обозначим через $\tau(x,y)$ риманово расстояние между точками x и y. С физической точки зрения, $\tau(x,y)$ – время пробега акустического сигнала между точками x и y. Известно, что $\tau(x,y)$ является решением следующей задачи Коши для уравнения эйконала:

$$|\nabla_x \tau(x,y)|^2 = \frac{1}{c^2(x)}; \quad \tau(x,y) \sim \frac{|x-y|}{c(y)}, \quad x \to y. \tag{10}$$

Чтобы найти $\tau(x,y)$ и уравнения геодезических линий, надо поступить следующим образом. Ввести вектор $\eta = \nabla_x \tau(x,y)$, решить задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера

$$\frac{d\xi}{ds} = \eta(\xi)c^2(\xi), \quad \frac{d\eta(\xi)}{ds} = -\nabla \ln c(\xi), \quad \frac{d\tau}{ds} = 1, \tag{11}$$

$$\xi|_{s=0} = y, \quad \eta|_{s=0} = \frac{\nu}{c(y)}, \quad \tau|_{s=0} = 0, \tag{12}$$

для всевозможных значений единичного вектора $\nu = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. Это можно сделать, и притом однозначно, в силу предположения о простоте римановой метрики и условий, наложенных на $c(x)$. В результате решения задачи (11), (12) определяются уравнение геодезических линий $\xi = \xi(s,\nu,y)$, а также касательный вектор $\eta = \eta(s,\nu,y)$ к этой геодезической, и риманово расстояние $\tau = \tau(s,\nu,y)$ вдоль геодезической. Решая уравнение $x = \xi(s,\nu,y)$ относительно s, θ, φ, находим $s = s(x,y)$, $\nu = \nu(x,y)$, т.е. соответствия между парой точек x и y и значениями параметров s и ν. При этом уравнение геодезической $\Gamma(x,y)$ задается равенством $\xi = \xi(s,\nu(x,y),y)$, $s \in [0, s(x,y)]$, а риманово расстояние $\tau(x,y)$, в силу соотношений (11), (12) для этой функции, совпадает с $s(x,y)$. Заметим, что, согласно [10] (см. стр. 35), и сделанному выше предположению о гладкости $c(x)$, функция $\tau^2 \in C^6(\mathbb{R}^6)$.

Для $T > 0$ обозначим через D_T полосу

$$D_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^4 \,||\, t \in [0,T]\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение о простоте римановой метрики и условия* (8), (9). *Тогда решение задачи* (4) *представимо в области* D_T *виде*

$$\begin{gathered} u(x,t,y) = \alpha(x,y)\delta(t-\tau(x,y)) + \\ + [\beta(x,y) + v(x,t,y)]H(t-\tau(x,y)), \quad (x,t) \in D_T, \end{gathered} \tag{13}$$

в котором $H(t)$ – функция Хевисайда: $H(t) = 1$ для $t \geq 0$ и $H(t) = 0$ для $t < 0$, функции $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$ определены при $x \neq y$ равенствами

$$\alpha(x,y) = \frac{c(x)\sqrt{\rho_0 J(x,y)}}{4\pi c^3(y)\tau(x,y)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma(x,y)} c^2(\xi)\sigma(\xi)ds\right), \tag{14}$$

$$\beta(x,y) = \frac{\alpha(x,y)}{2}\int\limits_{\Gamma(x,y)} c^2(\xi)\left(\frac{\Delta\alpha(\xi,y)}{\alpha(\xi,y)} - q(\xi)\right)ds, \tag{15}$$

в которых $\xi \in \Gamma(x,y)$ – промежуточная точка интегрирования, а ds – элемент римановой длины, функция $v(x,t,y)$ непрерывна при $t \geq \tau(x,y)$ и $v(x,t,y) \to 0$ при $t \to \tau(x,y) + 0$. Что представляет собой функция $J(x,y)$, будет объяснено ниже.

Чтобы получить формулы (14), (15), надо вначале найти для них дифференциальные уравнения и начальные условия. Эти уравнения находятся с помощью обычного метода подсчета сингулярной и конечной амплитуд решения задачи (4) (см., например, [10]). Для этого надо положить в (13) $v(x,t,y) \equiv 0$, подставить полученное равенство в (4) и приравнять нулю коэффициенты при $\delta'(t-\tau(x,y))$ и $\delta(t-\tau(x,y))$. В результате этого возникают следующие уравнения

$$2\nabla\alpha \cdot \nabla\tau + \alpha(\sigma + \Delta\tau) = 0, \tag{16}$$

$$2\nabla\beta \cdot \nabla\tau + \beta(\sigma + \Delta\tau) - \Delta\alpha + q\alpha = 0. \tag{17}$$

