ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 505, с. 14–18

МАТЕМАТИКА

УДК 519.642.3

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ I РОДА СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ НА ЗАМКНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

 член-корреспондент РАН С. И. Смагин[1,*]

Поступило 09.12.2021 г.
После доработки 11.04.2022 г.
Принято к публикации 02.06.2022 г.

Рассматривается прямой метод (метод саморегуляризации) численного решения слабо сингулярного интегрального уравнения I рода на замкнутой поверхности. Данное уравнение представляет собой интегральную формулировку внутренней и внешней трехмерных задач Дирихле для уравнения Лапласа, если их решения искать в виде потенциала простого слоя. Оно аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений, которая решается численно. При этом применяется новый метод осреднения ядра интегрального оператора. Он сохраняет условную корректность дискретизованной задачи и существенно повышает скорость сходимости ее решения к точному решению интегрального уравнения.

Ключевые слова: интегральное уравнение, оператор, метод, осреднение, аппроксимация, численное решение

DOI: 10.31857/S2686954322040178

Изучается прямой метод (метод саморегуляризации) численного решения слабо сингулярного интегрального уравнения I рода на замкнутой поверхности. Такие уравнения получаются, например, при использовании методов теории потенциала для решения внутренних и внешних трехмерных краевых задач для эллиптических уравнений математической физики [1–3]. В общем случае задачи отыскания их решений являются некорректно поставленными и решаются с привлечением достаточно громоздких методов регуляризации [4, 5].

В данной работе исходное уравнение аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), для получения которой используется согласованный с шагом дискретизации новый метод осреднения ядра интегрального оператора. Его применение позволяет создавать достаточно простые схемы численного решения рассматриваемых слабосингулярных интегральных уравнений I рода с легко вычисляемыми коэффициентами. Присутствие слабой особенности в ядре интегрального оператора дает возможность не включать явно процедуру регуляризации в алгоритмы численного решения таких уравнений.

Применяемый подход основан на результатах работы [6], но позволяет получать вычислительные схемы с более высоким порядком аппроксимации без существенного усложнения алгоритмов. Проведено исследование условно-корректной разрешимости дискретизованной задачи, аппроксимации и сходимости ее решения, получены оценки скоростей убывания невязки и сходимости приближенного решения к обобщенному решению исходной задачи в зависимости от порядка дискретизации.

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим интегральное уравнение

$$(Aq)(x) \equiv \int\limits_{\Gamma} \frac{q(y)}{r} d\Gamma_y = f(x), \quad x \in \Gamma. \tag{1}$$

Здесь Γ – ограниченная замкнутая липшицева поверхность, которая делит трехмерное евклидово пространство R^3 на внутреннюю область Ω_i и внешнюю область Ω_e, $\Omega_e = R^3 \backslash \bar{\Omega}_i$, $r = |x - y|$, $d\Gamma_y$ – элемент площади поверхности в точке y, f – известная функция, q – искомое решение.

Уравнение (1) представляет собой уравнение Фредгольма I рода со слабой особенностью в ядре. К уравнениям вида (1) и системам, содержащим такие уравнения, приводятся многие трех-

[1] *Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровский федеральный исследовательский центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровск, Россия*
**E-mail: smagin@ccfebras.ru*

мерные задачи математической физики. Например, решение как внутренней, так и внешней задач Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega_{i(e)}, \quad u = f, \quad x \in \Gamma, \\ u = O(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty, \tag{2}$$

может быть представлено в виде

$$u(x) = (Aq)(x), \quad x \in \Omega_{i(e)}, \tag{3}$$

где q – решение уравнения (1), Δ – оператор Лапласа.

Под обобщенным решением уравнения (1) с правой частью $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ будем подразумевать обобщенную функцию $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$, удовлетворяющую равенствам

$$\langle g, Aq\rangle_\Gamma = \langle g, f\rangle_\Gamma \quad \forall g \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{4}$$

Здесь $H^\alpha(\Gamma)$ – обобщенное пространство С.Л. Соболева функций на Γ, $\alpha > 0$, $H^{-\alpha}(\Gamma)$ – сопряженное к $H^\alpha(\Gamma)$ пространство, $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ – отношение двойственности на $H^{-\alpha}(\Gamma) \times H^\alpha(\Gamma)$, расширяющее скалярное произведение в $H^0(\Gamma)$.

Справедливы следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. *Оператор A – положительный оператор в $H^0(\Gamma)$. Его энергетическое пространство совпадает с $H^{-\alpha}(\Gamma)$.*

Т е о р е м а 2. *Уравнение* (1) *имеет единственное обобщенное решение $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ при любой правой части $f \in H^{1/2}(\Gamma)$. При этом выполняется неравенство*

$$\|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \le C\|f\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

где C – положительная константа, не зависящая от f.

