

УДК 517.977

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПОВОРОТЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ ВНУТРЕННИХ СИЛ

© 2022 г. Г. М. Розенблат^{1,*}

Представлено академиком РАН В.Ф. Журавлёвым

Поступило 18.04.2022 г.

После доработки 10.05.2022 г.

Принято к публикации 17.05.2022 г.

В статье получен результат, касающийся решения задачи о максимальном повороте твердого тела на заданном интервале времени путем перемещения подвижной внутренней массы. Движения массы реализуются при помощи приложения ограниченной силы. Ранее рассматривались аналогичные задачи, в которых перемещения внутренней массы предполагались кинематическими с ограничениями на скорость точки. Полученный результат описывается аналитическими и легко проверяемыми формулами, оптимальная траектория подвижной массы является спиралью, которая накручивается на центр масс твердого тела с возрастающей до бесконечности частотой.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Л.С. Понтрягина, динамика твердого тела

DOI: 10.31857/S2686954322040154

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача о максимальном угле поворота за заданное время плоского твердого тела при помощи ограниченных внутренних сил, реализуемых в процессе движения внутренней точечной массы.

Более точная постановка задачи следующая. Рассматривается плоское твердое тело, которое может совершать плоское движение и на которое не действуют никакие внешние силы. Внутри этого тела имеет возможность двигаться (в плоскости тела при помощи актюаторов) материальная точка. Перемещение точки осуществляется посредством управляющей внутренней силы, которая ограничена по модулю и может быть ориентирована в произвольном направлении в плоскости движения системы. На координаты и скорости точки (относительно твердого тела) не накладываются никакие ограничения (кроме условий дифференцируемости). Требуется выбрать такой допустимый закон изменения управляющей силы, чтобы повернуть тело на максимальный угол за заданное время.

Ранее подобного рода модели (твердое плоское тело, взаимодействующее с подвижной внутренней массой) рассматривались в качестве при-

меров, иллюстрирующих закон сохранения кинетического момента системы материальных точек (см., например, т. 2, пункт 333 на стр. 38 трактата П. Аппеля [1], учебник Я.В. Татарина [2], задача 45 на стр. 226). Отметим, однако, что движение подвижной массы (насекомого, по терминологии П. Аппеля из [1]) рассматривалось с кинематической точки зрения, т.е. относительная скорость подвижной массы считалась заданной функцией времени (в частности, постоянной). В учебнике [2] ситуация аналогичная. При формулировке таких задач указывалось, что система “тело+точка” в начальный момент находилась в покое, а затем, в момент $t = 0$, точка начинала двигаться с некоторой постоянной относительной скоростью $v = v_0$. Ясно, что переход точки из состояния $v = 0$ в состояние $v = v_0$ не может произойти мгновенно и реализуется при помощи приложения к точке некоторой ограниченной силы. Это обстоятельство приводит к необходимости определенной коррекции как формулировок, так и полученных в [1, 2] ответов к указанным задачам.

В настоящее время аналогичные модели рассматриваются для исследования управляемых робототехнических устройств, предназначенных для перемещения тел при помощи подвижных внутренних масс (см. работы Ф.Л. Черноусько [3–5], А.М. Шматкова [6]). В этих работах также рассматриваются кинематические перемещения внутренних масс, для которых управлением является вектор скорости, реализующий необходимое

¹Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Москва, Россия

*E-mail: gr51@mail.ru

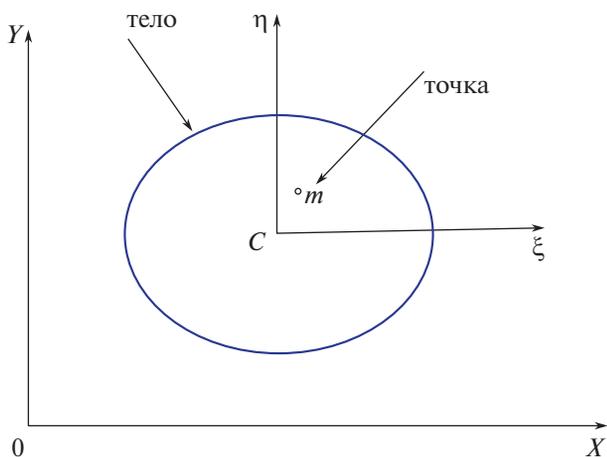


Рис. 1. Тело с движущейся внутренней точечной массой.

оптимальное перемещение объекта (капсюльно-го робота).

