

УДК 51-77+614.44+338.1+330.4

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕОДОЛЕНИЯ ПАНДЕМИИ COVID-19 И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

© 2022 г. Академик РАН В. А. Садовничий<sup>1,\*</sup>, Иностраный член РАН А. А. Акаев<sup>2,\*\*</sup>, А. И. Звягинцев<sup>3,\*\*\*</sup>, А. И. Сарыгулов<sup>4,\*\*\*\*</sup>

Поступило 01.04.2022 г.  
После доработки 19.04.2022 г.  
Принято к публикации 01.06.2022 г.

Предложена математическая модель, которая не только генерирует сценарные прогнозы, но и одновременно формирует конкретные управленческие меры, направленные на подавление пандемии и восстановление экономического роста. Разработанная модель взаимного влияния пандемии и экономики является не только инструментом эффективного и адекватного прогнозирования, но и способна имитировать различные сценарии, которые вполне могут соответствовать реальным эпидемиологическим процессам. Возможность практически управлять динамикой пандемии и ВВП с целью стабилизации социально-экономического развития – одно из преимуществ этой модели.

*Ключевые слова:* COVID-19, экономические системы, модели управления, восстановление экономики

**DOI:** 10.31857/S2686954322040166

Математические модели, описывающие распространение эпидемии COVID-19, начали разрабатываться практически одновременно с первой вспышкой заболевания в Китае в январе 2020 г. В основе таких моделей лежат различные подходы, обзоры которых содержатся, например, в работах [1–3]. Существенным недостатком большинства разработанных математических моделей является их неспособность имитировать циклические процессы, которые характерны для волнообразной динамики заболеваемости коронавирусом. Наконец, отсутствуют модели, которые генерируют конкретные математически обоснованные размеры и сроки осуществления мероприятий по преодолению пандемии и направленных на обеспечение экономического роста.

Данная работа посвящена математическому моделированию процессов преодоления пандемии и восстановления экономического роста, а также моделированию необходимых объемов антикризисных мер и эффективных сроков их проведения. В качестве базовых экономико-математических моделей были использованы модель Кермака–Маккендрика [4] и модель Сандерсона [5, 6].

Предложенная В. Кермаком и А. Маккендриком [4] модель является классической SIR-моделью распространения инфекции и состоит из 3 дифференциальных уравнений. Отдельные эксперты считают ошибочным использование SIR-моделей для описания пандемии коронавируса [7]. Действительно, в этой модели считается, что переболевшие индивиды приобретают иммунитет и не могут быть заражены вторично. Для пандемии COVID-19 это предположение не выполняется. Более того, в SIR-модели не учитывается процесс вакцинации от вирусной инфекции. В этой связи мы добавили в SIR-модель четвертое “вакцинное” уравнение и ввели поправочные компоненты, которые учитывают возможность повторного заражения и другие нюансы. Кроме того, поскольку при практическом моделировании приходится оперировать дискретными значениями статистики, то целесообразен переход от дифференциальных уравнений к разностным уравнениям. В результате мы получили эпидемио-

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup> Институт математических исследований сложных систем Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>3</sup> Михайловская военная артиллерийская академия, Санкт-Петербург, Россия

<sup>4</sup> Санкт-Петербургский государственный экономический университет, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: info@rector.msu.ru

