ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 16–19

МАТЕМАТИКА

УДК 517.982.27

БИНАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

© 2022 г. С. В. Асташкин[1,*]

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным
Поступило 13.05.2022 г.
После доработки 02.08.2022 г.
Принято к публикации 10.08.2022 г.

Подпространство H перестановочно-инвариантного пространства X сильно вложено в X, если на H сходимость в X-норме и по мере эквивалентны. Получены необходимые и достаточные условия на функцию Орлича M, при которых единичный шар любого подпространства, сильно вложенного в пространство Орлича L_M, имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M.

Ключевые слова: перестановочно-инвариантное пространство, сильно вложенное подпространство, функция Орлича, пространство Орлича, индексы Матушевской–Орлича

DOI: 10.31857/S2686954322050034

§ 1. Банахово пространство E измеримых на [0, 1] функций называется перестановочно-инвариантным (кратко r.i.), или симметричным, если 1) из того, что x измерима, $|x(t)| \le |y(t)|$ для всех $t \in [0,1]$ и $y \in E$, следует $x \in E$ и $\|x\|_E \le \|y\|_E$; 2) из равноизмеримости функций x и y (это означает, что

$$\mathrm{mes}\{t\colon |x(t)| > \tau\} = \mathrm{mes}\{t\colon |y(t)| > \tau\}$$

для каждого $\tau > 0$, где mes – мера Лебега на $[0,1]$), и $y \in E$ следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$. В частности, всякая измеримая функция x равноизмерима со своей невозрастающей на (0, 1] *перестановкой* $x^*(t) := \inf\{\tau \ge 0\colon \mathrm{mes}\{s\colon |x(s)| > \tau\} \le t\}$, $0 < t \le 1$. Теория r.i. пространств изложена в монографиях [1–3].

Самый известный пример r.i. пространств – пространства L^p, $1 \le p \le \infty$. Их естественным обобщением являются пространства Орлича [4, 5]. Пусть M – непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0,\infty)$, $M(0) = 0$. *Пространство Орлича L_M* состоит из всех измеримых на [0, 1] функций, для которых конечна норма Люксембурга

$$\|x\|_{L_M} := \inf\left\{\lambda\colon \lambda > 0, \int_0^1 M(|x(t)|/\lambda)\,dt \le 1\right\}.$$

Если $M(u) = u^p$, то $L_M = L^p$ изометрически. Пространство L_M сепарабельно тогда и только тогда, когда M удовлетворяет Δ_2-условию в бесконечности ($M \in \Delta_2^\infty$), т.е. $M(2u) \le CM(u)$ для некоторого $C > 0$ и всех достаточно больших u.

Для каждой функции Орлича M определим следующие непустые компактные подмножества пространства $C[0,1]$:

$$E_{M,A}^\infty := \overline{\left\{N(x) = \frac{M(xy)}{M(y)}\colon y > A\right\}} \quad (A > 0),$$

$$E_M^\infty := \bigcap_{A>0} E_{M,A}^\infty, \quad C_M^\infty := \overline{\mathrm{conv}\, E_M^\infty},$$

где $\mathrm{conv}\, U$ – выпуклая оболочка множества U, а замыкание берется в $C[0,1]$, а также *индексы Матушевской-Орлича в бесконечности*:

$$\alpha_M^\infty := \sup\left\{p : \sup_{t,s\ge 1} \frac{M(t)s^p}{M(ts)} < \infty\right\},$$

$$\beta_M^\infty := \inf\left\{p : \inf_{t,s\ge 1} \frac{M(t)s^p}{M(ts)} > 0\right\}.$$

Множество C_M^∞ определяет структуру подпространств, порожденных последовательностями попарно дизъюнктных функций в пространстве

[1] *Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королёва, Самара, Россия*
**E-mail: astash56@mail.ru*

L_M [6] (измеримые функции x и y *дизъюнктны*, если $\operatorname{mes}(\{t: x(t) \neq 0\} \cap \{t: y(t) \neq 0\}) = 0$). Легко проверить, что $1 \le \alpha_M^\infty \le \beta_M^\infty \le \infty$.

Аналогично, если ψ – функция Орлича, то *пространство Орлича последовательностей* ℓ_ψ состоит из всех последовательностей $(a_k)_{k=1}^\infty$, для которых

$$\|(a_k)_{k=1}^\infty\|_{\ell_\psi} := \inf\left\{u > 0 : \sum_{k=1}^\infty \psi(|a_k|/u) \le 1\right\} < \infty.$$

Если $1 \le p < \infty$, φ – непрерывная возрастающая вогнутая на [0, 1] функция, $\varphi(0) = 0$, то *пространство Лоренца* $\Lambda_p(\varphi)$ состоит из всех измеримых на [0, 1] функций, для которых $\|x\|_{\Lambda_p(\varphi)} := \left(\int_0^1 x^*(t)^p\, d\varphi(t)\right)^{1/p} < \infty$.

