ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 505, с. 30–36

МАТЕМАТИКА

УДК 519.633.8+517.958:533.7

УСЛОВИЯ ДИССИПАТИВНОСТИ ЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МНОГОМЕРНОЙ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

 А. А. Злотник[1,2,*]

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным
Поступило 16.03.2022 г.
После доработки 23.05.2022 г.
Принято к публикации 03.06.2022 г.

Изучается явная двухслойная разностная схема для линеаризованной многомерной квазигазодинамической системы уравнений. Для начально-краевой задачи на неравномерной прямоугольной сетке впервые даются достаточные условия L^2-диссипативности типа Куранта энергетическим методом. Для задачи Коши на равномерной сетке усовершенствуются как необходимые, так и достаточные условия L^2-диссипативности в спектральном методе. Указывается новая форма задания параметра релаксации, гарантирующая равномерную ограниченность сверху и снизу числа типа Куранта как относительно сетки, так и числа Маха.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, квазигазодинамическая система уравнений, линеаризация, явная разностная схема, диссипативность

DOI: 10.31857/S2686954322040191

К настоящему времени разработан богатый набор численных методов решения системы уравнений газовой динамики [1–3]. В их число входят явные симметричные по пространству сеточные методы, основанные на предварительной квазигазодинамической (КГД) регуляризации этой системы [4–6]. Несмотря на многолетний успешный опыт практического применения таких методов, теория их устойчивости длительное время была развита слабо.

В данном сообщении изучается явная двухслойная симметричная по пространству разностная схема для линеаризованной на постоянном решении многомерной КГД системы уравнений. Для начально-краевой задачи на неравномерной прямоугольной сетке впервые даются достаточные условия L^2-диссипативности типа Куранта с помощью энергетического метода; одномерный случай см. в [7]. Для задачи Коши на равномерной сетке усовершенствуются как необходимые, так и достаточные условия L^2-диссипативности, недавно выведенные спектральным методом в [8]. Указывается новая форма задания параметра релаксации τ, гарантирующая равномерную ограниченность сверху и снизу числа типа Куранта как от сетки, так и от числа Маха как в достаточных, так и в необходимом условии. В нее входят отношения модулей компонент скорости газа к шагам сетки по отдельным координатным направлениям.

1. Выпишем линеаризованную КГД систему уравнений. Пусть $\rho > 0$, $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_n)$, $\varepsilon > 0$ — плотность, скорость, удельная внутренняя энергия газа зависят от (x, t), где $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \Omega$ и $t \geq 0$, а Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $n = 1,2,3$. Введем $\mu = \alpha_s\tau p$, $\lambda = \alpha_{1s}\tau p$, $\tilde{\varkappa} = \gamma\hat{\alpha}_P\tau p$ — искусственные коэффициенты динамической и объемной вязкости и нормированный коэффициент теплопроводности, где $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ — давление, $\tau > 0$ — параметр релаксации, $\gamma > 1$ — показатель адиабаты, $\alpha_s \geq 0$ и $1/\hat{\alpha}_P$ — числа Шмидта и Прандтля с $\hat{\alpha}_P \geq 0$.

Рассмотрим постоянное решение $(\rho,\mathbf{u},\varepsilon)(x,t) = (\rho_*,\mathbf{u}_*,\varepsilon_*)$, где $\rho_* > 0$, $\mathbf{u}_* = (u_{*1},\ldots,u_{*n})$, $\varepsilon_* > 0$. Введем фоновые значения $\mu_* = \hat{\alpha}_s\tau\rho_* c_*^2$, $\lambda_* = \hat{\alpha}_{1s}\tau\rho_* c_*^2$, $\tilde{\varkappa}_* = \hat{\alpha}_P\tau\rho_* c_*^2$, где $c_* = \sqrt{\gamma(\gamma-1)\varepsilon_*}$ — фоновая скорость звука, $\hat{\alpha}_s = \dfrac{\alpha_s}{\gamma} \geq 0$, $\hat{\alpha}_{1s} = \dfrac{\alpha_{1s}}{\gamma}$;

[1] Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия
[2] Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия
**E-mail: azlotnik@hse.ru*

пусть $\hat{\alpha}_{1s} \geq -\dfrac{\hat{\alpha}_s}{3}$. Для фонового значения τ сохранено прежнее обозначение. Введем малые возмущения постоянного решения в виде $\left(\rho_*\tilde{\rho}, \dfrac{c_*}{\sqrt{\gamma}}\tilde{\mathbf{u}}, \sqrt{\gamma-1}\varepsilon_*\tilde{\varepsilon}\right)$, где $\mathbf{z} = (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varepsilon})^T$ – вектор-столбец безразмерных малых возмущений. Тогда линеаризованная КГД система дифференциальных уравнений 2-го порядка по x с постоянными коэффициентами такова:

$$\partial_t\tilde{\rho} + c_*\left(\mathbf{M}\nabla\tilde{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}\right) = \\ = \tau c_*^2\left[\frac{1}{\gamma}\Delta\tilde{\rho} + (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{M}\nabla\tilde{\rho} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{\gamma}}(\mathbf{M}\nabla)\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}}\Delta\tilde{\varepsilon}\right],$$

$$\partial_t\tilde{u} + c_*\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\nabla\tilde{\rho} + (\mathbf{M}\nabla)\tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}}\nabla\tilde{\varepsilon}\right) = \\ = \tau c_*^2\left[\frac{2}{\sqrt{\gamma_*}}(\mathbf{M}\nabla)\nabla\tilde{\rho} + \hat{\alpha}_s\Delta\tilde{\mathbf{u}} + (\hat{a}_0+1)\nabla\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}} + \right. \\ \left. + (\mathbf{M}\nabla)(\mathbf{M}\nabla)\tilde{\mathbf{u}} + \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}}(\mathbf{M}\nabla)\nabla\tilde{\varepsilon}\right],$$

$$\partial_t\tilde{\varepsilon} + c_*\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_*}}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\nabla\tilde{\varepsilon}\right) = \\ = \tau c_*^2\left[\frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}}\Delta\tilde{\rho} + \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}}(\mathbf{M}\nabla)\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}} + \right. \\ \left. + \left(\hat{\alpha}_P + \frac{1}{\gamma_*}\right)\Delta\tilde{\varepsilon} + (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{M}\nabla\tilde{\varepsilon}\right]$$