Доказательства теорем 1 и 2 имеются в [7, 8].

2. МЕТОД ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Пусть $\{\Gamma_i\}$ – покрытие поверхности Γ системой окрестностей узловых точек $x_i' \in \Gamma$, $i = 1, 2, \ldots, N$, лежащих внутри сфер радиусов h_i с центрами в x_i', и $\{\varphi_i\}$ – подчиненное ему разбиение единицы [9]. Тогда $\operatorname{supp}\varphi_i \subset \Gamma_i$, $\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(x) = 1\ \forall x \in \Gamma$.

В качестве функций, образующих разбиение единицы, можно выбрать функции $\varphi_i \in C^1(\Gamma)$, равные

$$\varphi_{ix} = \varphi_i(x) = \varphi_i'(x)\Big/\sum_{j=1}^{N}\varphi_j'(x),$$

где

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases}(1 - r_{ix}'^2/h_i^2)^3, & r_{ix}' < h_i,\\ 0, & r_{ix}' \ge h_i,\end{cases} \qquad r_{ix}' = |x - x_i'|.$$

Приближенное решение уравнения (1) будем искать на сетке $\{x_i\}$, узлами которой являются “центры тяжести” функций φ_i,

$$\mathbf{x}_i = \frac{1}{\overline{\varphi}_i}\int_\Gamma \mathbf{x}\varphi_i(x)\,d\Gamma_x, \quad \overline{\varphi}_i = \int_\Gamma \varphi_i(x)\,d\Gamma_x, \\ i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5}$$

При этом будем предполагать, что для всех $i = 1, 2, \ldots, N$ выполняются неравенства

$$0 < h' \le r_{ij}, \quad i \ne j, \quad h' \le h_i \le h, \\ h/h' \le p_0 < \infty, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{6}$$

где h', h – положительные числа, зависящие от N, p_0 не зависит от N, $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$.

З а м е ч а н и е 1. Результаты данной работы справедливы и в случае, когда

$$\varphi_i(x) = \begin{cases}1, & x \in \Gamma_i,\\ 0, & x \notin \Gamma_i,\end{cases} \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing, \\ i \ne j, \quad \bigcup_{i=1}^{N}\overline{\Gamma}_i = \Gamma. \tag{7}$$

Обозначим через U_h пространство N-мерных векторов $q_h = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$, где $q_1, q_2, \ldots, q_N$ – вещественные числа. Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\tilde{q}_h(y) = \sum_{j=1}^{N}\tilde{q}_j\varphi_j(y), \quad y \in \Gamma,$$

где $\tilde{q}_h = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_N)$ – элемент пространства U_h, удовлетворяющий СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\tilde{q}_j = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{8}$$

Здесь

$$A_{ij} = \frac{\alpha_i}{\overline{\varphi}_i}\delta_{ij} + S_{ij}, \quad \alpha_i = \int_\Gamma \frac{d\Gamma_x}{r_{ix}} - \sum_{j=1}^{N}S_{ij}\overline{\varphi}_j, \\ \delta_{ij} = \begin{cases}1, & i = j,\\ 0, & i \ne j,\end{cases} \\ S_{ij} = S(r_{ij}) \equiv \int_{R^3} S_{jx}\psi_{ix}dx, \\ S_{jx} = S_j(x) = \int_{R^3}\frac{\psi_{jy}}{r}dy, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N, \\ \psi_{ix} = \psi(r_{ix}) = (\pi\sigma^2)^{-3/2}\exp(-r_{ix}^2/\sigma^2), \\ r_{ix} = |x - x_i|, \quad f_i = \int_\Gamma \frac{\varphi_i}{\overline{\varphi}_i}f\,d\Gamma, \tag{9}$$

σ — радиус осреднения, который выбирается из условия хорошей аппроксимации соответствующих интегральных уравнений [6],

$$c_1 h' \le \sigma \le c_2 h, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{10}$$

c_1, c_2 — положительные числа, не зависящие от N.