В настоящей работе рассмотренные выше модели применяются для оптимального поворота объекта при помощи подвижной внутренней массы, перемещение которой осуществляется ограниченной по модулю управляющей силой.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ, УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На рис. 1 изображено сечение твердого тела, центр масс которого находится в точке \$C\$. \$Oxy\$ – неподвижная система координат, \$C\xi\eta\$ – подвижная поступательная система координат, связанная с центром масс тела. Предполагаем, что оси этих систем координат все время параллельны друг другу. Внутри тела находится материальная точка \$m\$, которая имеет возможность двигаться посредством приложения внутренней силы \$F = (F_x, F_y)^T\$. Для модуля силы \$F\$ должно соблюдаться следующее ограничение

$$F_x^2 + F_y^2 \leq F_0^2. \quad (2.1)$$

Пусть \$m\$ – масса точки; \$M, J\$ – масса тела и его момент инерции относительно центра масс \$C\$ соответственно. Обозначим:

\$x_C, y_C\$ – координаты центра масс \$C\$ тела в системе координат \$Oxy\$; \$\varphi\$ – угол поворота тела относительно неподвижной системы координат \$Oxy\$;

\$\xi, \eta\$ – координаты точки \$m\$ относительно подвижной системы \$C\xi\eta\$.

Учитывая, что при приложении к подвижной точке \$m\$ силы \$F\$, на тело в той же точке пространства действует сила \$F' = -F\$ (согласно третьему

закону Ньютона), запишем уравнения движения центра масс и уравнение кинетического момента тела относительно его центра масс.

$$M\ddot{x}_C = -F_x, \quad M\ddot{y}_C = -F_y, \quad J\ddot{\varphi} = \eta F_x - \xi F_y. \quad (2.2)$$

Движение точки \$m\$ определяется уравнениями второго закона Ньютона.

$$m(\ddot{x}_C + \ddot{\xi}) = F_x, \quad m(\ddot{y}_C + \ddot{\eta}) = F_y. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) получим три уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= \lambda F_x, & \ddot{\eta} &= \lambda F_y, & \ddot{\varphi} &= \mu (\xi \ddot{\eta} - \eta \ddot{\xi}), \\ \lambda &= \frac{M+m}{Mm}, & \mu &= \frac{1}{\lambda J}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Далее, для упрощения записи, будем полагать размерности системы единиц такими, что в (2.1) и (2.4) \$F_0 = 1, \lambda = 1, \mu = 1\$.

Третье уравнение в системе (2.4) можно проинтегрировать. Предполагая \$\dot{\varphi}(0) = 0\$, окончательно получаем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= F_x, & \ddot{\eta} &= F_y, & \dot{\varphi} &= \xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi} + C \\ C &= -\dot{\xi}(0)\eta(0) + \xi(0)\dot{\eta}(0). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В правой части полученного третьего уравнения в системе (2.5) добавлена константа \$C = -\dot{\xi}(0)\eta(0) + \xi(0)\dot{\eta}(0)\$, чтобы обеспечить выполнение условия \$\dot{\varphi}(0) = 0\$. Однако нетрудно показать, что эту константу, при решении рассматриваемой оптимальной задачи, можно опустить без ограничения общности.

Систему (2.5) перепишем в стандартной форме системы Коши, вводя обозначения

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = \dot{\xi}, \quad x_4 = \dot{\eta}, \quad x_5 = \varphi. \quad (2.6)$$

Получаем систему дифференциальных уравнений в стандартной форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, & \dot{x}_2 &= x_4, & \dot{x}_3 &= F_x, \\ \dot{x}_4 &= F_y, & \dot{x}_5 &= x_2 x_3 - x_1 x_4. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для системы (2.7) ставится следующая задача оптимального управления.

Пусть заданы начальные условия \$x_i(0) = x_{i0}\$, (\$i = 1, 5\$) и время \$t = T\$. Требуется определить такой закон изменения управляющих сил \$F_x, F_y\$, которые удовлетворяют ограничениям (2.1), и обеспечивают \$\max x_5(T) = \max \varphi(T)\$.

В классической формулировке задачи Л.С. Понтрягина последнее условие максимума можно заменить следующим

$$J = \int_0^T (x_2 x_3 - x_1 x_4) dt \rightarrow \max. \quad (2.8)$$

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

В настоящем пункте приведены дифференциальные уравнения принципа максимума Л.С. Понтрягина для рассматриваемой оптимальной задачи и излагается полученный результат.