в Ω при $t > 0$ аналогично [9]. Здесь операторы div и $\nabla = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$ берутся по x, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$ и $\mathbf{M}\nabla = \mathbf{M}\cdot\nabla$, $\mathbf{M}\nabla\rho = \mathbf{M}\cdot\nabla\rho$ и т.д., а $\cdot$ означает скалярное произведение векторов. Также $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_n)^T$ и $M_k = \dfrac{u_{*k}}{c_*}$, $\gamma_* = \dfrac{\gamma}{\gamma-1}$, $\hat{a}_0 = \dfrac{1}{3}\hat{\alpha}_s + \hat{\alpha}_{1s} \geq 0$. Тогда $M = |\mathbf{M}| = \dfrac{|\mathbf{u}_*|}{c_*}$ – фоновое число Маха.

Указанную систему уравнений перепишем в симметричной матричной форме

$$\partial_t\mathbf{z} + c_*B^{(i)}\partial_i\mathbf{z} - \\ - \tau c_*^2[A^{(ii)}\partial_i^2\mathbf{z} + (1-\delta^{(ij)})\hat{A}^{(ij)}\partial_i\partial_j\mathbf{z}] = 0, \tag{1}$$

где $B^{(i)}$ и $A^{(ii)}$, $\hat{A}^{(ij)}$ – матрицы конвективных и вязких слагаемых (порядка $n+2$). Здесь и ниже по повторяющимся индексам i, j (и только по ним) предполагается суммирование от 1 до n, а $\delta^{(ij)}$ – символ Кронекера.

Запишем эти матрицы. Пусть $\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}$ – векторы-столбцы стандартного координатного базиса в $\mathbb{R}^{n+2}$. Введем симметричные матрицы $E^{(k,l)} := \mathbf{e}_k\mathbf{e}_l^T + \mathbf{e}_l\mathbf{e}_k^T$, тогда

$$B^{(k)} = M_kI_{n+2} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}E^{(0,k)} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}}E^{(k,n+1)},$$

$$D_\gamma := \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{\gamma}, \hat{\alpha}_s, \ldots, \hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_P + \frac{1}{\gamma_*}\right\},$$

$$A^{(kk)} = D_\gamma + M_k^2I_{n+2} + \frac{2}{\sqrt{\gamma}}M_kE^{(0,k)} + \\ + \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}}M_kE^{(k,n+1)} + (\hat{a}_0+1)\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T + \frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}}E^{(0,n+1)},$$

$$\hat{A}^{(kl)} = M_kM_lI_{n+2} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(M_kE^{(0,l)} + M_lE^{(0,k)}) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}}(M_kE^{(l,n+1)} + M_lE^{(k,n+1)}) + \frac{1}{2}(\hat{a}_0+1)E^{(k,l)}$$

при всех k, l от 1 до n (так же, как и в [8]). Здесь и ниже I_l – единичная матрица порядка l, $\operatorname{diag}\{d_{11}, \ldots, d_{(n+2)(n+2)}\}$ – диагональная матрица с перечисленными диагональными элементами. Матрицы $B^{(k)}$, $A^{(kk)}$, $\hat{A}^{(kl)}$ – симметричные и $\hat{A}^{(kl)} = \hat{A}^{(lk)}$.

Матрицы $A^{(kk)}$ и $B^{(k)}$ связаны формулой [8]

$$A^{(kk)} = (B^{(k)})^2 + D + \hat{a}_0\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T \geq 0, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{2}$$

где $D := \operatorname{diag}\{0, \hat{\alpha}_s, \ldots, \hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_P\}$ – матрица порядка $n+2$.

Матрицы $B^{(k)}$, $A^{(kk)}$, $\hat{A}^{(kl)}$ $(k \neq l)$ можно также записать в 3×3-блочном виде, см. [9] (где в диагональных элементах $A^{(kk)}$ следует убрать $\sqrt{\cdot}$ в $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\gamma_*}$).

Для решения задачи Коши для системы уравнений типа (1) известна оценка

$$\sup_{t\geq 0}\|\mathbf{z}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\mathbf{z}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

где $\mathbf{z}|_{t=0} = \mathbf{z}_0$; аналогичная оценка верна и для начально-краевой задачи с однородным краевым условием Дирихле. Они явились исходными для анализа свойства диссипативности аппроксимирующей явной симметричной разностной схемы.

2. Рассмотрим сначала условия диссипативности абстрактной двухслойной явной разностной схемы. Пусть H_h – семейство евклидовых пространств со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{H_h}$ и

нормой $\|\cdot\|_{H_h}$. Пусть $\|\cdot\|$ — согласованная с $\|\cdot\|_{H_h}$ норма в пространстве линейных операторов $\mathcal{L}[H_h]$, действующих в H_h. Пусть I — единичный оператор.