Для однородной среды с параметрами $c(x) \equiv c(y)$, $\sigma(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0$ имеет место формула

$$u(x,t,y) = \frac{\rho_0^{1/2}\delta(t-\tau_0(x,y))}{4\pi c(y)|x-y|}, \quad \tau_0(x,y) = \frac{|x-y|}{c(y)}.$$

Поэтому $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$ должны удовлетворять следующим условиям при $x \to y$:

$$\alpha(x,y) \sim \frac{\rho_0^{1/2}}{4\pi c(y)|x-y|}, \quad x \to y, \tag{18}$$

$$\beta(x,y) = O(1), \quad x \to y. \tag{19}$$

Уравнения (16), (17) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями вдоль геодезических $\Gamma(x,y)$. Действительно, согласно первому уравнению (11) и принятому обозначению $\eta = \nabla_x\tau(x,y)$, вдоль геодезической $\Gamma(x,y)$ справедливо равенство

$$\nabla\alpha\cdot\nabla\tau = \frac{1}{c^2(x)}\frac{d\alpha}{d\tau}, \qquad (20)$$

в котором $d\tau = ds$ – элемент римановой длины. Удобно преобразовать выражение для $\Delta\tau(x,y)$, входящее в уравнение (17), используя формулу (2.2.35) из книги [10]. Эта формула справедлива вдоль геодезической $\Gamma(x,y)$ и в данном случае имеет вид:

$$\mathrm{d}iv(c^2(x)\nabla_x\tau^2(x,y)) = 6 - 2\tau(x,y)\frac{d\ln J(x,y)}{d\tau}, \qquad (21)$$

в котором

$$J(x,y) = \frac{\partial(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}$$

– якобиан перехода от римановых нормальных координат $(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = \zeta$ к декартовым $(x_1,x_2,x_3) = x$. Напомним, что римановы нормальные координаты ζ с центром в точке y могут быть вычислены по формуле $\zeta(x,y) = -\frac{c^2(y)}{2}\nabla_y\tau^2(x,y)$. Отсюда, в частности, находим, что $J \in C^4(\mathbb{R}^6)$ и $J(x,x) = 1$.

Из формулы (21) следует, что

$$c^2(x)\Delta\tau(x,y) = 2\frac{d}{d\tau}\ln\left(\frac{\tau(x,y)}{c(x)\sqrt{J(x,y)}}\right). \qquad (22)$$

С учетом равенств (20), (22), уравнение (16) преобразуется к виду

$$\frac{d}{d\tau}\ln\left(\frac{\alpha(x,y)\tau(x,y)}{c(x)\sqrt{J(x,y)}}\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma(x,y)}c^2(\xi)\sigma(\xi)ds\right)\right) = 0, \qquad (23)$$

в котором $\xi = \xi(s) \in \Gamma(x,y)$, а ds – элемент римановой длины. Так как $J(x,x) = 1$ и $\tau(x,\ y) \sim |x-y|/c(y)$ при $x \to y$, то из равенств (18), (23) следует формула (14).

Уравнение (17) с помощью равенства (16) можно записать в виде

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\alpha(x,y)}{\beta(x,y)} = \frac{c^2(x)}{2}\left(\frac{\Delta\alpha(x,y)}{\alpha(x,y)} - q(x)\right).$$

Интегрирование этого уравнения с использованием условия (19) приводит к формуле (15). Очевидно, что $(\alpha\tau) \in C^4(\mathbb{R}^6)$, $\beta \in C^2(\mathbb{R}^6)$.

Функция $v(x,t,y)$ является решением задачи Коши:

$$Lv = f(x,t,y), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^4; \quad v|_{t<0} = 0, \qquad (24)$$

в которой оператор L определен формулой (4) и

$$f(x,t,y) = [\Delta\beta(x,y) - q(x)\beta(x,y)]H(t - \tau(x,y)). \qquad (25)$$

Из равенств (24), (25) и конечности скорости звука следует, что $v(x,t,y) \equiv 0$ для $t < \tau(x,y)$, а значит и справедливость представления (13). Кроме того, фундаментальное решение $G(x,t,\xi)$ для уравнения (24), т.е. решение задачи

$$LG(x,t,\xi) = \delta(x-\xi)\delta(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^4; \quad G|_{t<0} = 0,$$

имеет вид

$$G(x,t,\xi) = \rho_0^{-1/2}\alpha(x,\xi)\delta(t - \tau(x,\xi)) + \\ + G_0(x,t,\xi)H(t - \tau(x,\xi)),$$

в котором функция $\alpha(x,y)$ определена формулой (14), а $G_0(x,t,\xi)$ – регулярная непрерывная функция своих аргументов. Для решения задачи (24) справедливо интегральное представление решения в виде

$$v(x,t,y) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^4} f(\xi,t',y)[\rho_0^{-1/2}\alpha(x,\xi)\delta(t - t' - \tau(x,\xi)) + \\ + G_0(x,t-t',\xi)H(t - t' - \tau(x,\xi))]d\xi dt'. \qquad (26)$$

