ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 25–29

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925.51

ПРИМЕРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КОНТРАСТНЫМИ СОЧЕТАНИЯМИ ЛЯПУНОВСКИХ, ПЕРРОНОВСКИХ И ВЕРХНЕПРЕДЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ

 А. А. Бондарев[1,*], И. Н. Сергеев[1,]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 17.05.2022 г.
После доработки 24.06.2022 г.
Принято к публикации 26.07.2022 г.

Приводится целый ряд примеров систем дифференциальных уравнений, обладающих в некотором смысле противоположными свойствами устойчивости или неустойчивости различного типа: ляпуновскими, перроновскими и верхнепредельными. Так, все ненулевые решения одной из этих систем стремятся к нулю (при неограниченном росте времени), удаляясь, тем не менее, от него хотя бы однажды на конкретное единое для них всех расстояние. К примеру, у другой системы все ненулевые решения, начинающиеся в фиксированной окрестности нуля, стремятся по норме к бесконечности, а все остальные – наоборот, к нулю.

Ключевые слова: дифференциальная система, устойчивость по Ляпунову, устойчивость по Перрону, верхнепредельная устойчивость, автономные системы, нелинейные системы, асимптотические свойства решений

DOI: 10.31857/S2686954322050058

ВВЕДЕНИЕ

В классическом примере Р.Э. Винограда [1, § 6.3] (или его упрощенной модификации А.Ф. Филиппова [2, § 18]) все решения конкретной двумерной автономной дифференциальной системы стремятся к нулю (здесь и всюду ниже – при неограниченном росте времени), но, тем не менее, нулевое решение этой системы является неустойчивым по Ляпунову.

Еще одним примером необычного сочетания свойств решений может послужить двумерная дифференциальная система [3, теорема 1], все ненулевые решения которой, начинающиеся достаточно близко к нулю, со временем навсегда удаляются от него на почтительное расстояние, что не мешает, однако, некоторому ее специальному решению стремиться к нулю.

В теоремах 1–5 настоящей работы (см. также работы [4, 5]) описан целый ряд усиленных вариантов этих сочетаний, также реализуемых на дифференциальных системах, а кроме того, представлены и некоторые их разновидности, допустимые и при более жестких ограничениях на систему. Некоторые из этих сочетаний настолько экзотичны и контрастны, что на первый взгляд могут показаться даже внутренне противоречивыми.

Существенным подспорьем для настоящего исследования служат недавно введенные определения [5] перроновских и верхнепредельных свойств устойчивости и неустойчивости, развивающие и варьирующие известные ляпуновские понятия. Перроновские свойства связаны со знаками показателей Перрона [6, § 2] точно так же, как соответствующие ляпуновские свойства – со знаками показателей Ляпунова [6, § 1]. При этом перроновские свойства оказываются нижнепредельными, что позволяет рассматривать к тому же и их верхнепредельные аналоги, занимающие логически промежуточное положение между ляпуновскими и перроновскими свойствами.

ЛЯПУНОВСКИЕ, ПЕРРОНОВСКИЕ И ВЕРХНЕПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

Для числа $n \in \mathbb{N}$ и области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (с нормой $|\cdot|$), содержащей начало координат, рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \in G, \tag{1}$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: albondarev1998@yandex.ru*
***E-mail: igniserg@gmail.com*

с правой частью $f\colon \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям

$$f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

а значит, обеспечивающей существование и единственность решений задач Коши и допускающей нулевое решение. Обозначим через $\mathcal{S}_*(f)$ множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1), а через $\mathcal{S}_\delta(f)$ и $\mathcal{S}^\delta(f)$ – его подмножества, состоящие из тех решений x, которые удовлетворяют начальному условию $|x(0)| < \delta$ и $|x(0)| > \delta$ соответственно.

Определение 1 [5]. Будем говорить, что для системы (1) (точнее, для ее *нулевого* решения, о чем мы для краткости не будем далее упоминать) имеет место *верхнепредельная*:

1) *устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}|x(t)| < \varepsilon \tag{2}$$

и *неустойчивость* – в противном случае;

2) *полная неустойчивость*, если для некоторых $\varepsilon, \delta > 0$ ни одно решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2);

3) *глобальная неустойчивость*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ ни одно решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ не удовлетворяет требованию (2), и *частная устойчивость* – в противном случае;

4) *глобальная устойчивость*, если все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяют требованию

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)| = 0; \tag{3}$$

5) *массивная частная устойчивость*, если существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}^\delta(f)$ удовлетворяет требованию (3).