В операторной форме уравнение (8) можно записать в виде

$$A_h \tilde{q}_h = f_h, \tag{11}$$

где A_h — матрица с коэффициентами A_{ij}, $f_h = (f_1, f_2, \ldots, f_N)$.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ДИСКРЕТИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

Введем в U_h скалярные произведения

$$\begin{gathered}(g_h, q_h) \equiv \sum_{i,j=1}^{N} q_i g_i \overline{\varphi}_i,\\ [g_h, q_h] \equiv (g_h, A_h q_h) = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} q_i \overline{\varphi}_i g_j \overline{\varphi}_j\end{gathered} \tag{12}$$

и рассмотрим условия, при которых пространство U_h со скалярным произведением $[g_h, q_h]$ является гильбертовым. Для этого достаточно доказать положительную определенность матрицы A_h.

Опуская промежуточные выкладки, выражения для S_{ix} и S_{ij} преобразуем к виду

$$S_{ix} = \int_{R^3} \frac{\exp(-r_{iy}^2/\sigma^2)}{\pi^{3/2}\sigma^3 r} dy = \frac{2}{\pi^{1/2} r_{ix}} \int_0^{r_{ix}/\sigma} \exp(-t^2) dt,$$

$$\begin{aligned} S_{ij} &= 2\int_{R^3} \frac{\psi_{jx}}{\pi^{1/2} r_{ix}} \int_0^{r_{ix}/\sigma} \exp(-t^2) dt dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2} r_{ij}} \int_0^{r_{ij}/\sigma} \exp(-t^2/2) dt, \quad i \ne j, \end{aligned} \tag{13}$$

$$S_{ii} = \lim_{r \to 0} S(r) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2}\sigma}.$$

Л е м м а 1 [6]. *Пусть выполняются условия* (6) *и* $q_1, q_2, \ldots, q_N$ — *произвольные вещественные числа, такие что*

$$\sum_{i=1}^{N} q_i^2 \ne 0. \tag{14}$$

Тогда при любом $\sigma > 0$ *выполняются неравенства*

$$(S_h q_h, q_h) \equiv \sum_{i,j=1}^{N} S_{ij} q_i \overline{\varphi}_i q_j \overline{\varphi}_j > 0. \tag{15}$$

Л е м м а 2. *При выполнении условий* (6) *справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma} \varphi_{jy} (S_{iy} - S_{ij}) d\Gamma_y \ge -C \frac{h^2}{\sigma}, \tag{16}$$

где положительная константа C не зависит от h и σ.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия лемм 1 и 2. Тогда $\forall q_h$ и достаточно малых σ и h/σ выполняется неравенство*

$$(A_h q_h, q_h) \ge c_0 \sigma (q_h, q_h), \tag{17}$$

где положительная константа c_0 не зависит от h и σ.

Введенные равенствами (12) скалярные произведения порождают в пространстве U_h нормы

$$\|q_h\|_0^2 = (q_h, q_h), \quad \|q_h\|^2 = [q_h, q_h]. \tag{18}$$

Первая из них согласована с нормой пространства $H^0(\Gamma)$, а вторая, при выполнении условий теоремы 3, — с энергетической нормой оператора A, которая эквивалентна норме пространства $H^{-1/2}(\Gamma)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно при выполнении условий теоремы 3 перейти в (18) к пределам по h и σ при h, $\sigma \to 0$.

4. АППРОКСИМАЦИЯ И СХОДИМОСТЬ

Будем считать, что условия корректной разрешимости системы (8), сформулированные в теореме 3, выполняются. Тогда ее решение существует и единственно при любой правой части в силу положительной определенности матрицы этой системы, которая вытекает из неравенства (17).

Введем обозначения

$$\begin{gathered}(Aq)_i = \int_{\Gamma} \frac{\varphi_i(x)}{\overline{\varphi}_i} (Aq)(x) d\Gamma_x,\\ \tilde{f}_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} q_j \overline{\varphi}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, N.\end{gathered} \tag{19}$$

Из (2) и (8) следует, что

$$(Aq)_h = f_h, \quad A_h q_h = \tilde{f}_h. \tag{20}$$

С учетом (11), (18)–(20) имеем

$$\|\tilde{q}_h - q_h\|^2 = (\tilde{q}_h - q_h, A_h(\tilde{q}_h - q_h)) = (\tilde{q}_h - q_h, f_h - \tilde{f}_h).$$

Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского для сумм и соотношения (17), (18), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}_h - q_h\|^2 &\le \|\tilde{q}_h - q_h\|_0 \|f_h - \tilde{f}_h\|_0 \le \\ &\le C\sigma^{-1/2} \|q_h - \tilde{q}_h\| \|f_h - \tilde{f}_h\|_0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\tilde{q}_h - q_h\| \le C\sigma^{-1/2} \|f_h - \tilde{f}_h\|_0, \tag{21}$$

где C — положительная константа, не зависящая от q и h.