\*\*E-mail: askarakaev@mai.ru

\*\*\*E-mail: azvyagintsev@mail.ru

\*\*\*\*E-mail: dept.cfr@unecon.ru

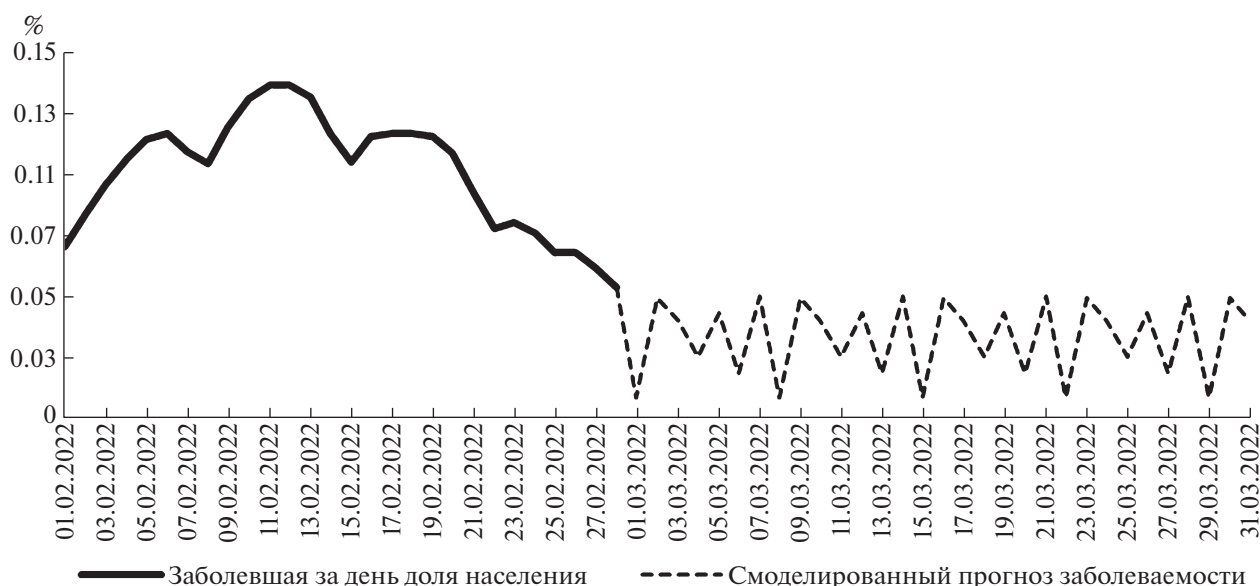


Рис. 1. Смоделированный прогноз заболеваемости коронавирусом в России.

математическую модель в виде дискретной системы уравнений:

$$\begin{cases} S_{j+1} = S_j(1 - rI_j - q + a) \\ I_{j+1} = I_j(1 + rS_j - v) + cR_j \\ R_{j+1} = R_j(1 - c) + vI_j + dV_j \\ V_{j+1} = V_j(1 - d) + qS_j + bR_j \end{cases} \quad (1)$$

$j = 0, 1, 2, \dots$

Здесь  $S_j$ ,  $I_j$ ,  $R_j$ ,  $V_j$  – соответственно численности восприимчивых к заражению (не болевших COVID, но и не сделавших вакцинацию), больных COVID, выздоровевших, полностью вакцинированных (двумя дозами) граждан;  $r$  – коэффициент скорости заражения COVID;  $v$  – коэффициент интенсивности выздоровления инфицированных индивидов;  $q$  и  $b$  – коэффициенты вакцинации соответственно для не болевших и переболевших COVID;  $d$  – коэффициент ревакцинации;  $c$  – коэффициент повторного заражения COVID;  $a$  – коэффициент флуктуации населения, который учитывает эффект изменения численности населения в результате рождаемости и смертности и в силу миграции граждан.

В качестве примера рассмотрим коронавиральную статистику по России [8]. Высший пик заболеваемости пришелся на февраль 2022 г., причем динамика заболеваемости имела “пилообразную” конфигурацию. Рисунок 1 содержит ежедневные показатели новых заражений коронавирусом среди граждан России в феврале. Динамика заболеваемости имеет четко прослеживаемую цикличность с периодом 7 дней.

Покажем, что модель (1) позволяет генерировать циклические траектории с требуемой перио-

дичностью. Из выше изложенного следует, что интерес представляют циклы с периодом 7 дней. В результате компьютерного эксперимента были подобраны численные значения параметров системы (1):

$$\begin{aligned} r &= 2.14970486321458; & v &= 1.80089137686731; \\ q &= 1.25507485843425; & \alpha &= 1.94597445654447; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 0.0247039444045711; \\ c &= 0.0619984179153856; \\ d &= 0.00807089279296773. \end{aligned}$$

С помощью приближенных методов были найдены начальные условия, при которых система (1) моделирует периодическую орбиту с периодом 7:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0 &= 0.539753228690255; \\ \tilde{I}_0 &= 0.946101872256248; \\ \tilde{R}_0 &= 2.23329875094284; \\ \tilde{V}_0 &= 3.89439991609052. \end{aligned} \quad (2)$$

Осуществленная на основании статистических данных [8] верификация периодической орбиты, смоделированной системой (1) с начальными условиями (2), позволяет получать прогнозируемые циклы для COVID-19, адаптированные к эпидемиологическим реалиям. Рисунок 1 содержит график смоделированного краткосрочного прогноза для возможных колебаний коронавиральной динамики на март 2022 г.

Коронавирусная эпидемия спровоцировала глобальный экономический кризис. В России [9, 10] по итогам 2020 г. ВВП на душу населения упал на 2.07%, нарушив тенденцию к росту в



Рис. 2. Смоделированные прогнозы динамики заболеваемости и выздоровления.