Введем неравномерную сетку $\overline{\omega}^{h_t}$ с узлами $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{\overline{m}} = T$ на $[0,T]$ и шагами $h_{tm} = t_m - t_{m-1}$. Пусть $\omega^{h_t} = \overline{\omega}^{h_t} \backslash T$ и $y^m = y(t_m)$. Определим сеточные операторы

$$\delta_t y^m = \frac{y^{m+1} - y^m}{h_{t(m+1)}}, \quad \hat{y}^m = y^{m+1},$$

$$\breve{I}_{h_t}^{m+1} y = \sum_{l=0}^{m} y^l h_{t(l+1)}, \quad 0 \le m \le \overline{m} - 1.$$

Рассмотрим явную двухслойную разностную схему

$$\delta_t y^m + G_m y^m = b^m \ \text{ в } \ H_h \ \text{ на } \ \omega^{h_t} \tag{3}$$

с $G_m \in \mathcal{L}[H_h]$. Функция $y\colon \overline{\omega}^{h_t} \to H_h$ — искомая, а $y^0 \in H_h$ и $b\colon \omega^{h_t} \to H_h$ заданы.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\max_{0\le m\le \overline{m}-1} \|I - h_{t(m+1)} G_m\| \le 1$ *или*, *эквивалентно*,

$$h_{t(m+1)} \|G_m w\|_{H_h}^2 \le 2(G_m w, w)_{H_h} \quad \forall w \in H_h, \quad 0 \le m \le \overline{m} - 1; \tag{4}$$

в частности, $G_m \ge 0$. *Тогда для схемы* (3) *верна оценка*

$$\max_{0\le m\le \overline{m}} \|y^m\|_{H_h} \le \|y^0\|_{H_h} + \breve{I}_{h_t}^{\overline{m}} \|b\|_{H_h}, \tag{5}$$

а при $b = 0$ *схема* H_h*-диссипативна*: $\|y^{\overline{m}}\|_{H_h} \le \|y^{\overline{m}-1}\|_{H_h} \le \ldots \le \|y^0\|_{H_h}$ *при всех* $y^0 \in H_h$.

Если операторы $I - h_{t(m+1)} G_m$, $0 \le m \le \overline{m} - 2$ *обратимы*, *то условие* (4) *не только достаточно*, *но и необходимо для справедливости свойства* H_h*-диссипативности*.

Если операторы G_m, $0 \le m \le \overline{m} - 1$ обратимы, то условие (4) можно переписать в виде

$$h_{t(m+1)} \le 2 \min_{v \ne 0} \frac{(G_m^{-1} v, v)_{H_h}}{\|v\|_{H_h}^2}, \quad 0 \le m \le \overline{m} - 1.$$

Ниже интерес представляет следующая запись явной двухслойной схемы (3)

$$\delta_t y + (c_* \mathcal{B} + c_*^2 \tau \mathcal{A}) y = b \ \text{ в } \ H_h \text{ на } \ \omega^{h_t}, \tag{6}$$

где $\mathcal{B}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(H_h)$ — операторы конвективных и вязких (без учета τ) слагаемых такие, что $\mathcal{B}^* = -\mathcal{B}$, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Они и $\tau > 0$ могут зависеть от t_m. Также $c_* > 0$ — нормировочный множитель. Фактически здесь $c_*^2 \tau \mathcal{A} = \frac{1}{2}(G + G^*)$, $c_* \mathcal{B} = \frac{1}{2}(G - G^*)$.

Пусть $\lambda_{\max}(\mathcal{A})$ — максимальное собственное значение оператора $\mathcal{A}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть операторы* $\mathcal{B}$ *и* $\mathcal{A}$ *связаны неравенством*

$$\|\mathcal{B} w\|_{H_h}^2 \le c_A (\mathcal{A} w, w)_{H_h} \quad \forall w \in H_h \ \text{ на } \ \omega^{h_t} \tag{7}$$

и $\lambda_{\max}(\mathcal{A}) \le \tilde{\lambda}$. *Если также* h_t *подчиняется условию*

$$(\sqrt{c_A} + \sqrt{\tilde{\lambda}} c_* \tau)^2 \hat{h}_t \le 2\tau \ \text{ на } \ \omega^{h_t}, \tag{8}$$

то оператор $G = c_* \mathcal{B} + c_*^2 \tau \mathcal{A}$ *удовлетворяет неравенству* (4), *и поэтому для решения явной схемы* (6) *верна оценка* (5), *а при* $b = 0$ — *свойство* H_h*-диссипативности*.

Операторный вид неравенства (7) таков: $-\mathcal{B}^2 \le c_A \mathcal{A}$, где $(-\mathcal{B}^2)^* = -\mathcal{B}^2 \ge 0$.

В довольно типичном варианте шаг по времени h_t и параметр τ задаются формулами $h_t = \frac{\beta \hat{h}}{c_*}$, $\tau_* = \frac{\alpha \hat{h}}{c_*}$ [4–6], где $\hat{h}$ — некоторый характерный шаг сетки по пространству, а $\beta > 0$ (число типа Куранта) и $\alpha > 0$ — параметры. Выбор $\hat{h}$ отнюдь не очевиден заранее и должен определяться в результате анализа устойчивости схемы. Тогда условие (8) принимает вид

$$\beta \le \beta_{suf}^{(0)}(\alpha) := \frac{2}{(\sqrt{c_A \alpha^{-1}} + \sqrt{\hat{h}^2 \tilde{\lambda} \alpha})^2} = \frac{2}{c_A \alpha^{-1} + 2\sqrt{c_A \hat{h}^2 \tilde{\lambda}} + \hat{h}^2 \tilde{\lambda} \alpha}, \tag{9}$$

т.е. форму условия на β в зависимости от α. Обратим внимание на то, что

$$\max_{\alpha > 0} \beta_{\mathrm{suf}}^{(0)}(\alpha) = \beta_{\mathrm{suf}}^{(0)}(\alpha_{\mathrm{opt}}) = \frac{1}{2\sqrt{c_A \hat{h}^2 \tilde{\lambda}}} = \frac{\alpha_{\mathrm{opt}}}{2 c_A} \quad \text{при} \quad \alpha_{\mathrm{opt}} = \sqrt{\frac{c_A}{\hat{h}^2 \tilde{\lambda}}}. \tag{10}$$

Указанное значение α_{opt} важно знать на практике как позволяющее максимально расширить условие на h_t. Отметим, что $\beta_{\mathrm{suf}}^{(0)}(\alpha)$ возрастает на $(0, \alpha_{\mathrm{opt}}]$, убывает на $[\alpha_{\mathrm{opt}}, +\infty)$ и $\beta_{suf}^{(0)}(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to +0$ и $\alpha \to +\infty$.

