ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 5–8

МАТЕМАТИКА

УДК 517.982.256

КЛАССИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

© 2022 г. А. Р. Алимов[1,*], И. Г. Царьков[1,2,]**

Представлено академиком РАН В.И. Бердышевым
Поступило 08.04.2022 г.
После доработки 12.08.2022 г.
Принято к публикации 15.08.2022 г.

Изучаются классические вопросы обобщенного дробно-рационального приближения: существование, единственность и устойчивость элементов наилучшего приближения, характеризация элементов наилучшего приближения.

Ключевые слова: существование наилучшего приближения, обобщенные дробно-рациональные функции, алгебраически полное множество

DOI: 10.31857/S2686954322050022

Под классическими вопросами теории приближений мы понимаем вопросы существования, единственности, устойчивости и солнечности. Понятие солнечности – это, на самом деле, геометрическая переформулировка известного критерия Колмогорова элемента наилучшего приближения. Ниже X – действительное линейное нормированное пространство. Множество M называется множеством *существования*, если для каждой точки x множество $P_M x := \{y \in M \mid \|x - y\| = \rho(x, M) := \inf_{y \in M}\|x - y\|\}$ ее ближайших элементов непусто. Множество $M \subset X$ называется *строгим протосолнцем*, если из условия $x \in X \setminus M$, $y \in P_M x$ вытекает, что $y \in P_M((1-\lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geq 0$. Строгие протосолнца (а также солнца и строгие солнца, см. [1], [2]) являются наиболее естественными объектами, для которых выполнен обобщенный критерий Колмогорова элемента наилучшего приближения (см. [2], [1, § 3.1]) и для них выполнены те или иные свойства отделимости. Важность исследования вопросов существования и солнечности (характеризацией элементов наилучшего приближения) обобщенных дробно-рациональных функций связана с их многочисленными приложениями в теории приближений и вычислительной математике (см., например, [3, 4]).

Рассмотрим следующее классическое семейство рациональных функций в $C[a, b]$: $\mathsf{R}_{n,m} = \mathsf{R}_{n,m}[a,b] := \{p/q \mid p \in \mathsf{P}_n,\ q \in \mathsf{P}_m,\ q \neq 0\}$, где P_n – подпространство алгебраических многочленов степени не выше n. Хорошо известно, что $\mathsf{R}_{n,m}$ – чебышёвское солнце в $C[a, b]$. Однако в $L^p[a,b]$, $1 < p < \infty$, Н.В. Ефимовым и С.Б. Стечкиным из общих теорем геометрической теории приближений было установлено, что $\mathsf{R}_{n,m}$, $m \geq 1$, является множеством существования, но не единственности. В случае $L^1[a,b]$ ими же было показано отсутствие единственности наилучшего приближения классом $\mathsf{R}_{0,2}$. И.Г. Царьков, используя общие теоремы геометрической теории приближений, доказал отсутствие единственности наилучшего приближения в $L^1[a,b]$ для всех классов дробей $\mathsf{R}_{n,m}$, $m \geq 1$. Рассмотрим более общий класс рациональных функций: $\mathsf{R}_W^V := \{r = v/w \mid v \in V, w \in W\}$, здесь Q – метрический компакт, V, $W \subset C(Q)$ – выпуклые множества, причем W состоит из положительных функций. Известно, что множество R_W^V является строгим протосолнцем в $C(Q)$.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**E-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru*
***E-mail: igtsarkov@yandex.ru*

Изучим следующее обобщение классов $\mathsf{R}_{n,m}$ и R_W^V. Пусть $V, W \subset C(Q)$ и пусть $U \subset V \times W$ – непустое выпуклое множество. Определим следующий класс обобщенных дробно-рациональных функций

$$\mathsf{R}_U := \{r \in C(Q) \mid rw = v, w > 0, (v, w) \in U\}. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Множество обобщенных дробно-рациональных функций R_U является строгим протосолнцем в $C(Q)$.*

Теорема 1 означает, что дроби наилучшего приближения из класса R_U характеризуются в терминах критерия Колмогорова элемента наилучшего приближения, что позволяет строить алгоритмы нахождения наилучших дробей (см., например, [3, 5[).