В соответствии с принципом максимума Л.С. Понтрягина [7], вводим сопряженные переменные p_k ($k = 1, 5$), соответствующие фазовым переменным из (2.6), и гамильтониан H для исходной системы дифференциальных уравнений (2.7) по формуле

$$H = p_1 x_3 + p_2 x_4 + (p_3 F_x + p_4 F_y) + p_5 (x_2 x_3 - x_1 x_4). \quad (3.1)$$

Сопряженные переменные удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_k = -\partial H / \partial x_k, \quad (k = 1, 5).$$

В данном случае, используя (3.1), получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_5 x_4, & \dot{p}_2 &= -p_5 x_3, \\ \dot{p}_3 &= -p_1 - p_5 x_2, & \dot{p}_4 &= -p_2 + p_5 x_1, & \dot{p}_5 &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из последнего уравнения системы (3.2) следует, что $p_5 = \text{const} \geq 0$. Тогда система (3.2) приобретает следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_5 x_4, & \dot{p}_2 &= -p_5 x_3, \\ \dot{p}_3 &= -p_1 - p_5 x_2, & \dot{p}_4 &= -p_2 + p_5 x_1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Согласно принципу максимума оптимальное управление F доставляет максимум функции H из (3.1), и при ограничениях (2.1) имеет вид

$$F_x = \frac{p_3}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}, \quad F_y = \frac{p_4}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}. \quad (3.4)$$

Кроме того, так как на конечные значения $x_k(T)$, ($k = 1, 4$) не наложено никаких ограничений, должны быть выполнены условия трансверсальности

$$p_k(T) = 0, \quad (k = 1, 4). \quad (3.5)$$

Дифференцируя дважды последние два уравнения системы (3.3) и используя (2.7) и (3.4), получим следующие два уравнения для двух сопряженных переменных p_3, p_4 :

$$\begin{aligned} \ddot{p}_3 &= -\lambda \frac{p_4}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}, & \ddot{p}_4 &= \lambda \frac{p_3}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}, \\ \lambda &= 2p_5 = \text{const} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, задача сводится к поиску решений системы 6-го порядка (3.6) на отрезке $0 \leq t \leq T$, которые удовлетворяют краевым условиям

$$p_3(T) = p_4(T) = 0. \quad (3.7)$$

Мы можем понизить на две единицы порядок системы (3.6), записав следующие два ее интеграла

$$\begin{aligned} p_3 \dot{p}_3 + p_4 \dot{p}_4 &= \frac{1}{2} (\dot{p}_3^2 + \dot{p}_4^2) + C_1, \\ -\dot{p}_4 \dot{p}_3 + \dot{p}_3 \dot{p}_4 &= \lambda \sqrt{p_3^2 + p_4^2} + C_2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, определяемые начальными и конечными условиями для переменных p_3, p_4 . Система (3.8) является уже системой 4-го порядка. Можно еще понизить порядок системы (3.8) на две единицы при помощи следующих замен

$$\begin{aligned} p_3 &= \rho \cos \alpha, & p_4 &= \rho \sin \alpha, \\ \dot{p}_3 &= v \cos \beta, & \dot{p}_4 &= v \sin \beta. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9), обозначая $\gamma = \beta - \alpha$, получаем следующие 4 уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos \gamma, & \rho \dot{\alpha} &= v \sin \gamma, \\ \rho \dot{v} \cos \gamma - \rho v \dot{\beta} \sin \gamma &= \frac{1}{2} v^2 + C_1, \\ v^2 \dot{\beta} &= \lambda \rho + C_2, & (\gamma &= \beta - \alpha). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отсюда получаем замкнутую систему трех дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех функций $\{\rho, v, \gamma\}$ (уравнение для β “отщепляется”):

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos \gamma, & v \rho \dot{\gamma} &= -v^2 \sin \gamma + \frac{\rho(\lambda \rho + C_2)}{v}, \\ \dot{v} \rho \cos \gamma &= \frac{\rho(\lambda \rho + C_2)}{v} \sin \gamma + \frac{v^2}{2} + C_1, \\ &(\sin \gamma \neq 0). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если в системе (3.11) поделить второе и третье уравнения на первое и взять за независимое переменное функцию ρ , то получим систему второго порядка для двух переменных (v, γ) .

Таким образом, нам нужно найти такие решения системы (3.11) на отрезке $0 \leq t \leq T$, которые удовлетворяют краевому условию $\rho(T) = 0$, чтобы обеспечить условие трансверсальности (3.7). Аналитически эти решения удалось найти лишь в том частном случае, когда $C_1 = C_2 = 0$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Система (3.11) в случае $C_1 = C_2 = 0$ имеет частное решение, которое дается соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_0 = \pm \arcsin(1/\sqrt{I_0}) = \text{const}, \\ v(t) &= (\pm \sqrt{I_0} \lambda)^{1/3} [\rho(t)]^{2/3}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Справедливость утверждения 1 устанавливается непосредственной проверкой.