3. Выпишем разностную схему для линеаризованной КГД системы уравнений (1) и выполним энергетический анализ ее устойчивости. Пусть $\Omega = (0, X_1) \times \ldots \times (0, X_n)$. При $k = 1, \ldots, n$ введем на $[0, X_k]$ произвольную неравномерную сетку $\overline{\omega}_{kh}$ по

переменной x_k с узлами $0 = x_{k0} < x_{k1} < \ldots < x_{kN_k} = X_k$ и шагами $h_{kl} = x_{kl} - x_{k(l-1)}$. Пусть $\omega_{kh} = \bar{\omega}_{kh} \backslash \{0, X_k\}$. Введем также сетку ω^*_{kh} с узлами $x_{k(l-1/2)} = \frac{1}{2}(x_{k(l-1)} + x_{kl})$, $1 \le l \le N_k$ и шагами $\hat{h}_{kl} = (h_{kl} + h_{k(l+1)})/2$.

Введем разностные отношения

$$\delta_k v_{l-1/2} = \frac{v_l - v_{l-1}}{h_{kl}}, \quad \overset{\circ}{\delta}_k v_l = \frac{v_{l+1} - v_{l-1}}{2\hat{h}_{kl}},$$
$$\delta^*_k w_l = \frac{w_{l+1/2} - w_{l-1/2}}{\hat{h}_{kl}},$$

где $v_l = v(x_{kl})$, $w_{l-1/2} = w(x_{k(l-1/2)})$, скалярные произведения

$$(v, \tilde{v})_{\omega_{kh}} = \sum_{1 \le l \le N_k - 1} v_l \tilde{v}_l \hat{h}_{kl},$$
$$(w, \tilde{w})_{\omega^*_{kh}} = \sum_{1 \le l \le N_k} w_{l-1/2} \tilde{w}_{l-1/2} h_{kl}$$

и отвечающие им нормы $\|\cdot\|_{\omega_{kh}}, \|\cdot\|_{\omega^*_{kh}}$.

Л е м м а 1. *Пусть функция v определена на $\bar{\omega}_{kh}$. Верно неравенство $\|\overset{\circ}{\delta}_k v\|_{\omega_{kh}} \le \|\delta_k v\|_{\omega^*_{kh}}$* [9]. *Если $v|_{l=0,N_k} = 0$, то верны* также *неравенства*

$$\|\delta_k v\|_{\omega^*_{kh}} \le 4\tilde{h}^{-1}_{\min k} \|v\|_{\omega_{kh}}, \quad \|\overset{\circ}{\delta}_k v\|_{\omega_{kh}} \le \tilde{h}^{-1}_{\min k} \|v\|_{\omega_{kh}}, \quad (11)$$

где $\tilde{h}_{\min k} := \min_{1 \le l \le N_k - 1} \sqrt{h_{kl} h_{k(l+1)}} \ge h_{\min k} := \min_{1 \le l \le N_k} h_{kl}$.

Введем n-мерные сетки $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{1h} \times \ldots \times \bar{\omega}_{nh}$, $\omega_h = \omega_{1h} \times \ldots \times \omega_{nh}$, $\partial\omega_h = \bar{\omega}_h \backslash \omega_h$ и $\omega_{i^*,h}$, отличающуюся от ω_h заменой ω_{ih} на ω^*_{ih}, $1 \le i \le n$. Введем скалярные произведения функций $(v, \tilde{v})_{\omega_h} = (\ldots(v\tilde{v}, 1)_{\omega_{1h}}, \ldots, 1)_{\omega_{nh}}$ и $n+2$-мерных вектор-функций $(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})_{\omega_h} = (\ldots(\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}}, 1)_{\omega_{1h}}, \ldots, 1)_{\omega_{nh}}$, а также отвечающие им нормы $\|v\|_{\omega_h}$ и $\|\mathbf{v}\|_{\omega_h}$. Пусть скалярные произведения $(\cdot,\cdot)_{\omega_{i^*,h}}$ отличаются от $(\cdot,\cdot)_{\omega_h}$ заменой $(\cdot,1)_{\omega_{ih}}$ на $(\cdot,1)_{\omega^*_{ih}}$, $1 \le i \le n$. Введем H_h – пространство вектор-функций-столбцов $\mathbf{v}$: $\bar{\omega}_h \to \mathbb{R}^{n+2}$ с $\mathbf{v}|_{\partial\omega_h} = 0$, со скалярным произведением $(v, \tilde{v})_{H_h} = (v, \tilde{v})_{\omega_h}$.

Введем операторы $\mathscr{B}, \mathscr{A}$: $H_h \to H_h$ такие, что

$$\mathscr{B}\mathbf{v} := B^{(i)} \overset{\circ}{\delta}_i \mathbf{v},$$
$$\mathscr{A}\mathbf{v} := -(A^{(ii)}\delta^*_i \delta_i \mathbf{v} + (1 - \delta^{(ij)})\hat{A}^{(ij)} \overset{\circ}{\delta}_i \overset{\circ}{\delta}_j \mathbf{v}) \quad \text{на} \quad \omega_h \qquad (12)$$

для $\mathbf{v} \in H_h$ [9]. В силу симметрии матриц $B^{(k)}$, $A^{(kk)}$, $\hat{A}^{(kl)}$ для любых $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \in H_h$ имеем

$$(\mathscr{B}\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})_{H_h} = -(B^{(i)}\mathbf{v}, \overset{\circ}{\delta}_i \tilde{\mathbf{v}})_{\omega_h} = -(\mathbf{v}, \mathscr{B}\tilde{\mathbf{v}})_{H_h},$$
$$(\mathscr{A}\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})_{H_h} = (A^{(ii)}\delta_i \mathbf{v}, \delta_i \tilde{\mathbf{v}})_{\omega_{i^*,h}} + \qquad (13)$$
$$+ (1 - \delta^{(ij)})(\hat{A}^{(ij)} \overset{\circ}{\delta}_j \mathbf{v}, \overset{\circ}{\delta}_i \tilde{\mathbf{v}})_{\omega_h} = (\mathbf{v}, \mathscr{A}\tilde{\mathbf{v}})_{H_h},$$

т.е. верны свойства $\mathscr{B}^* = -\mathscr{B}$ и поэтому $(\mathscr{B}\mathbf{v}, \mathbf{v})_{H_h} = 0$ для $\mathbf{v} \in H_h$, а также $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$.