Говорят, что (замкнутое линейное) подпространство H r.i. пространства X *сильно вложено* в X, если сходимость в X-норме и по мере на H эквивалентны. В частности, в силу неравенства Хинчина [7, глава V, теорема 8.4] функции Радемахера $r_k(t) = \operatorname{sign}(\sin 2^k \pi t)$, $k \in N$, $t \in [0,1]$, порождают сильно вложенное подпространство в L_p для каждого $1 \le p < \infty$.

Множество $K \subset X$ имеет *равностепенно непрерывные нормы* в r.i. пространстве X, если $\lim_{\delta\to 0}\sup_{m(E)<\delta}\sup_{x\in K}\|x\chi_E\|_X = 0$. Нетрудно показать, что подпространство H сильно вложено в X, если его единичный шар $B_H := \{x \in X: \|x\|_X \le 1\}$ имеет равностепенно непрерывные нормы в X.

Введенные понятия тесно связаны со свойствами величины

$$\eta_X(K) := \lim_{t\to 0} \sup_{x\in K, x\neq 0} \frac{\|x^*\chi_{[0,t]}\|_X}{\|x\|_X},$$

где X – r.i. пространство, $K \subset X$, χ_E – характеристическая функция измеримого подмножества $E \subset [0,1]$. Величина $\eta_X(K)$ в явном виде была введена Е.В. Токаревым в [8], хотя в случае $E = L_1$ она возникла гораздо раньше в классической работе М.И. Кадеца и А. Пелчинского [9]. Позднее эта величина изучалась в работах [10] и [11].

Ясно, что всегда $0 \le \eta_X(K) \le 1$. Если H – подпространство r.i. пространства X и $\eta_X(H) < 1$, то H сильно вложено в X. Кроме того, $\eta_X(H) = 0$ тогда и только тогда, когда единичный шар B_H имеет равностепенно непрерывные нормы в X.

Вслед за [11] назовем r.i. пространство X *бинарным*, если $\eta_X(H)$ принимает на его подпространствах H только два значения: 0 и 1. Как легко видеть, r.i. пространство X бинарно, если единичный шар B_H всякого сильно вложенного в X подпространства H имеет равностепенно непрерывные нормы в X.

Согласно известной теореме Х.П. Розенталя [12, теорема 13] пространство L^p бинарно, если $1 \le p < 2$ (нетрудно показать, что последнее условие необходимо). В [11] (см. также [10]) этот результат (при таком же условии на p) был распространен на пространства Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$.

Будучи тесно связанной со свойствами подпространств, величина $\eta_X(K)$ является важной геометрической характеристикой r.i. пространства X. Как выяснено в настоящей работе, вопрос о бинарности r.i. пространства X определяется структурой подпространств X, порождаемых последовательностями попарно дизъюнктных функций в нем. Если в пространствах Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$ она достаточно проста (всякая такая нормированная последовательность содержит подпоследовательность, эквивалентную стандартному базису в l^p [13]), то в пространствах Орлича она гораздо сложнее. В работе получены необходимые и достаточные условия бинарности пространств Орлича.

§ 2. Всюду далее функция Орлича M удовлетворяет условию: $1 < \alpha_M^\infty \le \beta_M^\infty < 2$.

В доказательстве следующего ключевого утверждения используются конструкции из работы [14].

П р е д л о ж е н и е 1. Если в пространстве Орлича L_M существует сильно вложенное подпространство, единичный шар которого имеет не равностепенно непрерывные нормы в L_M, то для некоторой $\psi \in C_M^\infty$ выполнено: $1/\psi^{-1} \in L_M$.

Применяя предложение 1 вместе с результатами работ [6] и [15], получаем

Т е о р е м а 1. *Предположим, что* $1/\psi^{-1} \not\in L_M$ *для всякой функции* $\psi \in C_M^\infty$. *Тогда, если H – подпространство L_M, то следующие условия эквивалентны*:

(i) H не содержит бесконечномерных подпространств, изоморфных подпространствам, порожденным в L_M попарно дизъюнктными функциями;

(ii) H сильно вложено в L_M;

(iii) единичный шар B_H имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M.

Следующее утверждение содержит легко проверяемые достаточные условия на функцию M, при которых $1/\psi^{-1} \not\in L_M$ для каждой $\psi \in C_M^\infty$.

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть M – функция Орлича, $1 < \alpha_M^\infty \le \beta_M^\infty < 2$. Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(a) $M(uv) \le C_1 M(u) M(v)$ для некоторого $C_1 > 0$ и всех $u, v \ge 1$;

(b) $t^{-1/\beta_M^\infty} \not\in L_M$ и для некоторого $C_2 > 0$

$$M(uv) \le C_2 u^{\beta_M^\infty} M(v), \quad u, v \ge 1. \tag{1}$$

Тогда $1/\psi^{-1} \not\in L_M$ для каждой функции $\psi \in C_M^\infty$.