Устойчивость элементов (почти) наилучшего приближения традиционно связана со свойствами аппроксимативной компактности множества или существования непрерывных ε-выборок. Пусть $\varepsilon > 0$, $M \subset X$. Отображение $\varphi : X \to M$ называется *аддитивной* (соответственно *мультипликативной*) *ε-выборкой*, если для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\|\varphi(x) - x\| \le \rho(x, M) + \varepsilon$ (соответственно $\|\varphi(x) - x\| \le (1 + \varepsilon)\rho(x, M)$). Хорошо известно, что в невырожденных случаях (т.е. при $m \ge 1$) метрическая проекция на (чебышёвское) множество $\mathsf{R}_{n,m}$ имеет точки разрыва в $C[a,b]$, но при этом, как, в частности, доказал С.В. Конягин [6], для любого $\varepsilon > 0$ на $\mathsf{R}_{n,m}$ существует непрерывная ε-выборка. Следующий результат обобщает и расширяет результат С.В. Конягина (см. также К.С. Рютин [7, 8]).

Теорема 2. *Множество обобщенных рациональных дробей R_U (при выпуклом U; см. (1)) является устойчиво монотонно линейно связным множеством (см. [9]) в $C(Q)$, и, следовательно, на это множество существует непрерывная аддитивная ε-выборка для любого $\varepsilon > 0$. В случае замкнутости R_U для каждого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная мультипликативная ε-выборка на R_U. Кроме того, R_U имеет стягиваемые пересечения с замкнутыми и открытыми шарами в $C(Q)$.*

Изучение вопросов существования наилучшего приближения обобщенными рациональными функциями было начато в работах Э. Чини, Х.Л. Лоеба, Г.Ш. Рубинштейна, Б. Бёма, Ч. Данхема и др. (см. [1, § 11.1]). В отличие от классического случая приближения классом $\mathsf{R}_{n,m}$ в $C[a, b]$, существование (и единственность) элементов обобщенного рационального приближения в пространстве непрерывных функций, вообще говоря, не имеет места.

Пусть Q – хаусдорфов компакт и пусть $U \subset V \times W$. Будем говорить, что множество $\mathsf{R}_U := \{r \in C(Q) \mid rw = v,\ w \not\equiv 0,\ (v, w) \in U\}$ *алгебраически полно*, если условия: (a) $(v_k, w_k) \to (v, w)$ в $C(Q) \times C(Q)$, где $(v_k, w_k) \in U$, $w \not\equiv 0$, и (b) существует функция $r \in C(Q)$ такая, что $r(t) = v(t)/w(t)$ для всех $t \in Q \setminus \mathsf{Z}(w)$, где $\mathsf{Z}(w)$ – множество нулей функции w, эквиваленты тому, что $(v, w) \in U$.

Направленность (x_δ) Δ-сходится к $x \in C(Q)$ ($x_\delta \xrightarrow{\Delta} x$), если найдется плотное подмножество $Q_0 \subset Q$: $x_\delta(t) \to x(t)\ \forall t \in Q_0$ (см. [10]). Подмножество $M \subset C(Q)$ называется *ограниченно Δ-компактным*, если любая ограниченная направленность из M содержит поднаправленность, Δ-сходящуюся к точке из M (см. [1, 10]).

Пусть далее Q – компакт, $V, W \subset C(Q)$ – ограниченно компактные множества, и пусть $U \subset V \times W$ – непустое множество. Рассмотрим класс обобщенных дробно-рациональных функций $\mathsf{R}_U := \{r \in C(Q) \mid rw = v, w \not\equiv 0, (v, w) \in U\}$.

Теорема 3. *Пусть множество R_U алгебраически полно и для любой ненулевой функции из W дополнение ее множества нулей в Q всюду плотно. Тогда множество R_U ограниченно Δ-компактно в пространстве $C(Q)$ и, как следствие, является множеством существования в $C(Q)$.*

Утверждение теоремы 3 также верно в пространстве $L^\infty(Q, \mu)$, где μ – σ-аддитивная борелевская мера на Q, где Q – единица σ-алгебры борелевских множеств.