КГД систему уравнений (1) в $\Omega \times (0, T)$ при краевом условии $\mathbf{z}|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0$ аппроксимируем явной по t разностной схемой, трехточечной по каждому направлению $x_1, \ldots, x_n$:

$$\delta_t \mathbf{y} + c_* \mathscr{B}\mathbf{y} + \tau c^2_* \mathscr{A}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{в} \quad H_h \quad \text{на} \quad \omega^{h_t}, \qquad (14)$$

с искомой функцией $\mathbf{y}$: $\bar{\omega}^{h_t} \to H_h$. Функции $y^0 \in H_h$ и $\mathbf{b}$: $\omega^{h_t} \to H_h$ заданы, причем $\mathbf{b}$ добавлена для полноты анализа устойчивости.

Введем вспомогательные матрицы [9]

$$\tilde{A}^{(kk)} := \hat{A}^{(kk)} + \frac{1}{\gamma}\mathbf{e}_0\mathbf{e}^T_0 + \frac{1}{\gamma_*}\mathbf{e}_{n+1}\mathbf{e}^T_{n+1} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}} E^{(0,n+1)} = (B^{(k)})^2 + \hat{a}_0 \mathbf{e}_k \mathbf{e}^T_k \ge 0, \qquad (15)$$
$$1 \le k \le n.$$

Л е м м а 2. *Пусть $\overset{\circ}{\operatorname{div}}_h \mathbf{u} := \overset{\circ}{\delta}_i v_i$ и $\mathbf{u} = (v_1, \ldots, v_n)$. Справедливы формула и неравенства*

$$(\mathscr{A}\mathbf{v}, \mathbf{v})_{H_h} = (A^{(ii)}\delta_i \mathbf{v}, \delta_i \mathbf{v})_{\omega_{i^*,h}} + \|\mathscr{B}\mathbf{v}\|^2_{H_h} +$$
$$+ \hat{a}_0 \|\overset{\circ}{\operatorname{div}}_h \mathbf{u}\|^2_{\omega_h} - (\tilde{A}^{(ii)} \overset{\circ}{\delta}_i \mathbf{v}, \overset{\circ}{\delta}_i \mathbf{v})_{\omega_h} \quad \forall \mathbf{v} \in H_h, \qquad (16)$$

$$(\mathscr{A}\mathbf{v}, \mathbf{v})_{H_h} \ge (D\delta_i \mathbf{v}, \delta_i \mathbf{v})_{\omega_{i^*,h}} + \|\mathscr{B}\mathbf{v}\|^2_{H_h} +$$
$$+ \hat{a}_0 \|\overset{\circ}{\operatorname{div}}_h \mathbf{u}\|^2_{\omega_h} \ge \|\mathscr{B}\mathbf{v}\|^2_{H_h} \quad \forall \mathbf{v} \in H_h. \qquad (17)$$

Формула (16) следует из (13) и близкой формулы, выведенной в [9, доказательство теоремы 1]. Неравенства следуют из нее с помощью (2), (15) и первого неравенства леммы 1.

Л е м м а 3. *Пусть $\tilde{h}_{\min} = \min_{1 \le k \le n} \tilde{h}_{\min k}$. Справедлива оценка*

$$\lambda_{\max}(\mathscr{A}) \le \tilde{\lambda} := (|M_i| + 1)^2 \frac{n+3}{\tilde{h}^2_{\min i}} +$$
$$+ \max\left\{\hat{\alpha}_s \delta^{(ii)} \frac{4}{\tilde{h}^2_{\min i}} + \hat{a}_0 \frac{n+3}{\tilde{h}^2_{\min}}, \hat{\alpha}_P \delta^{(ii)} \frac{4}{\tilde{h}^2_{\min i}}\right\}. \qquad (18)$$

Указанная оценка выводится на основе формулы Рэлея для $\lambda_{\max}(\mathscr{A})$ и аккуратной оценки правой части формулы (16), в том числе с учетом неравенств (11) и формулы для спектральной нормы $\|B^{(k)}\| = |M_k| + 1$, $1 \le k \le n$.

Устойчивость схемы (14) непосредственно следует из теоремы 2 с учетом (9) в силу свойств $\mathcal{B}^* = -\mathcal{B}$, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, неравенства (17) (согласно которому $c_A = 1$) и леммы 3.

Т е о р е м а 3. *При условии*

$$\beta \le \beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha) := \frac{2}{(\alpha^{-1} + \sqrt{\hat{h}^2\tilde{\lambda}\alpha})^2} = \frac{2}{\alpha^{-1} + 2\sqrt{\hat{h}^2\tilde{\lambda}} + \hat{h}^2\tilde{\lambda}\alpha} \tag{19}$$

для $\mathbf{b} = 0$ *схема* (14) *является* H_h*-диссипативной, а в общем случае для нее верна оценка*

$$\max_{0\le m\le \bar{m}} \left\|\mathbf{y}^m\right\|_{H_h} \le \left\|\mathbf{y}^0\right\|_{H_h} + \breve{I}_{h_t}^{\bar{m}} \|\mathbf{b}\|_{H_h}.$$

Формулы (10) принимают вид

$$\max_{\alpha>0} \beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha) = \beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha_{\text{opt}}) = \frac{1}{2\sqrt{\hat{h}^2\tilde{\lambda}}} = \frac{\alpha_{\text{opt}}}{2} \quad \text{при} \quad \alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{h}^2\tilde{\lambda}}}. \tag{20}$$