Как следствие, получаем вариант упоминавшейся теоремы Х.П. Розенталя о структуре подпространств L^p-пространств для пространств Орлича: если функция Орлича M удовлетворяет хотя бы одному из условий (a) или (b) предложения 2 и H – подпространство пространства Орлича L_M, то условия (i), (ii) и (iii) эквивалентны. Таким образом (см. § 1), в этом случае пространство L_M бинарно.

Напомним, что функция Орлича M, $M \in \Delta_2^\infty$, называется *правильно меняющейся на бесконечности порядка p*, если $\lim_{t\to\infty} M(tu)/M(t) = u^p$. Примером является функция $M(u) = u^p (\ln u)^{q_1} (\ln\ln u)^{q_2} \ldots (\ln\ldots\ln u)^{q_n}$, где $p \in (1, \infty)$, а вещественные числа $q_1, \ldots, q_n$ произвольны. Если M – правильно меняющаяся на бесконечности функция порядка p, то $C_M^\infty = \{t^p\}$. Поэтому в силу предложения 2 построенное по такой функции пространство Орлича L_M бинарно.

В следующей теореме приведено необходимое условие бинарности пространства Орлича, которое зачастую также и достаточно.

Т е о р е м а 2. *Если пространство Орлича L_M бинарно, то $t^{-1/\beta_M^\infty} \not\in L_M$. Если дополнительно выполнено (1), то верно также обратное: из того, что $t^{-1/\beta_M^\infty} \not\in L_M$, вытекает бинарность L_M.*

Для подпространств, изоморфных пространствам Орлича последовательностей, получен более точный результат.

Т е о р е м а 3. *Для того, чтобы единичный шар B_H произвольного сильно вложенного подпространства H пространства Орлича L_M, изоморфного некоторому пространству Орлича последовательностей, имел в L_M равностепенно непрерывные нормы, необходимо и достаточно, чтобы $t^{-1/\beta_M^\infty} \not\in L_M$.*

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2022-878.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces II. Function spaces. V. 97. B.: Springer-Verlag, 1979. 246 p.
2. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. London: Academic Press, 1988. 469 p.
4. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 271 с.
5. *Rao M.M., Ren Z.D.* Theory of Orlicz spaces, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. V. 146. N.Y.: Marcel Dekker Inc., 1991. 445 p.
6. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* On Orlicz sequence spaces. III // Israel J. Math. 1973. V. 14. P. 368–389.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965. 615 с. [перевод с английского Zygmund A. Trigonometric series. V.I. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1959.]
8. *Токарев Е.В.* О подпространствах некоторых симметричных пространств // В сб. “Теория функций, функциональный анализ и их приложения”, вып. 24, Харьков, 1975, С. 156–161.
9. *Kadec M.I., Pełczyński A.* Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p // Studia Math. 1962. V. 21. P. 161–176.
10. *Новиков С.Я., Семенов Е.М., Токарев Е.В.* Структура подпространств пространств Λ_p // Докл. АН СССР. 1979. Т. 243. № 3. С. 252–254.
11. *Новиков С.Я., Семенов Е.М., Токарев Е.В.* О структуре подпространств пространств $\Lambda_p(\mu)$ // В сб. “Теория функций, функциональный анализ и их приложения”, вып. 42, Харьков, 1984. С. 91–97.
12. *Rosenthal H.P.* On subspaces of L^p // Annals of Math. 1973. V. 97. P. 344–373.
13. *Figiel T., Johnson W. B., Tzafriri L.* On Banach lattices and spaces having local unconditional structure with applications to Lorentz function spaces // J. Approx. Theory. 1975. V. 13. P. 395–412.
14. *Astashkin S.*V. $\Lambda(p)$-spaces // J. Funct. Anal. 2014. V. 266. P. 5174–5198.
15. *Astashkin S.V.* On symmetric spaces containing isomorphic copies of Orlicz sequence spaces // Comment. Math. 2016. V. 56. № 1. P. 29–44.

BINARY ORLICZ SPACES

S. V. Astashkin

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

A subspace H of a rearrangement invariant space X is strongly embedded in X if, on H, convergence in the X-norm is equivalent to convergence in measure. Necessary and sufficient conditions on an Orlicz function M are obtained, under which the unit ball of any subspace, strongly embedded in the Orlicz space L_M, has equi-absolutely continuous norms in L_M.

Keywords: rearrangement invariant space, strongly embedded subspace, Orlicz function, Orlicz space, Matuszewska–Orlicz indices