Из формулы (25) следует, что $f(x,t',\xi) = 0$ для $t' \le \tau(x,\xi)$. Поэтому равенство (26) преобразуется к виду

$$v(x,t,y) = \\ = \int\limits_{D(x,y,t)}[\Delta_\xi\beta(\xi,y) - q(x)\beta(\xi,y)]\rho_0^{-1/2}\alpha(x,\xi)d\xi + \\ + \int\limits_{\tau(x,y)}^{t}\int\limits_{D(x,y,t')}[\Delta_\xi\beta(\xi,y) - q(x)\beta(\xi,y)]G_0(x,t-t',\xi)d\xi dt', \qquad (27) \\ t \ge \tau(x,y),$$

в котором $D(x,y,t)$ – множество

$$\{\xi \in \mathbb{R}^3\,|\,\tau(x,\xi) + \tau(\xi,y) \le t\},$$

представляющее собой внутренность риманова эллипсоида с фокусами в точках x и y. При $t \to \tau(x,y)$ этот эллипсоид стягивается к геодезической $\Gamma(x,y)$, а объем множества $D(x,y,t)$ стремится к нулю. Отсюда следует, что $v(x,t,y) \to 0$ при $t \to \tau(x,y)$. Непрерывность функции $v(x,t,y)$ при $t \ge \tau(x,y)$ следует из принадлежности $\beta(x,y)$ пространству $C^2(\mathbb{R}^6)$.

Замечание 2. При выполнения условия (2) справедливы равенства

$$\alpha(x,y) = \frac{\sqrt{\rho_0}}{4\pi|x-y|}, \quad \Delta\alpha(x,y) = 0, \\ \beta(x,y) = 0, \quad \text{если} \quad y \in S_R, \\ 0 < |x-y| \le R - r_0.$$

Воспользуемся теоремой 1 для анализа обратной задачи об определении коэффициентов уравнения (4) по данным (7). Прежде всего, заметим, что эти данные однозначно определяют функцию $\tau(x,y)$ для всех $y \in S_R$ и $x \in S_R(y,r_0)$. Действительно, в силу представления (13), при фиксированных x и y имеет место равенство

$$\tau(x,y) = \sup\{\tau > 0 \,|\, \Phi(x,t,y) \equiv 0, t \in (0,\tau)\} = \\ = T_0(x,y), \quad y \in S_R, \quad x \in S_R(y,r_0). \tag{28}$$

Далее, для тех же x и y по функции $\Phi(x,t,y)$ находятся $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$:

$$\alpha(x,y) = \lim_{t\to\tau(x,y)+0}\int_0^t \Phi(x,\tau,y)d\tau, \\ y \in S_R, \quad x \in S_R(y,r_0), \tag{29}$$

$$\beta(x,y) = \lim_{t\to\tau(x,y)+0}\Phi(x,t,y), \\ y \in S_R, \quad x \in S_R(y,r_0). \tag{30}$$

Доопределим найденные функции на множество $S_R \times S_R$ с помощью формул

$$\tau(x,y) = |x-y|, \quad \alpha(x,y) = \frac{\sqrt{\rho_0}}{4\pi|x-y|}, \\ \beta(x,y) = 0, \quad \text{при} \quad y \in S_R, \quad x \in S_R \backslash S_R(y,r_0).$$

Тогда обратная задача об определении коэффициентов $c(x)$, $\sigma(x)$ и $q(x)$ в B_{r_0} сводится к последовательному решению трех задач: 1) отысканию $c(x)$ по заданной функции $\tau(x,y)$, $(x,y) \in S_R \times S_R$, 2) определению коэффициента $\sigma(x)$ по функции $\alpha(x,y)$, $(x,y) \in S_R \times S_R$, 3) отысканию $q(x)$ по заданной функции $\beta(x,y)$, $(x,y) \in S_R \times S_R$.

Первая из этих задач является обратной кинематической задачей. Оценка устойчивости ее решения найдена в статьях [12, 13]. Эта оценка имеет вид

$$\|c_1 - c_2\|_{L^2(B_R)} \le C\|\tau_1 - \tau_2\|_{H^2(S_R\times S_R)},$$

в котором $c_1(x)$ и $c_2(x)$ – положительные функции, генерирующие простые римановы метрики, $\tau_1(x,y)$ и $\tau_2(x,y)$ – отвечающие им римановы расстояния, а $C = C(c_0, c_{00})$ – некоторая положительная постоянная, зависящая от чисел c_0, c_{00}, введенных в (8). Из приведенной выше оценки вытекает однозначность решения обратной кинематической задачи.