Таким образом, для доказательства сходимости решения системы (8) к точному решению задачи (2) и оценки ее скорости достаточно получить оценку погрешности аппроксимации. Имеем

$$\left(\tilde{f}_h - f_h\right)_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} q_j \overline{\varphi}_j - (Aq)_i =$$

$$= \alpha_i q_i + \sum_{j=1}^{N} S_{ij} q_j \overline{\varphi}_{ij} - \int_\Gamma \frac{\varphi_{ix}}{\overline{\varphi}_i} \int_\Gamma \frac{q_y}{r} d\Gamma_y d\Gamma_x =$$

$$= \int_\Gamma \frac{\varphi_{ix}}{\overline{\varphi}_i} \int_\Gamma \left(\frac{q_x}{r_{iy}} - \frac{q_y}{r}\right) d\Gamma_y d\Gamma_x - \sum_{j=1}^{N} S_{ij} (q_i - q_j) \overline{\varphi}_j = \quad (22)$$

$$= I_i + J_i + K_i$$

и

$$\left\|f_h - \tilde{f}_h\right\|_0 \le \left\|I_h\right\|_0 + \left\|J_h\right\|_0 + \left\|K_h\right\|_0, \quad (23)$$

где

$$I_i = \int_\Gamma \frac{\varphi_{ix}}{\overline{\varphi}_i} q_x F_i(x) d\Gamma_x, \quad F_i(x) = \int_\Gamma \left(\frac{1}{r_{iy}} - \frac{1}{r}\right) d\Gamma_y,$$

$$r = |x - y|, \quad r_{iy} = |x_i - y|,$$

$$J_i = \int_\Gamma \frac{\varphi_{ix}}{\overline{\varphi}_i} \int_\Gamma (q_x - q_y) V(r) d\Gamma_y d\Gamma_x, \quad (24)$$

$$V(r) = 1/r - S(r),$$

$$K_i = \sum_{j=1}^{N} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{\varphi_{ixjy}}{\overline{\varphi}_i} (q_x - q_y)(S(r) - S_{ij}) d\Gamma_y d\Gamma_x,$$

$$\varphi_{ixjy} = \varphi_{ix}\varphi_{jy}.$$

Следовательно, для получения нужной оценки порядка аппроксимации достаточно получить оценки сверху норм векторов I_h, J_h и K_h с компонентами из (24). Объединив полученные результаты, приходим к теореме.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и* q, $\tilde{q}_h$ *– принадлежащие* $H^1(\Gamma)$ *точное решения задачи* (2) *и, удовлетворяющее системе* (8), *ее приближенное решение. Тогда справедливы неравенства*

$$\left\|\tilde{q}_h - q_h\right\| \le Ch^{3/2-\varepsilon} \|q\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)}, \quad (25а)$$

$$\left\|A_h(\tilde{q}_h - q_h)\right\|_0 = \left\|f_h - \tilde{f}_h\right\|_0 \le Ch^{2-\varepsilon} \|q\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)}, \quad (25б)$$

где C *– положительная константа, не зависящая от* q *и* h, ε *– сколь угодно малая константа* $\varepsilon > 0$.

З а м е ч а н и е 2. Оценки (25) на 1 порядок лучше аналогичных оценок, полученных ранее в работе [6], где интегральное уравнение (1) аппроксимировалось СЛАУ, коэффициенты A_{ij} которой определялись формулами (9) без учета слагаемых, содержащих α_i.

З а м е ч а н и е 3. Чтобы воспользоваться приближенным решением $\tilde{q}_h$ интегрального уравнения (1) для интегрального представления приближенного решения $\tilde{u}_h$ как внутренней, так и внешней краевой задачи (2) в произвольной точке $x \in R^3 \backslash \Gamma$ соответствующий потенциал простого слоя можно вычислять по формуле

$$\tilde{u}_h(x) = (A\tilde{q}_h)(x) = \int_\Gamma \frac{\tilde{q}_h(y)}{r} d\Gamma_y, \quad x \in R^3 \backslash \Gamma \quad (26)$$

или, используя более простые соотношения,

$$\tilde{u}_h(x) = \sum_{j=1}^{N} S_j(x) \tilde{q}_j \overline{\varphi}_j, \quad x \in R^3 \backslash \Gamma. \quad (27)$$