Далее, используя первые два уравнения системы (3.11) и соотношения (3.12), получим искомые

решения системы (3.6) как функции времени на отрезке $0 \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} p_3(t) &= p_*(1 - \tau)^3 \cos[\alpha_0 + \ln(1 - \tau)], \\ p_4(t) &= -p_*(1 - \tau)^3 \sin[\alpha_0 + \ln(1 - \tau)], \\ p_* &= \lambda T^3 / 10, \quad \tau = t/T, \\ \alpha_0 &= \text{const}, \quad \tau \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Используя формулы (3.6) и (3.13), получаем выражения для оптимальных управлений

$$\begin{aligned} F_x &= \cos[\alpha_0 + \ln(1 - \tau)], \\ F_y &= -\sin[\alpha_0 + \ln(1 - \tau)], \\ \tau &= t/T, \quad \alpha_0 = \text{const} \in [0, 2\pi], \quad \tau \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подставляя функции из (3.14) в уравнения движения (2.7), находим соответствующие оптимальные траектории точки в системе координат $C\xi\eta$ и максимальный угол поворота тела. Неложно получить, что эти траектории представляют собой спирали, закручивающиеся вокруг центра масс C бесконечное число раз. В конце этого процесса, при $t \rightarrow T$, направление управляющей силы F меняется с увеличивающейся до бесконечности частотой.

В формулах (3.14) α_0 – произвольная константа из интервала $[0, 2\pi]$. Используя (3.14), мы можем решить полную систему уравнений (2.7), (3.3) на отрезке $0 \leq t \leq T$ и определить все те начальные условия $x_k(0) = x_{k0}, (k = 1, 4)$, при которых соблюдены условия трансверсальности $p_k(T) = 0, (k = 1, 4)$. Проводя элементарные выкладки, мы получаем следующий результат.

Утверждение 2. Если начальные условия в рассматриваемой задаче удовлетворяют следующим параметрическим соотношениям

$$\begin{aligned} x_{10} &= \xi(0) = \frac{T^2}{10}(\cos \alpha_0 + 3 \sin \alpha_0), \\ x_{20} &= \eta(0) = \frac{T^2}{10}(3 \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0), \\ x_{30} &= \dot{\xi}(0) = -\frac{T}{2}(\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0), \\ x_{40} &= \dot{\eta}(0) = \frac{T}{2}(-\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0), \\ \alpha_0 &\in [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (3.15)$$

то при управляющих силах из (3.14) тело за время T повернется на максимальный угол. При этом оптимальные траектории спиралеобразно стремятся к точке

$$\xi(T) = \dot{\xi}(T) = \eta(T) = \dot{\eta}(T) = 0.$$

Справедливость утверждения 2 следует из принципа максимума Понтрягина и непосред-

ственного интегрирования системы уравнений (2.7), (3.3) при функциях F_x, F_y , вычисляемых по формулам (3.14).

Замечание 1. В силу однородности пространства в формулах (3.15) можно принять $\alpha_0 = 0$. Тогда искомые начальные условия будут такими

$$\begin{aligned} x_{10} &= \xi(0) = \frac{T^2}{10}, \quad x_{20} = \eta(0) = \frac{3T^2}{10}, \\ x_{30} &= \dot{\xi}(0) = -\frac{T}{2}, \quad x_{40} = \dot{\eta}(0) = -\frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Оптимальное управление из (3.14) примет вид

$$\begin{aligned} F_x &= \cos[\ln(1 - s)], \quad F_y = -\sin[\ln(1 - s)], \\ s &= t/T, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Решая систему (2.5) при указанных начальных условиях и управлениях F_x, F_y , получим следующие формулы для координат и скоростей

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \xi(t) = \frac{T^2}{\sqrt{10}} \tau^2 \sin(\gamma_0 + \ln \tau), \\ x_2(t) &= \eta(t) = \frac{T^2}{\sqrt{10}} \tau^2 \cos(\gamma_0 + \ln \tau), \\ x_3(t) &= \dot{\xi}(t) = -\frac{T}{\sqrt{2}} \tau \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \tau\right), \\ x_4(t) &= \dot{\eta}(t) = -\frac{T}{\sqrt{2}} \tau \cos\left(\frac{\pi}{4} + \ln \tau\right), \\ \dot{x}_5(t) &= \phi(t) = -\frac{T^3}{10}(1 - \tau^3), \\ x_5(t) &= \varphi(t) = \frac{T^4}{10} \left(\frac{3}{4} - \tau + \frac{\tau^4}{4} \right), \\ \sin \gamma_0 &= \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \gamma_0 = \frac{3}{\sqrt{10}}, \\ \tau &= 1 - \frac{t}{T}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует, что оптимальный угол поворота равен $x_5(T) = \varphi(T) = \frac{3T^4}{40}$, траектории точки по координатам и скоростям приближаются спиралеобразно в точку нуль. На рис. 2, 3 представлены графики траекторий точки, соответственно, по координатам и скоростям.

4. РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ

В предыдущем пункте решение задачи Л.С. Понтрягина осуществлялось в декартовых координатах. В настоящем пункте исходная задача оптимального управления решается с использованием полярных координат. Такой метод поз-

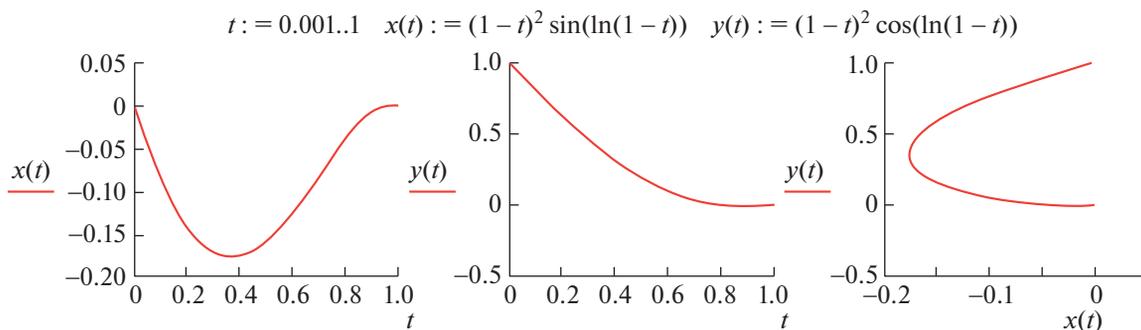


Рис. 2. Оптимальные траектории точки по координатам.

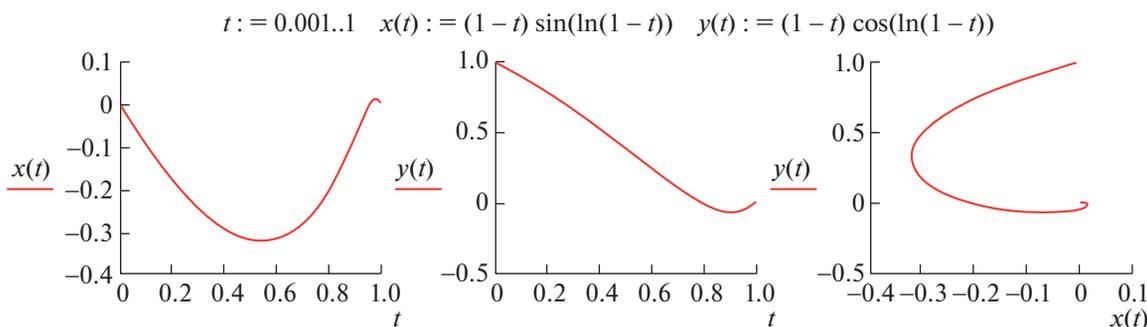


Рис. 3. Оптимальные траектории точки по скоростям.

воляет сократить выкладки и лучше прояснить механический смысл полученных результатов.

В системе (2.7) перейдем к полярным переменным по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \alpha, & x_2 &= \rho \sin \alpha, \\ x_3 &= v \cos \beta, & x_4 &= v \sin \beta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Тогда система (2.7) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos \gamma, & \rho \dot{\alpha} &= -v \sin \gamma, \\ \dot{v} &= F_v, & v \dot{\beta} &= F_\beta, & \dot{\phi} &= \rho v \sin \gamma. \end{aligned} \tag{4.2}$$

В (4.2) приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned} F_v &= F_x \cos \beta + F_y \sin \beta, \\ F_\beta &= -F_x \sin \beta + F_y \cos \beta, & \gamma &= \alpha - \beta. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Согласно (4.3), F_v, F_β суть проекции управляющей силы F на оси скоростной системы координат (касательную и нормаль, соответственно, к траектории точки в декартовой системе координат $C\xi\eta$). Ясно, что эти проекции также удовлетворяют ограничению

$$F_v^2 + F_\beta^2 \leq F_0^2 = 1. \tag{4.4}$$

Путем несложных преобразований можно сократить число уравнений в системе (4.2). В результате получаем следующую систему четырех диффе-

ренциальных уравнений для четырех переменных $\{\rho, \gamma, v, \phi\}$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos \gamma, & \dot{\gamma} &= -\frac{v}{\rho} \sin \gamma - \frac{1}{v} F_\beta, & \dot{v} &= F_v, \\ \dot{\phi} &= \rho v \sin \gamma, & t &\in [0, T]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Для системы (4.5) ставится аналогичная пункту 2 оптимальная задача. Найти функции F_v, F_β , которые при ограничениях (4.4) и заданных начальных условиях $\{\rho(0), \gamma(0), v(0), \phi(0) = 0\}$ обеспечивают для решения системы (4.5) $\max \phi(T)$.