предыдущие до пандемии годы. Для математической интерпретации взаимного влияния пандемии и экономики мы воспользовались двумя уравнениями из предложенной В. Сандерсоном [5, 6] дискретной модели, которая называется моделью Wonderland (“Чудесная страна”) и описывает взаимосвязь экономических, демографических и экологических процессов.

В итоге получена математическая модель взаимного влияния пандемии и экономики:

$$\begin{cases} S_{j+1} = S_j(1 - rI_j - q + a) \\ I_{j+1} = I_j(1 + rS_j - v) + cR_j \\ R_{j+1} = R_j(1 - c) + vI_j + dV_j \\ V_{j+1} = V_j(1 - d) + qS_j + bR_j \\ z_{j+1} = \frac{z_j e^{\delta z_j^{\rho} - \omega y_j I_j}}{1 - z_j + z_j e^{\delta z_j^{\rho} - \omega y_j I_j}} \\ y_{j+1} = y_j(1 + \gamma - (\gamma + \eta)(1 - z_j)^{\lambda}). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь коэффициенты  $\gamma, \eta, \lambda, \delta, \rho, \omega$  являются константами;  $y_j$  – ВВП на душу населения. Через  $z_j$  обозначается уровень преодоления пандемии ( $0 \leq z_j \leq 1$ ). В случае  $z_j = 1$  считается, что эпидемиологическая обстановка находится в идеальном состоянии и заражение COVID полностью отсутствует. Значение  $z_j = 0$  выражает противоположный предельный случай, когда размеры пандемии настолько велики, что возникает максимальная угроза для человеческого здоровья и экономики.

Государство заинтересовано в преодолении пандемии, восстановлении экономического роста и возвращении социально-экономической обстановки в устойчивый режим. С математической точки зрения устойчивому режиму соответствует неподвижная точка системы (3). Для нахождения неподвижной точки правые части в (3) приравниваются соответственно  $S_j, I_j, R_j, V_j, z_j, y_j$  и вычисляются координаты неподвижной точки  $w_{\#}$ .

Поскольку для показателей заболеваемости и выздоровления характерна хаотичность, то в целях преодоления хаотичной динамики осуществим модификацию модели (3), используя результаты из современной теории управления хаосом. Введем обозначения

$$\begin{aligned} w_1(j) &= S_j; & w_2(j) &= I_j; & w_3(j) &= R_j; \\ w_4(j) &= V_j; & w_5(j) &= z_j; & w_6(j) &= y_j \end{aligned}$$

и запишем систему (3) в векторной форме:

$$w(j + 1) = F(w(j)); \quad j \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (4)$$

где

$$w(j) = \begin{pmatrix} w_1(j) \\ w_2(j) \\ w_3(j) \\ w_4(j) \\ w_5(j) \\ w_6(j) \end{pmatrix};$$