Пусть D – компактная область в R^n, V, $W \subset C(D)$ – непустые ограниченно компактные множества, состоящие из вещественно-аналитических функций, и пусть $U \subset V \times W$ – непустое множество. Рассмотрим класс обобщенных дробно-рациональных функций $\mathsf{R}_U(D) := \{r \in C(D) \mid rw = v,\ w \not\equiv 0,\ (v, w) \in U\}$.

Следствие 1. *Если множество $\mathsf{R}_U(D)$ алгебраически полно, то оно ограниченно Δ-компактно в пространстве $C(D)$. Как следствие, $\mathsf{R}_U(D)$ является множеством существования в пространстве $C(D)$ и множество $P_{\mathsf{R}_U} x$ Δ-компактно для любого $x \in C(D)$.*

Из теоремы 3 вытекает один из результатов Ф. Дойча [10], именно: множество $\mathsf{R}_V^W := \{r \in C[a, b] \mid rw = v,\ w \in W,\ w \not\equiv 0,\ v \in V\}$ является множеством существования в $C[a, b]$, где V, W – конечномерные подпространства пространства $C[a, b]$, состоящие из вещественно-аналитических функций.

Случай, рассмотренный в следствии 1, включает в себя случай многомерных алгебраических дробно-рациональных функций R_U при условии их алгебраической полноты. Из теоремы 3 мы также получаем следующий классический результат (в котором проксиминальность множества $\mathsf{R}_{n,m}$ доказана независимо Н.И. Ахиезером и Дж. Уолшем): множество дробно-рациональных функций $\mathsf{R}_{n,m}$ ограниченно Δ-компактно в $C[a,b]$. В частности, $\mathsf{R}_{n,m}$ – множество существования и множество $P_{\mathsf{R}_{n,m}}x$ Δ-компактно для любого $x \in C[a,b]$.

Рассмотрим вопрос существования наилучшего дробно-рационального приближения в $L^p = L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$, $1 \le p < \infty$. Хорошо известно (см., например, [1, § 11.3], [2]), что множество $\mathsf{R}_{n,m}$ аппроксимативно компактно в $L^p[a,b]$, $1 \le p < \infty$, и, следовательно, является множеством существования. Пусть Σ – σ-алгебра на Ω, μ – σ-конечная мера на Σ. Будем говорить, что последовательность функций (x_n) (где $x_n : \Omega \to \mathsf{R}$) aes-*сходится* к функции $x : \Omega \to \mathsf{R}$, если для любого множества $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$, найдется подпоследовательность номеров (n_k) такая, что (x_{n_k}) сходится почти всюду на A к функции x (здесь “aes” – сокращение от англ. “almost everywhere convergence of a subsequence”). Множество M aes-*компактно*, если из любой последовательности $(x_n) \subset M$ можно выделить подпоследовательность, aes-сходящуюся к элементу $x \in M$. Множество M *ограниченно* aes-*компактно*, если пересечение M с любым замкнутым шаром aes-компактно.

Пусть μ – σ-конечная мера на пространстве Ω, $L^p = L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$, $1 \le p < \infty$. Пусть $V \subset L^1$, $W \subset L^q$ – конечномерные подпространства ($1/p + 1/q = 1$, $1 < p,\ q < \infty$; если $p = 1$, то $q = \infty$), и пусть $U \subset V \times W$ – непустое множество. Будем говорить, что множество $\mathsf{R}_U(\Omega) := \{r \in L^p \,|\, rw = v,\ \ w \not\equiv 0,\ (v,w) \in U\}$ *алгебраически полно*, если условия: $(v_k, w_k) \to (v,w)$ в $L^1 \times L^q$, где $(v_k, w_k) \in U$, $w \not\equiv 0$, существует функция $r \in L^p$ такая, что $r(t) = v(t)/w(t)$ для всех $t \in \Omega \backslash Z(w)$, где $Z(w)$ – множество нулей функции w, эквивалентны тому, что $(v,w) \in U\}$.