На основании леммы 3 естественно ввести характерный шаг $\hat{h} > 0$ такой, что

$$\frac{1}{\hat{h}^2} = \frac{(|M_i| + 1)^2}{\tilde{h}_{\min i}^2}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \le \hat{h}\Big/\min_{1\le k\le n}\frac{\tilde{h}_{\min k}}{|M_k| + 1} \le 1. \tag{21}$$

Для простоты (также обстоит дело на практике) он не зависит от параметров $\hat{\alpha}_s$, $\hat{\alpha}_{1s}$, $\hat{\alpha}_P$. Тогда верны двусторонние оценки $n + 3 \le \hat{h}^2\tilde{\lambda} \le n + 3 + \max\{4\hat{\alpha}_s + (n+3)\hat{a}_0, 4\hat{\alpha}_P\}$, равномерные относительно $\overline{\omega}_h$ и M. Поэтому и $\beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha)$, $\beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha_{\text{opt}})$, α_{opt} равномерно ограничены снизу и сверху равномерно относительно $\overline{\omega}_h$ и M. Первое существенно для расчетов на сильно неравномерных сетках, а второе – для моделирования любых течений от дозвуковых до сверх- и гиперзвуковых. Возникают такие формулы для параметров β и τ

$$\beta = \left[\left(\frac{|u_{*1}| + c_*}{\tilde{h}_{\min 1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{|u_{*n}| + c_*}{\tilde{h}_{\min n}}\right)^2\right]^{1/2} h_t,$$

$$\tau = \alpha\left[\left(\frac{|u_{*1}| + c_*}{\tilde{h}_{\min 1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{|u_{*n}| + c_*}{\tilde{h}_{\min n}}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

4. Перейдем к спектральному анализу разностной схемы на равномерной сетке. Пусть теперь ω_{kh} и $\overline{\omega}^{h_t}$ – равномерные сетки по x_k и t с узлами lh_k, $l \in \mathbb{Z}$ и $t_m = mh_t$, $m \ge 0$, и шагами $h_k > 0$ и $h_t > 0, 1 \le k \le n$. Разностные операторы принимают упрощенный вид

$$\delta_t y = \frac{\hat{y} - y}{h_t}, \quad \mathring{\delta}_k v_l = \frac{v_{l+1} - v_{l-1}}{2h_k},$$
$$(\delta_k^*\delta_k v)_l = \frac{v_{l+1} - 2v_l + v_{l-1}}{h_k^2}.$$

Пусть $\omega_h := \omega_{1h} \times \ldots \times \omega_{nh}$ и $h = (h_1, \ldots, h_n)$.

С использованием операторов (12) аппроксимируем линеаризованную КГД систему уравнений (1) в $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ явной двухслойной разностной схемой

$$\delta_t\mathbf{y} + c_*\mathcal{B}\mathbf{y} + \tau c_*^2\mathcal{A}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{на} \quad \omega_h \times \overline{\omega}^{h_t}. \tag{22}$$

Пусть $\mathbf{H}_h$ – гильбертово пространство вектор-функций $\mathbf{v}$: $\omega_h \to \mathbb{C}^{n+2}$, суммируемых в квадрате на ω_h, со скалярным произведением $(\mathbf{v}, \mathbf{y})_{H_h} = h_1 \ldots h_n \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} (\mathbf{v}_{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_{\mathbf{k}})_{\mathbb{C}^{n+2}}$, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$. Будем изучать условия справедливости оценки

$$\max_{0\le m\le \bar{m}} \left\|\mathbf{y}^m\right\|_{\mathbf{H}_h} \le \left\|\mathbf{y}^0\right\|_{\mathbf{H}_h} + \breve{I}_{h_t}^{\bar{m}} \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}_h} \quad \forall \bar{m} \ge 1 \tag{23}$$

при любых $\mathbf{y}^0 \in \mathbf{H}_h$ и $\mathbf{b}$: $\overline{\omega}^{h_t} \to \mathbf{H}_h$. При $\mathbf{b} = 0$ эта оценка принимает вид

$$\sup_{m\ge 0} \left\|\mathbf{y}^m\right\|_{\mathbf{H}_h} \le \left\|\mathbf{y}^0\right\|_{\mathbf{H}_h} \quad \forall \mathbf{y}^0 \in \mathbf{H}_h, \tag{24}$$

и она эквивалентна как оценке $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{L}[\mathbf{H}_h]} \le 1$ нормы ограниченного оператора перехода со слоя на слой $\mathcal{T} = I - h_t(c_*\mathcal{B} + \tau c_*^2\mathcal{A})$, так и свойству $\mathbf{H}_h$-диссипативности

$$\left\|\mathbf{y}^m\right\|_{\mathbf{H}_h} \le \left\|\mathbf{y}^{m-1}\right\|_{\mathbf{H}_h} \le \ldots \le \left\|\mathbf{y}^0\right\|_{\mathbf{H}_h} \quad \forall \mathbf{y}^0 \in \mathbf{H}_h, \quad m \ge 1. \tag{25}$$

При условии $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{L}[\mathbf{H}_h]} \le 1$ оценка (23) верна, и ниже можно ограничиться случаем $\mathbf{b} = 0$.