Используя принцип максимума Л.С. Понтрягина, вводим сопряженные переменные $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, которые соответствуют исходным переменным $\{\rho, \gamma, v, \phi\}$ в написанном порядке. Далее составим гамильтониан, который запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} H &= v \left(p_1 \cos \gamma - \frac{p_2}{\rho} \sin \gamma + p_4 \rho \sin \gamma \right) + \\ &+ \left(-\frac{p_2}{v} F_\beta + p_3 F_v \right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

В соответствии с принципом максимума оптимальные функции F_v, F_β реализуют максимум функции H из (4.6), и при ограничениях (4.4) имеют вид

$$F_{\beta} = -p_2/p_0, \quad F_v = q/p_0, \quad (4.7)$$

где обозначено $q = v p_3$, $p_0 = \sqrt{p_2^2 + q^2}$.

Из дифференциальных уравнений для сопряженных переменных следует, что $\dot{p}_4 = 0$, т.е. $p_4 = \lambda = \text{const} \geq 0$. Записывая уравнения для других сопряженных переменных, присоединяя к ним динамические уравнения (4.5) и используя равенства (4.7), получаем следующую систему шести дифференциальных уравнений для шести функций $\{\rho, \gamma, v, p_1, p_2, p_3\}$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos \gamma, & \dot{\gamma} &= -\frac{v}{\rho} \sin \gamma + \frac{p_2}{v p_0}, & \dot{v} &= \frac{q}{p_0}, \\ \dot{p}_1 &= -\left(\frac{p_2}{\rho^2} + \lambda\right) v \sin \gamma, \\ \dot{p}_2 &= v \left[p_1 \sin \gamma + \left(\frac{p_2}{\rho} - \lambda \rho\right) \cos \gamma \right], \\ \dot{p}_3 &= -p_1 \cos \gamma + \left(\frac{p_2}{\rho} - \lambda \rho\right) \sin \gamma + \frac{p_2^2}{v^2 p_0}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$t \in [0, T]$.

В системе (4.8) приняты обозначения из (4.7). Кроме того, так как на исходные переменные $\rho(t)$, $\gamma(t)$, $v(t)$ при $t = T$ не наложено никаких ограничений, то должны быть выполнены условия трансверсальности

$$p_1(T) = p_2(T) = p_3(T) = 0. \quad (4.9)$$

Таким образом, требуется решить систему дифференциальных уравнений (4.8) на отрезке $0 \leq t \leq T$ при заданных начальных условиях для переменных $\{\rho, \gamma, v\}$ и условиях трансверсальности (4.9) для переменных $\{p_1, p_2, p_3\}$. Для некоторых начальных условий это удалось сделать аналитически.

Перейдем в системе (4.8) к независимой переменной ρ . Для этого поделим обе части всех уравнений, начиная со второго, на первое уравнение. Получим систему пяти уравнений для пяти переменных $\{\gamma, v, p_1, p_2, p_3\}$ (производная по ρ обозначается штрихом)

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\text{tg} \gamma}{\rho} + \frac{p_2}{v^2 p_0 \cos \gamma}, & v' &= \frac{q}{v p_0 \cos \gamma}, \\ p_1' &= -\left(\frac{p_2}{\rho^2} + \lambda\right) \text{tg} \gamma, & p_2' &= p_1 \text{tg} \gamma + \frac{p_2}{\rho} - \lambda \rho, \\ p_3' &= -\frac{1}{v} \left[p_1 - \left(\frac{p_2}{\rho} - \lambda \rho\right) \text{tg} \gamma \right] + \frac{p_2^2}{v^3 p_0 \cos \gamma}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Система (4.10) имеет два интеграла

$$p_1^2 + \left(\frac{p_2}{\rho} + \lambda \rho\right)^2 = h^2 = \text{const}, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} v \left(p_1 \cos \gamma - \frac{p_2}{\rho} \sin \gamma + \lambda \rho \sin \gamma \right) + \frac{p_0}{v} = H = \text{const}, \\ p_0 = \sqrt{p_2^2 + q^2}, \quad q = v p_3. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Интеграл (4.11) получается непосредственно из третьего и четвертого уравнений системы (4.10). Интеграл (4.12) следует из сохранения значения функции Гамильтона (4.6) при значениях F_v, F_{β} из (4.7) в силу уравнений (4.8). Константы h, H в (4.11) и (4.12) определяются заданными начальными условиями для $\{\rho, \gamma, v\}$ и условиями трансверсальности (4.9).