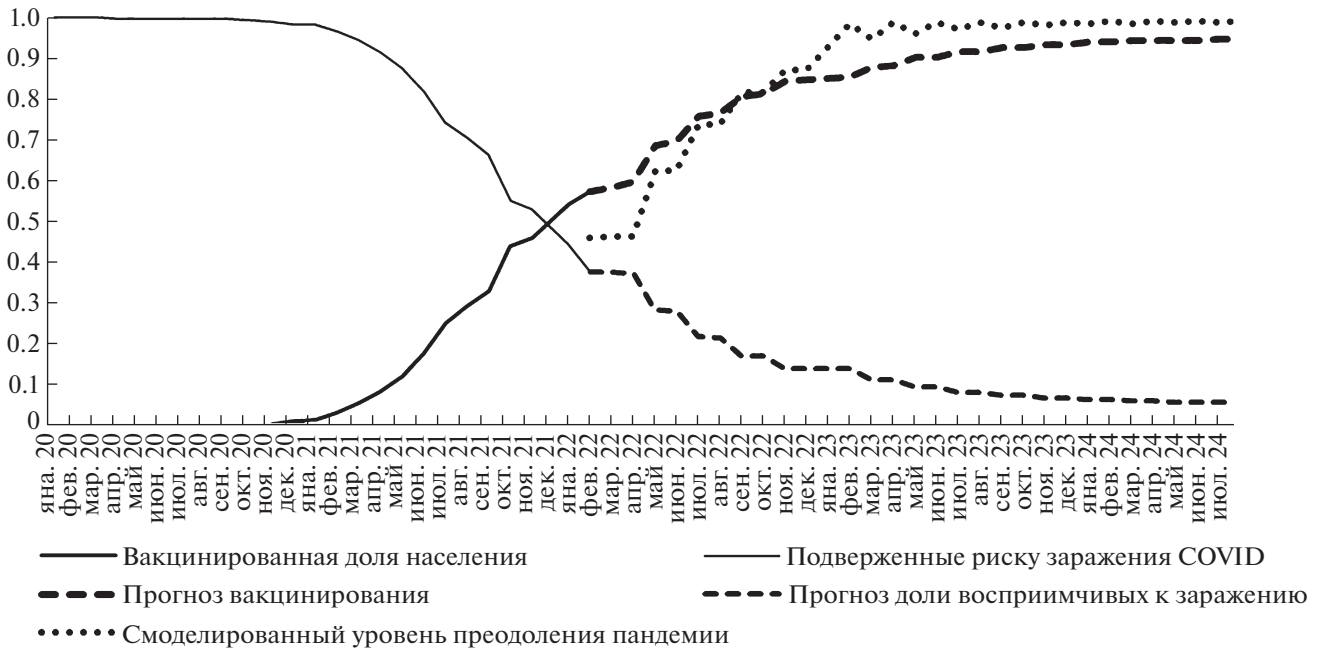


Рис. 3. Смоделированный прогноз динамики вакцинации.

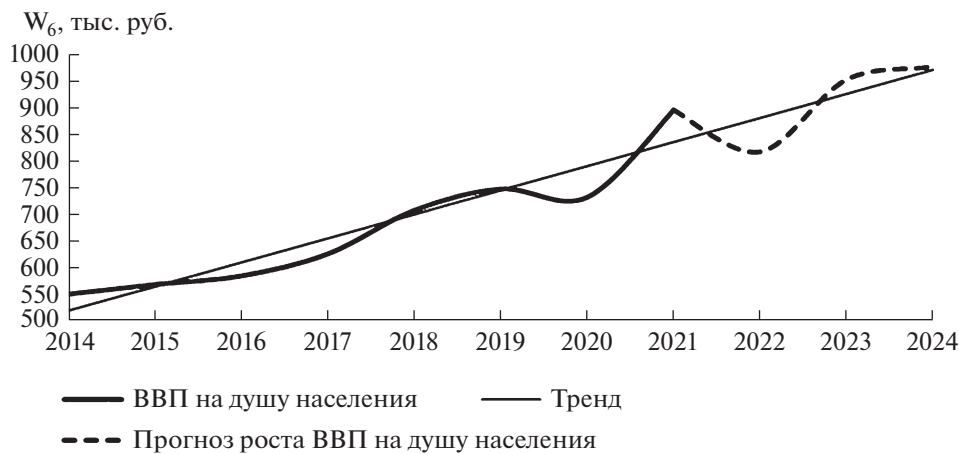


Рис. 4. Смоделированный прогноз восстановления роста ВВП на душу населения в России.

$$F(w(j)) = \begin{pmatrix} w_1(j)(1 - rw_2(j) - q + a) \\ w_2(j)(1 + rw_1(j) - v) + cw_3(j) \\ w_3(j)(1 - c) + vw_2(j) + dw_4(j) \\ w_4(j)(1 - d) + qw_1(j) + bw_3(j) \\ w_5(j)e^{\delta w_5^p(j) - \omega w_6(j)w_2(j)} \\ \frac{w_5(j)e^{\delta w_5^p(j) - \omega w_6(j)w_2(j)}}{1 - w_5(j) + w_5(j)e^{\delta w_5^p(j) - \omega w_6(j)w_2(j)}} \\ w_6(j)(1 + \gamma - (\gamma + \eta)(1 - w_5(j))^\lambda) \end{pmatrix}.$$

менив метод Пирагаса [11], получим модифицированную систему:

$$w(j + 1) = F(w(j)) + U(j); \quad j \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (5)$$

где  $U(j)$  является функцией управления, предназначенной для стабилизации поведения решений системы. На основании результатов работ [12, 13] по стабилизации дискретных систем получается функция управления следующего вида:

$$U(j) = F(w_\#) - F(w(j)) + A(w_\#)[w(j) - w_\#] + P(j)[w(j) - w(j - 1)]. \quad (6)$$

Совершив линеаризацию системы (4) в окрестности неподвижной точки  $w_\#$  и затем при-