З а м е ч а н и е 4. Оценки погрешностей приближенных решений внутренних и внешних краевых задач (2), вычисляемых по формуле (27), можно получить из неравенства

$$\left\|\nabla(\tilde{u}_h - u)\right\|^2_{H^0(R^3)} = \int_{R^3} \left(\nabla \sum_{j=1}^{N} S_j(x)(\tilde{q}_j - q_j)\overline{\varphi}_j\right)^2 dx =$$

$$= 4\pi \sum_{ij=1}^{N} S_{ij} (\tilde{q}_i - q_i) \overline{\varphi}_i (\tilde{q}_j - q_j) \overline{\varphi}_j \le \quad (28)$$

$$\le 4\pi \sum_{ij=1}^{N} A_{ij} (\tilde{q}_i - q_i) \overline{\varphi}_i (\tilde{q}_j - q_j) \overline{\varphi}_j = 4\pi \left\|\tilde{q}_h - q_h\right\|^2.$$

Отсюда и из (25а) имеем

$$\left\|\nabla(\tilde{u}_h - u_h)\right\|_{H^0(\Omega_{i(e)})} \le \left\|\nabla(\tilde{u}_h - u_h)\right\|_{H^0(R^3)} \le$$

$$\le Ch^{3/2-\varepsilon} \|q\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)}.$$

Рассмотренная методика апробирована при численном решении трехмерных краевых задач для уравнения Гельмгольца и дифракции (трансмиссии) акустических волн в работах [10, 11]. Число точек дискретизации N варьировалось от 500 до 128 000. Полученные в результате дискретизации СЛАУ решались численно обобщенным методом минимальной невязки (GMRES) с применением мозаично-скелетонных аппроксимаций [12, 13]. Для выполнения расчетов были использованы вычислительные ресурсы ЦКП "Центр данных ДВО РАН". Проведенные численные эксперименты показали достаточно высокую эффективность применяемого подхода. При этом при больших N, скорости сходимости приближенных решений интегральных уравнений и исходных дифференциальных задач имели те же порядки, что и в теореме 4.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00450).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвилли М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука. 1976. 664 с.
2. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge: Cambridge University Press. 2000. 372 p.
3. *Beale J.T.* A grid-based boundary integral method for elliptic problems in three dimensions // SIAM J. Numer. Analys. 2004. V. 42. № 2. P. 599–620.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 284 с.
5. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: СО РАН. 2018. 511 с.
6. *Смагин С.И.* Численное решение интегрального уравнения I рода со слабой особенностью для плотности потенциала простого слоя // ЖВМиМФ. 1988. Т. 28. № 11. С. 1663–1673.
7. *Hsiao G.C., Wendland W.L.* A finite element method for some integral equations of the first kind // J. Math. Anal. and Appl. 1977. V. 58. № 3. P. 449–481.
8. Обобщенные решения интегральных уравнений I рода со слабыми особенностями на замкнутых поверхностях // ДУ. 1986. Т. 25. № 2. С. 340–341.
9. *Треногин В.*А. Функциональный анализ. М.: Физматлит. 2007. 488 с.
10. *Каширин А.А., Смагин С.И.* О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // ЖВМиМФ. 2012. Т. 52. № 8. С. 1492–1505.
11. *Каширин А.А., Смагин С.И., Талтыкина М.Ю.* Применение мозаично-скелетонного метода при численном решении трехмерных задач Дирихле для уравнения Гельмгольца в интегральной форме // ЖВМиМФ. 2016. Т. 56. № 4. С. 625–638.
12. *Saad Y., Schultz M.* GMRES: A General Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems // SIAM J. Sci Stat. Comput. 1986. V. 7. № 3. P. 856–869.
13. *Савостьянов Д.В., Ставцев С.Л., Тыртышников Е.Е.* Об использовании мозаично-скелетных аппроксимаций при решении гиперсингулярных интегральных уравнений // Численные методы, параллельные вычисления и информационные технологии. М.: МГУ. 2008. С. 225–244.

ON NUMERICAL SOLVING OF THE FIRST KIND INTEGRAL EQUATION WITH A WEAK SINGULARITY IN THE KERNEL ON A CLOSED SURFACE

Corresponding member of the RAS S. I. Smagin[a]

[a] *Khabarovsk Federal Research Centre of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation*

A direct method (self-regularization method) for the numerical solution of a weakly singular integral equation of the first kind on a closed surface is considered. This equation is an integral formulation of the internal and external three-dimensional Dirichlet problems for the Laplace equation, if their solutions are sought in the form of the potential of a simple layer. It is approximated by a system of linear algebraic equations, which is solved numerically. In this case, a new method of averaging the kernel of the integral operator is used. It preserves the conditional correctness of the discretized problem and significantly increases the rate of convergence of its solution to the exact solution of the integral equation.

Keywords: integral equation, operator, method, averaging, approximation, numerical solution