Пусть h_t и τ задаются указанными выше формулами. В соответствии со спектральным методом, см. [10, 11] и [8], рассмотрим частные решения схемы (22) при $\mathbf{b} = 0$ вида

$$\mathbf{y}_{\mathbf{k}}^m(\boldsymbol{\xi}) = e^{\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}}\mathbf{w}^m(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T \in [-\pi, \pi]^n,$$
$$\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n, \quad m \ge 0,$$

где $\mathbf{i}$ – мнимая единица, а $\boldsymbol{\xi}$ – параметр. Их подстановка в (22) приводит к рекуррентной формуле $\hat{\mathbf{w}} = G_{\mathbf{s}}\mathbf{w}$ на $\overline{\omega}^{h_t}$, где $G_{\mathbf{s}}$ – символ оператора $\mathcal{T}$ с $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ такой, что

$$G_{\mathbf{s}} = I_{n+2} - \beta(4\alpha A_{\mathbf{s}} + 2\mathbf{i}B_{\mathbf{s}}), \quad B_{\mathbf{s}} = d_i s_i B^{(i)},$$
$$A_{\mathbf{s}} = d_i^2 A^{(ii)} + (1 - \delta^{(ij)})d_i d_j s_i s_j \hat{A}^{(ij)},$$

$$d_k = r_k\sqrt{\sigma_k}, \quad r_k = \frac{\hat{h}}{h_k}, \quad \sigma_k = \sin^2\frac{\xi_k}{2} \in [0,1],$$
$$s_k = (\operatorname{sgn}\xi_k)\sqrt{1-\sigma_k} \in [-1,1], \quad 1 \le k \le n.$$

Здесь sgn0 = 1. Ниже $\mathbf{s} \in S := [-1,1]^n$ берется в качестве параметра вместо ξ; ясно, что $\sigma_k = 1 - s_k^2$.

Введем вектор-строку $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ с $\zeta_k = d_k s_k$, $1 \le k \le n$. Пусть $d = (d_1^2 + \ldots + d_n^2)^{1/2}$.

Следующие два важных результата взяты из [8, лемма 1 и теорема 2].

Л е м м а 4. *1. Матрицы B_s и A_s можно записать в 3 × 3-блочной форме*

$$B_{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}\mathbf{M} & \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\boldsymbol{\zeta} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\boldsymbol{\zeta}^T & (\boldsymbol{\zeta}\mathbf{M})I_n & \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}}\boldsymbol{\zeta}^T \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}}\boldsymbol{\zeta} & \boldsymbol{\zeta}\mathbf{M} \end{pmatrix},$$

$$A_{\mathbf{s}} = a_{\mathbf{M}}I_{n+2} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}d^2 & \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\mathbf{p} & \frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}}d^2 \\ \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\mathbf{p}^T & C_0 & \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}}\mathbf{p}^T \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}}d^2 & \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}}\mathbf{p} & \left(\hat{\alpha}_P + \frac{1}{\gamma_*}\right)d^2 \end{pmatrix}$$

с использованием обозначений

$$a_{\mathbf{M}} := (\boldsymbol{\zeta}\mathbf{M})^2 + \mathbf{M}^T Q\mathbf{M} = \mathbf{p}\mathbf{M},$$
$$\mathbf{p} := (\boldsymbol{\zeta}\mathbf{M})\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{M}^T Q,$$
$$C_0 := \hat{\alpha}_s d^2 I_n + \hat{a}_1(\boldsymbol{\zeta}^T\boldsymbol{\zeta} + Q)$$

и $Q := \operatorname{diag}\{q_1,\ldots,q_n\}$ *с* $q_k := d_k^2\sigma_k = r_k^2\sigma_k^2$, $1 \le k \le n$, *а также* $\hat{a}_1 = \hat{a}_0 + 1$.

2. *Верно матричное неравенство*: $B_{\mathbf{s}}^2 \le A_{\mathbf{s}}$ *при всех* $\mathbf{s} \in S := [-1,1]^n$.

Т е о р е м а 4. *Выполнение матричного неравенства*

$$\beta\left[2\alpha A_{\mathbf{s}}^2 + \frac{1}{2\alpha}B_{\mathbf{s}}^2 + \mathbf{i}(A_{\mathbf{s}}B_{\mathbf{s}} - B_{\mathbf{s}}A_{\mathbf{s}})\right] \le A_{\mathbf{s}} \quad \forall \mathbf{s} \in S \tag{26}$$

необходимо и достаточно, а выполнение числового неравенства

$$\beta \le \beta_{\text{suf}}(\alpha) = \\ = \frac{1}{(\sqrt{2\alpha}^{-1} + \sqrt{2\bar{\lambda}\alpha})^2} = \frac{1}{(2\alpha)^{-1} + 2\sqrt{\bar{\lambda}} + 2\bar{\lambda}\alpha}, \tag{27}$$

с $\max_{\mathbf{s}\in S}\lambda_{\max}(A_{\mathbf{s}}) \le \bar{\lambda}$ *достаточно для справедливости свойства* (25).

Новое необходимое условие выводится из критерия (26) анализом случаев $\mathbf{s} = 0$ и $\boldsymbol{\xi} = 2\varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ с $\varepsilon \to +0$, $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = (\tilde{\xi}_1,\ldots,\tilde{\xi}_n) \ne 0$ на основе леммы 4 (как и недавно в баротропном случае [12]).

Т е о р е м а 5. *Пусть* $r_{\max} := \max_{1\le k\le n} r_k$ *и* $r^2 = r_1^2 + \ldots + r_n^2$. *Выполнение неравенства*

$$\beta \le \beta_{nec}(\alpha) := \min\left\{2\alpha, \frac{1}{2\underline{\lambda}\alpha}\right\} \\ \text{с } \underline{\lambda} := r_i^2 M_i^2 + \max\left\{\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_s + \hat{a}_1\frac{r_{\max}^2}{r^2}\right\} r^2, \tag{28}$$

где $\hat{\lambda} := \frac{1}{2}\left[1 + \hat{\alpha}_P + \sqrt{(\hat{\alpha}_P - 1)^2 + \frac{4}{\gamma_*}\hat{\alpha}_P}\right] \ge$ $\ge \max\left\{\hat{\alpha}_P + \frac{1}{\gamma_*}, 1\right\}$, *необходимо для справедливости свойства* (25). *Здесь* $\frac{1}{n} \le \frac{r_{\max}^2}{r^2} \le 1$.