Таблица 1

Месяц	Масштабы вакцинации (% населения)	Дополнительные инвестиции в экономику (млрд. руб.)	Месяц	Масштабы вакцинации (% населения)	Дополнительные инвестиции в экономику (млрд. руб.)
мар.22	0.0	0.0	авг.23	0.0	1.3
апр.22	0.0	0.0	сен.23	1.1	146.0
май.22	10.7	2720.9	окт.23	0.0	0.7
июн.22	0.0	0.0	ноя.23	0.8	102.2
июл.22	7.5	2179.2	дек.23	0.0	0.3
авг.22	0.0	0.0	январ.24	0.6	71.6
сен.22	5.2	1646.1	февр.24	0.0	0.2
окт.22	0.0	0.0	мар.24	0.4	50.1
ноя.22	3.7	1211.4	апр.24	0.0	0.1
дек.22	0.0	0.0	май.24	0.3	35.1
январ.23	0.0	14.8	июн.24	0.0	0.0
февр.23	0.0	9.9	июл.24	0.2	24.5
мар.23	3.3	425.8	авг.24	0.0	0.0
апр.23	0.0	5.2	сен.24	0.1	17.2
май.23	2.3	298.1	окт.24	0.0	0.0
июн.23	0.0	2.6	ноя.24	0.1	12.0
июл.23	1.6	208.6	дек.24	0.0	0.0

Здесь  $P(j)$  – периодичная матрица, заданная формулой:

$$P(j) = \begin{cases} (kE - A^2(w_{\#}))(A(w_{\#}) - E)^{-1}, & j = 2n \\ O, & j \neq 2n, \quad n \in \{1, 2, \dots\} \end{cases},$$

где  $-1 < k < 1$ ,  $E$  – единичная матрица,  $O$  – нулевая матрица,  $A(w_{\#})$  – матрица Якоби для вектор-функции  $F$ ,  $w_{\#}$  – неподвижная точка.

Дискретная система (5) характеризуется сверхвысокой чувствительностью к изменениям параметров. Таким образом, за счет вариации коэффициентов модель (5) способна имитировать различные сценарии, которые вполне соответствуют реальным эпидемиологическим и экономическим процессам. При моделировании с помощью системы (5) будем использовать помесечную статистику.

В целях моделирования прогноза по преодолению пандемии и развитию экономики будем решать систему (5) с начальными условиями, которые соответствуют текущим реалиям. Согласно статистическим данным [8–10] на конец февраля 2022 г. имеем

$$\begin{aligned} w_1(0) &= 0.3748; & w_2(0) &= 0.031; & w_3(0) &= 0.0237; \\ w_4(0) &= 0.5705; & w_5(0) &= 0.4583; & & \\ w_6(0) &= 894.4 \text{ тыс. руб.} & & & & \end{aligned} \quad (7)$$

В результате компьютерного эксперимента были подобраны численные значения параметров системы (5):

$$\begin{aligned} a &= 0.001; & b &= 0.5; & c &= 0.3; & q &= 0.0011; \\ \gamma &= 0.00004; & \eta &= 0.4; & \omega &= -0.86; & \rho &= 3. \end{aligned}$$

По многочисленным экспертным оценкам, в 2022 г. ВВП России может снизиться на 7% и более в результате западных санкций, направленных против российской военной спецоперации на Украине. В этой связи при моделировании для 2022 г. использовались коэффициенты

$$\begin{aligned} d &= 0.0000066667; & \lambda &= 1; & r &= 0.7874015748; \\ v &= 0.3393700787; & \delta &= 0.1000958387, \end{aligned}$$

а для 2023 и 2024 г. применялись

$$\begin{aligned} d &= 0.0000052632; & \lambda &= 2; & r &= 1; \\ v &= 0.35; & \delta &= 0.0867999804. \end{aligned}$$

Решив систему (5) с начальными условиями (7) мы получили прогнозные траектории, графики которых представлены на рис. 2–4.

Графики рис. 2, 3 наглядно демонстрируют, что вакцинация населения является главным инструментом в борьбе с COVID-19. Кроме того, рис. 3, 4 указывают на существенную взаимосвязь между преодолением пандемии и восстановлением экономического роста. Коэффициент корреляции между полученными значениями  $w_5(j)$  и  $w_6(j)$  составляет 0.79.