Благодаря интегралу (4.11), можно понизить порядок системы (4.10). Введем вместо p_1, p_2 новую переменную σ по формулам

$$p_1 = h \sin \sigma, \quad p_2 = \rho (h \cos \sigma - \lambda \rho), \quad \sigma \in [0, 2\pi]. \quad (4.13)$$

Тогда интеграл (4.11) соблюдается автоматически, а система (4.10) будет эквивалентна следующим четырем уравнениям для четырех переменных $\{\gamma, \sigma, v, q\}$, ($q = v p_3$)

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\text{tg} \gamma}{\rho} + \frac{p_2}{v^2 p_0 \cos \gamma}, & v' &= \frac{q}{v p_0 \cos \gamma}, \\ \sigma' &= -\frac{\text{tg} \gamma}{\rho}, & q' &= -p_1 + \left(\frac{p_2}{\rho} - \lambda \rho\right) \text{tg} \gamma + \frac{p_0}{v^2 \cos \gamma}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

В уравнениях (4.14) p_1, p_2 даются формулами (4.13), а p_0, q определяются обозначениями из (4.7).

Введем новую переменную p по формуле

$$q = v p_3 = p p_2 = p \rho (h \cos \sigma - \lambda \rho). \quad (4.15)$$

Тогда имеем $p_0 = |p_2| \sqrt{1 + p^2}$, и система уравнений (4.14) примет вид

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\text{tg} \gamma}{\rho} + \frac{\text{sgn } p_2}{v^2 \cos \gamma \sqrt{1 + p^2}}, \\ v' &= \frac{p \text{sgn } p_2}{v \cos \gamma \sqrt{1 + p^2}}, & \sigma' &= -\frac{\text{tg} \gamma}{\rho}, \\ p_2 p' &= -h \sin \sigma - p h \sin \sigma \text{tg} \gamma + \\ &+ (h \cos \sigma - 2\lambda \rho) (\text{tg} \gamma - p) + \frac{|p_2| \sqrt{1 + p^2}}{v^2 \cos \gamma}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Рассмотрим такие начальные условия, для которых $h = 0$. В этом случае из интеграла (4.11) следует, что

$$p_1 \equiv 0, \quad p_2 = -\lambda \rho^2. \quad (4.17)$$

Уравнения (4.16) приобретают вид

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\rho} - \frac{1}{v^2 \cos\gamma \sqrt{1+p^2}}, \\ v' &= -\frac{p}{v \cos\gamma \sqrt{1+p^2}}, \\ -\lambda \rho^2 p' &= (-2\lambda\rho)(\operatorname{tg}\gamma - p) + \frac{\lambda \rho^2 \sqrt{1+p^2}}{v^2 \cos\gamma}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Далее полагаем $u = v^2$. Тогда система (4.18) примет вид

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\rho} - \frac{1}{u \cos\gamma \sqrt{1+p^2}}, \quad u' = -\frac{2p}{\cos\gamma \sqrt{1+p^2}}, \\ p' &= \frac{2}{\rho}(\operatorname{tg}\gamma - p) - \frac{\sqrt{1+p^2}}{u \cos\gamma}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Из формулы (4.12) для рассматриваемых начальных условий получим следующий интеграл системы (4.19)

$$2\rho\sqrt{u} \sin\gamma + \frac{\rho^2}{\sqrt{u}} \sqrt{1+p^2} = H = \text{const}. \quad (4.20)$$

Уравнения (4.19) имеют стационарные решения $\gamma = \gamma_0, p = p_0, u = v^2 = k\rho$, ($k > 0$), для которых выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\gamma_0 &= \pm 1/2, \quad p_0 = \pm 1, \\ k &= -\frac{2p_0}{(\sqrt{1+p_0^2}) \cos\gamma_0}, \quad v = \sqrt{k\rho}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Эти решения удовлетворяют также интегралу (4.20) при $H = 0$. Так как $k > 0$, то из (4.21) получим

$$\begin{aligned} p &= p_0 = \pm 1, \quad \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\gamma_0 = \pm 1/2, \\ \cos\gamma_0 &= \mp 2/\sqrt{5}, \quad \sin\gamma_0 = -1/\sqrt{5}, \quad k = \sqrt{10}/2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Отметим, что в силу условий трансверсальности (4.9), формул (4.17) и обозначений (4.15), имеем $\rho(T) = 0$, $v(T) = \sqrt{k\rho(T)} = 0$. В результате приходим к решениям, полученным в пункте 2.