Легко видеть, что верны формулы и двустороннее неравенство

$$\max_{\alpha>0}\beta_{\text{suf}}(\alpha) = \beta_{\text{suf}}(\alpha_{\text{opt}}) = \frac{\alpha_{\text{opt}}}{2} = \frac{1}{4\sqrt{\bar{\lambda}}},$$
$$\frac{1}{4}\min\left\{2\alpha, \frac{1}{2\bar{\lambda}\alpha}\right\} \le \beta_{\text{suf}}(\alpha) < \min\left\{2\alpha, \frac{1}{2\bar{\lambda}\alpha}\right\},$$
$$\max_{\alpha>0}\beta_{\text{nec}}(\alpha) = \beta_{\text{nec}}(\alpha_*) = 2\alpha_* = \frac{1}{\sqrt{\underline{\lambda}}}.$$

Также $\beta_{\text{suf}}(\alpha) \to 0$ и $\beta_{\text{nec}}(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to +0$ или $\alpha \to +\infty$.

Для применения достаточного условия (27) укажем новую оценку сверху для $\lambda_{\max}(A_{\mathbf{s}})$. Она выводится на основе формулы Рэлея для $\lambda_{\max}(A_{\mathbf{s}})$ и аккуратной оценки квадратичной формы, отвечающей матрице $A_{\mathbf{s}}$ из леммы 4.

Т е о р е м а 6. *При* $n = 2, 3$ *верна оценка сверху*

$$\max_{\mathbf{s}\in S}\lambda_{\max}(A_{\mathbf{s}}) \le \bar{\lambda} := c_n[(1+\varepsilon)r_i^2M_i^2 + \varepsilon^{-1}r_{\max}^2] + \\ + \max\left\{\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_s + \hat{a}_1 c_n\frac{r_{\max}^2}{r^2}\right\} r^2, \tag{29}$$

с $c_2 = 1$, $c_3 = \frac{9}{8}$, *любым* $\varepsilon > 0$ *и* $\hat{\lambda}$, *указанным в теореме* 5.

Согласно указанным оценкам, естественен выбор $\hat{h}$ (зависящий только от h и $\mathbf{M}$) [12]

$$\frac{1}{\hat{h}^2} = \frac{M_1^2+1}{h_1^2} + \ldots + \frac{M_n^2+1}{h_n^2},$$

$$\text{где}\quad \frac{1}{\sqrt{n}} \le \hat{h} / \min_{1\le k\le n} \frac{h_k}{\sqrt{M_k^2+1}} \le 1.$$

Для него верны равенства $r_i^2(M_i^2+1) = \frac{\hat{h}^2}{h_i^2}(M_i^2 + 1) = 1$, благодаря которым правую часть оценки (29) можно оценить (взяв минимум по $\varepsilon > 0$) как

$$\bar{\lambda} \le \frac{1}{2}[c_n + C + \sqrt{(C-c_n)^2 + 4c_n^2}] \le$$
$$\le c_n + \max\{\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_s + \hat{a}_1 c_n\},$$

где $C := \max\{\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_s + \hat{a}_1 c_n\} \ge c_n$. Также $\underline{\lambda} \ge 1$ в необходимом условии (28), что приводит к необходимому условию и достаточному условию, не зависящим от h и $\mathbf{M}$.

Отметим, что при этом возникают формулы для числа Куранта и параметра τ

$$\beta = \frac{c_*}{\hat{h}} h_t = \left(\frac{u_{*1}^2 + c_*^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{u_{*n}^2 + c_*^2}{h_n^2}\right)^{1/2} h_t,$$

$$\tau = \alpha\left(\frac{u_{*1}^2 + c_*^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{u_{*n}^2 + c_*^2}{h_n^2}\right)^{-1/2}.$$

Они несущественно отличаются от выписанных выше в случае неравномерной сетки. Для других схем подобная формула для β без степеней 2 (но с $|u_{*1}|, \ldots, |u_{*n}|$) и 1/2 имеется в [1, раздел 2.6].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проекты 19-11-00169 (пп. 2, 3) и 22-11-00126 (п. 4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.
2. *LeVeque R.J.* Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
3. *Abgrall R., Shu C.-W.*, eds. Handbook of numerical methods for hyperbolic problems: basic and fundamental issues. Amsterdam: North Holland, 2016.
4. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
5. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
6. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.–Ижевск: РХД, 2009.
7. *Zlotnik A.* // Appl. Math. Lett. 2019. V. 92. P. 115–120.
8. *Zlotnik A., Lomonosov T.* // Appl. Math. Lett. 2020. V. 103. Article 106198. P. 1–7.
9. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* // Дифференц. уравн. 2020. Т. 56. № 7. С. 936–947.
10. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
11. *Wesseling P.* Principles of computational fluid dynamics. Berlin: Springer, 2009.
12. *Zlotnik A.* // Symmetry. 2021. V. 13. № 11. Article 2184. P. 1–17.

CONDITIONS FOR DISSIPATIVITY OF AN EXPLICIT FINITE-DIFFERENCE SCHEME FOR A LINEARIZED MULTIDIMENSIONAL QUASI-GASDYNAMIC SYSTEM OF EQUATIONS

A. A. Zlotnik[a,b]

[a] *Higher School of Economics University, Moscow, Russian Federation*
[b] *Federal Research Center Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

We study an explicit two-level finite-difference scheme for a linearized multidimensional quasi-gasdynamic system of equations. For an initial-boundary value problem on a nonuniform rectangular mesh, the Courant-type sufficient conditions for L^2-dissipativity are given for the first time by the energy method. For the Cauchy problem on a uniform mesh, both necessary and sufficient conditions for L^2-dissipativity are improved in the spectral method. A new form of specifying the relaxation parameter is indicated which guarantees that the Courant-type number is uniformly bounded from above and below both with respect to the mesh and the Mach number.

Keywords: gas dynamics equations, quasi-gasdynamic system of equations, linearization, explicit finite-difference scheme, dissipativity