Разработанная модель (5)–(6) является не только инструментом эффективного и адекватного прогнозирования. Основное достоинство этой модели заключается в том, что она дополни-

тельно дает возможность практического управления динамикой пандемии и ВВП в целях стабилизации социально-экономического развития. Полученная в явном виде аналитическая формула (6) дает возможность определять конкретные размеры и время проведения упреждающих корректировок.

В результате вычислений и верификации, проведенных на основе итогов моделирования, и с учетом инвестиционного мультипликатора [14] были получены помесечные значения для масштабов вакцинирования и объемов дополнительных инвестиций, необходимых для преодоления пандемии и обеспечения экономического роста. Эти значения сведены в табл. 1, которая по сути является графиком проведения превентивных антикризисных мер.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что для преодоления пандемии и восстановления экономического роста необходимо своевременно осуществлять упреждающие корректирующие меры. Организацию и реализацию управленческих мер способны выполнить только государственные структуры. В соответствии с полученными в данной работе результатами моделирования, на среднесрочную перспективу первоочередными задачами государства являются полная реализация программы вакцинации и финансовая поддержка экономики в необходимых объемах и сроках.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в Институте математических исследований сложных систем МГУ им. М.В. Ломоносова при поддержке гранта Российского научного фонда № 20-61-46004 по проекту “Мировое развитие и “предделы роста” в 21 веке: моделирование и прогноз”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vishnu Vyta, Sravanth Kumar Ramakuri, Anudeep Peddi, Kalyan Srinivas K.N. Nithish Ragav. *Mathematical Models for Predicting Covid-19 Pandemic: A Review* // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. 1797. 012009.
2. Куркина Е.С., Кольцова Э.М. // *Прикладная математика и информатика* № 66. – М.: Изд-во факультета ВМК МГУ. 2021. С. 41–66.
3. Еремеева Н.И. // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2020. Вып. 4. С. 14–27.
4. Kermack W.O., McKendrick A.G. // *Proceedings of the Royal Society of London Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. 1927. V. 115. № 772. P. 700–721.
5. Sanderson W.C. / In Lutz W. [4], 1994. P. 33–71.
6. Lutz W., (Ed.). *Population, Development, Environment: Understanding Their Interactions in Mauritius*. – Berlin: Springer, 1994.
7. Comunian A., Gaburro R., Giudici M. // *Physica D*. 2020. 413. 132674.
8. Worldometer: <https://www.worldometers.info/coronavirus/>
9. Мировые Финансы: <http://global-finances.ru/vvp-rossii-po-godam/>
10. Мир Таблиц: <https://worldtable.info/gosudarstvo/chislennost-naselenija-rossii-po-godam>
11. Pyragas K. // *Physics Letters A*. 1992. V. 170. P. 421–428.
12. Леонов Г.А., Звягинцева К.А. // *Вестник СПбГУ. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*. 2015. Т. 2. № 60. Вып. 3. С. 342–353.
13. Leonov G.A., Zvyagintseva K.A., Kuznetsova O.A. // *IFAC-PapersOnLine*. – 2016. V. 49 № 14. P. 56–61.
14. Николаев И.А., Марченко Т.Е., Точилкина О.С. // *Институт стратегического развития*. Москва. 2019. [https://www.fbk.ru/upload/docs/Investments\\_report.pdf](https://www.fbk.ru/upload/docs/Investments_report.pdf)

## MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF OVERCOMING THE COVID-19 PANDEMIC AND RESTORING ECONOMIC GROWTH

Academician of the RAS V. A. Sadovnichiy<sup>a</sup>, Foreign member of the RAS A. A. Akaev<sup>b</sup>,  
A. I. Zvyagintsev<sup>c</sup>, and A. I. Sarygulov<sup>d</sup>

<sup>a</sup>Moscow State University, Moscow, Russian Federation

<sup>b</sup>Moscow State University Institute of Complex Systems Mathematical Research, Moscow, Russian Federation

<sup>c</sup>Mikhailovskaya Military Artillery Academy, St. Petersburg, Russian Federation

<sup>d</sup>St. Petersburg State University of Economics, St. Petersburg, Russian Federation

A mathematical model, which is proposed by authors, not only generates different scenario of development, but also simultaneously forms specific management measures aimed at suppressing the pandemic and restoring economic growth. The developed model of the mutual influence of the pandemic and the economy is not only a tool for effective and adequate forecasting, but is also capable of simulating various scenarios that may well correspond to real epidemiological processes. The possibilities to practically manage the dynamics of the pandemic and GDP in order to stabilize socio-economic development – one of the advantage of this model.

*Keywords:* COVID-19, economic systems, governance models, restoring economic growth