З а м е ч а н и е 2. Нетрудно установить, используя (4.7), (4.15) и первое равенство из (4.22), что оптимальная сила F удовлетворяет соотношениям $|F_v| = |F_\beta| = \sqrt{2}/2$. Таким образом, сила F является постоянной по модулю (равным единице) и всегда направлена под углом 45° к касательной траектории подвижной точки в системе $C\xi\eta$. Эта сила является “следящей” по скорости точки. Отметим, что в монографии В.Ф. Журавлёва и Д.М. Климова [8] (см. пункт 3.5.2 на стр. 115) рассматривалась задача о “следящей” силе по позиции точки (сила была также постоянна по модулю и всегда перпендикулярна радиусу-вектору точки). Спиралеобразные траектории движения точ-

ки, полученные в монографии [8], вполне аналогичны траекториям в настоящей работе.

З а м е ч а н и е 3. В работе [9] численно исследовалась задача об оптимальной раскрутке плоской двухмассовой системы, где управлением являлся ограниченный внешний момент, приложенный к одному из тел.

З а м е ч а н и е 4. Аналитические выражения для оптимальных траекторий в рассматриваемой задаче удалось получить лишь для достаточно узкого класса начальных условий. При этом оказалось, что оптимальные траектории подвижной массы в конце интервала управления по спиралам приходят с нулевой предельной скоростью в центр масс тела. Весьма вероятно, что аналогичный эффект будет наблюдаться и для других начальных условий. Однако для доказательства этого факта потребуются дополнительные численно-аналитические исследования решений приведенных в статье дифференциальных уравнений.

З а м е ч а н и е 5. При исследовании, редукции и поиске первых интегралов дифференциальных уравнений настоящей статьи использовались идеи и методы, которые были развиты в работах [10, 11].

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает свою благодарность академику РАН В.Ф. Журавлёву за поддержку и внимание к работе, а также академику РАН Ф.Л. Черноусько и всем участникам руководимого им семинара за ценные и конструктивные замечания к настоящей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апель П.* Теоретическая механика. Т. 2: Динамика системы. Аналитическая механика. Пер. с фр. / Под науч. ред. С.М. Тарга. Предисл. В.Ф. Журавлёва и Г.М. Розенблата. Изд. 2-е, дополн. М.: ЛЕНАНД, 2021. 504 с.
2. *Татаринов Я.В.* Лекции по классической динамике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 296 с.
3. *Chernousko F.L.* Optimal Control of Two-Dimensional Motions of a Body by a Movable Mass. Preprints of the IX Vienna Intern. Conf. on Mathematical Modelling (MATHMOD). Vienna, February 21–23, 2018. Pap. WeD4.2. Vienna, 2018. P. 253–256.
4. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление движением двухмассовой системы // Доклады Академии наук. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
5. *Черноусько Ф.Л.* Изменение ориентации твердого тела при помощи вспомогательной массы // Доклады Российской академии наук. Физика. Технические науки. 2020. Т. 490. С. 79–81.
6. *Шматков А.М.* Поворот тела за кратчайшее время перемещением точечной массы // Доклады Академии наук. 2018. Т. 481. № 5. С. 498–502.
7. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптималь-

- ных процессов. М.: 1961. Государственное издательство физико-математической литературы. 391 с.
8. *Klimov D.M. and Zhuravlev V.Ph.* Group-Theoretic Methods in Mechanics and Applied Mathematics. Taylor & Francis. 2002. 230 p.
9. *Решмин С.А.* Применение метода Ньютона при решении краевых задач принципа максимума на примере задачи об оптимальном раскручивании двухмассовой системы // Modern European Researches. 2021. V. 1. № 2. P. 114–122.
10. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем. // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
11. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.

ON OPTIMAL RIGID BODY ROTATION WITH INTERNAL FORCES APPLICATION

G. M. Rozenblat

Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.Ph. Zhuravlev

The article describes the result obtained for the problem of a rigid body's maximum rotation in a given time interval by moving a movable internal mass. The mass movement is achieved by applying limited force. Previously, similar problems were considered in which the displacements of internal mass were assumed to be kinematic with restrictions on the point's speed. The obtained result is described by analytical, easily verifiable formulas. The optimal trajectory of the moving mass is a spiral that coils around the center of mass of a rigid body with a frequency increasing to infinity.

Keywords: optimal control, Pontryagin's maximum principle, rigid body dynamics