Вторая и третья задачи приводят к идентичной задаче интегральной геометрии. В самом деле, если функция $c(x)$ найдена, то геодезические линии $\Gamma(x,y)$, а также функция $J(x,y)$ становятся известными. Тогда из формулы (14) однозначно находятся интегралы

$$\int_{\Gamma(x,y)} c^2(\xi)\sigma(\xi)ds = g(x,y), \quad (x,y) \in S_R \times S_R, \tag{31}$$

в которых

$$g(x,y) = -2\ln\frac{4\pi\alpha(x,y)\tau(x,y)}{\sqrt{\rho_0 J(x,y)}}.$$

Задача об определении функции $\hat{\sigma}(x) = c^2(x)\sigma(x)$ из уравнения (31) представляет собой задачу интегральной геометрии. Она исследована в работах [13, 14]. Оценка устойчивости решения этой задачи, найденная в цитированных работах, имеет вид, аналогичный оценке для решения обратной кинематической задачи с естественной заменой c и τ на $\hat{\sigma}$ и g соответственно. Решение задачи интегральной геометрии на семействе геодезических, определяемых простой римановой метрикой, единственно. Найдя $\hat{\sigma}(x)$, а следовательно и $\sigma(x)$, можно вычислить по формуле (14) функцию $\alpha(x,y)$ для любых x и y. Тогда из формулы (15) однозначно вычисляются интегралы

$$\int_{\Gamma(x,y)} c^2(\xi)q(\xi)ds = h(x,y), \quad (x,y) \in S_R \times S_R, \tag{32}$$

в которых

$$h(x,y) = \int_{\Gamma(x,y)} c^2(\xi)\frac{\Delta\alpha(\xi,y)}{\alpha(\xi,y)}ds - \frac{2\beta(x,y)}{\alpha(x,y)}.$$

В результате для определения функции $\hat{q}(x) = c^2(x)q(x)$ из уравнения (32) возникает в точности та же задача интегральной геометрии. Решив ее, находим затем и коэффициент $q(x)$. По нему, решая задачу (6), найдем $m(x)$ и, наконец, определим плотность $\rho(x) = m^2(x)$.

Итогом предыдущих рассмотрений является

Т е о р е м а 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *и условия* (2) *обратная задача может иметь только одно решение*.

Алгоритм решения обратной задачи фактически описан выше. В вычислительном отношении требуется, конечно, детализировать схему построения решений обратной кинематической задачи и задачи интегральной геометрии. К сожалению, в настоящее время не существует достаточно обоснованных эффективных алгоритмов и программ решения этих задач.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Norton S.J., Linzer M.* Ultrason. Imaging. 1979. V. 2. P. 154–184.
2. *Karson P.L., Meyer C.R., Scherzinger A.L., Oughton T.V.* Science. 1981. V. 214. P. 1141–1143.
3. *Natterer F., Wubbeling F.* Inverse problems. 1995. V. 11. P. 1225–1232.
4. *Natterer F.* Wave motion. 2008. V. 45. P. 776–784.

5. *Jirik R., Peterlik I., Ruiter N. et al.* IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2012. V. 59. P. 254–264.
6. *Burov V.A., Zotov D.I., Rumyantseva O.D.* Acoust. Phys. 2015. V. 61. P. 231–248.
7. *Baev A.V.* Comp. Math. Model. 2018. V. 29. P. 83–95.
8. *Wiskin J., Malik B., Natesan R., Lenox M.* Med. Phys. 2019. V. 46. P. 2610–2620.
9. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y.* Ultrasonics. 2016. V. 67. P. 136–150.
10. *Романов В.Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005. 296 с.
11. *Romanov V.G.* Eurasian J. of Math. and Comp. Appl. 2014. V. 2. № 3–4. P. 51–80.
12. *Мухометов Р.Г., Романов В.Г.* Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 1. С. 41–44.
13. *Бернштейн И.Н., Гервер М.Л.* Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 2. С. 302–305.
14. *Романов В.Г.* Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. № 2. С. 290–293.

RAY POSING OF THE ACOUSTIC TOMOGRAPHY PROBLEM

Corresponding Member of the RAS V. G. Romanov[a]

[a] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk 630090, Russian Federation*

For the linear acoustic equation a posing of an inverse problem of determination of three unknown variable coefficients entered in this equation is studied. It is assumed that these coefficients differ from given constants inside of a compact domain only. On the boundary of this domain a point pulse sources and acoustic receivers are installed. The acoustic signal is measured by a receiver at a vicinity of the arriving signal time from a source to the receiver. It is demonstrated that this information allows uniquely find all three desired coefficients. The original inverse problem is reduced to tree problems those can be solved successively. One of them is the well known inverse kinematic problem, two others are problems of the integral geometry for a family of geodesic lines determined by the speed of the sound.

Keywords: acoustic equation, acoustic tomography, ray expansion, inverse kinematic problem, integral geometry