Т е о р е м а 4. *Пусть множество $\mathsf{R}_U(\Omega)$ алгебраически полно и для любой ненулевой функции из W множество ее нулей в Ω имеет меру нуль. Тогда множество $\mathsf{R}_U(\Omega)$ ограниченно* aes-*компактно и аппроксимативно компактно в $L^p(\Omega)$ при любом $1 \le p < \infty$. Как следствие, $\mathsf{R}_U(\Omega)$ – множество существования.*

Пусть D – ограниченная область в R^n, граница которой имеет нулевую меру Лебега, пусть μ – мера Лебега на D, $L^p = L^p(D,\mu)$, $1 \le p < \infty$. Пусть $V \subset L^1$, $W \subset L^q$ – конечномерные подпространства, состоящие из вещественно-аналитических функций ($1/p + 1/q = 1$, $1 < p,\ q < \infty$; если $p = 1$, то $q = \infty$), и пусть $U \subset V \times W$ – непустое множество. Рассмотрим класс обобщенных дробно-рациональных функций $\mathsf{R}_U(D) := \{r \in L^p(D) \,|\, rw = v,\ w \not\equiv 0,\ (v,w) \in U\}$.

С л е д с т в и е 2. *Пусть множество $\mathsf{R}_U(D)$ алгебраически полно. Тогда $\mathsf{R}_U(D)$ ограниченно* aes-*компактно. Как следствие, $\mathsf{R}_U(D)$ аппроксимативно компактно и является множеством существования в $L^p(D)$ при любом $1 \le p < \infty$.*

Отметим, что если $D = [a,b] \subset \mathsf{R}$, то класс рациональных функций $\mathsf{R}_U(D)$ с $D = [a,b]$ совпадает с классом $\mathsf{R}_U^0[a,b] := \{r \in C[a,b] \,|\, rw = v,\ w \not\equiv 0,\ (v,w) \in U\}$. С учетом этого из следствия 2 вытекает следующий известный результат Ф. Дойча–Р. Э. Хаффа [10]): множество $\mathsf{R}_V^W[a,b]$ аппроксимативно компактно в $L^p[a,b]$ при любом $1 \le p < \infty$ и, как следствие, является множеством существования; здесь V, W – конечномерные подпространства пространства $L^p[a,b]$, состоящие из вещественно-аналитических функций.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в МГУ имени М.В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-11-00129).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alimov A.R., Tsar’kov I.G.* Geometric Approximation Theory. Springer. Cham. 2021. 508 p.
2. *Алимов А.Р., Царьков И.Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения. УМН. 2016. Т. 71. № 1 (427). С. 3–84. https://doi.org/10.4213/rm9698
3. *Бердышев В.И., Петрак Л.В.* Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения Екатеринбург: УрО РАН. 1999. 299 с.
4. *Peiris V., Sharon N., Sukhorukova N., Ugon J.* Generalised rational approximation and its application to improve deep learning classifiers // Appl. Math. Comp. 2021. V. 389. P. 125560. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125560
5. *Millán R.D., Sukhorukova N., Ugon J.* An algorithm for best generalised rational approximation of continuous functions // Set-Valued and Variational Analysis. 2022. V. 30. P. 923–941. https://doi.org/10.1007/s11228-021-00625-w
6. *Конягин С.В.* О непрерывных операторах обобщенного рационального приближения, Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 3. С. 404.

7. *Рютин К.С.* Аппроксимативные свойства обобщенных рациональных функций. Дисс. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2002.
8. *Рютин К.С.* О равномерно непрерывных операторах почти наилучшего обобщенного рационального приближения // Матем. заметки. 2010 Т. 87. № 1. С. 147–150.
https://doi.org/10.4213/mzm345
9. *Царьков И.Г.* Солнечность и связность множеств в пространстве $C[a, b]$ и конечномерных полиэдральных пространствах. Матем. сб. 2022. Т. 213. № 2. С. 149–166.
https://doi.org/10.4213/sm9554
10. *Deutsch F.* Existence of best approximations // J. Approx. Theory. 1980. V. 28. P. 132–154.
https://doi.org/10.1016/0021-9045(80)90085-4

CLASSICAL PROBLEMS OF RATIONAL APPROXIMATION

A. R. Alimov[a] and I. G. Tsar'kov[a,b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.I. Berdushev

Classical problems of rational approximation are studied: existence, uniqueness, and stability and characterization of best approximants.

Keywords: existence of best approximation, generalized rational fractions, algebraically complete set