Определение 2 [5]. Со всеми введенными в определении 1 верхнепредельными свойствами системы (1) сопоставим одноименные свойства *перроновского* типа, которые получаются из верхнепредельных механической заменой во всех пунктах 1–5 определения 1 требований (2) и (3) требованиями

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}}|x(t)| < \varepsilon, \tag{4}$$

и, соответственно,

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}}|x(t)| = 0. \tag{5}$$

Определение 3 [7, гл. IV]. С введенными в пп. 1–4 определений 1 и 2 верхнепредельными и перроновскими свойствами системы (1) сопоставим одноименные свойства *ляпуновского* типа, которые получаются из верхнепредельных заменой в пунктах 1–3 определения 1 требования (2) требованием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|x(t)| < \varepsilon, \tag{6}$$

а в п. 4 определения 1 – добавлением требования ляпуновской устойчивости системы (1).

Подчеркнем, что требования (2)–(6) в определениях 1–3 считаются невыполненными для решения x, в частности, уже тогда, когда оно попросту определено не на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, т.е. когда соответствующая ему фазовая кривая за конечное время выходит к границе области G (согласно теореме о продолжаемости решений; см., например, [8, § 22]).

Мы не привели здесь такие (не менее интересные [5], но не фигурирующие в нашей работе) разновидности верхнепредельных, перроновских и ляпуновских свойств, как *асимптотическая* устойчивость (неустойчивость), *частичная* устойчивость или *частная* неустойчивость. Одни из них являются *массивными* прямо по определению, а другие – *точечны*, но допускают усиление до массивных (что и было применено по отношению к частной устойчивости в определениях 1 и 2). Представляют интерес также и сочетания *орбитальных* [7, гл. IV, § 19] вариантов всех перечисленных свойств применительно, скажем, к предельному циклу.

Если система (1) автономна, то ее ляпуновская и верхнепредельная устойчивости могут ассоциироваться с *устойчивостью по Лагранжу* [9, гл. IV, §§ 4, 5], означающей предкомпактность фазовой траектории, выходящей из данной точки (что, кстати, в случае ее неподвижности выполнено автоматически). Понятия же устойчивости и неустойчивости по Перрону весьма отдаленно напоминают, соответственно, *устойчивость по Пуассону* и *блуждаемость* [9, гл. IV, §§ 4, 5], первую из которых, состоящую в сколь угодно позднем возвращении траектории в любую наперед заданную окрестность своей начальной точки, зачастую искусственно отождествляют с устойчивостью по Перрону, не делая различия между окрестностями начальной точки и исследуемой неподвижной точки (см., например, [10]).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

А. Прежде всего, сформулируем явно, в терминах определений 1–3, следующий факт, вытекающий из упомянутого выше примера [1, 2] двумерной автономной системы.

Утверждение А. *Ни перроновская, ни даже верхнепредельная глобальная устойчивость двумерной автономной системы* (1) *не влечет за собой ляпуновскую устойчивость.*

Первый результат настоящей работы состоит в том, что если в утверждении A снять с системы требование ее *автономности*, то может случиться, что у нее:

– с одной стороны, сразу все решения при неограниченном росте времени стремятся к нулю, следовательно, она обладает *и перроновской, и верхнепредельной глобальной устойчивостью*;

– с другой стороны, абсолютно каждое ненулевое решение хотя бы однажды покидает некоторую фиксированную трубку нулевого решения, т.е. эта же система обладает *ляпуновской* не просто неустойчивостью, а *глобальной неустойчивостью*.

Теорема 1. *При* $n = 2$ *и* $G = \mathbb{R}^2$ *существует такая система* (1), *что ее правая часть удовлетворяет условию*

$$f'_x(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{7}$$

и все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ *сразу*:

1) *удовлетворяют равенству* (3)*;*

2) *не удовлетворяют неравенству* (6) *при* $\varepsilon = 1$.

B. Далее, подчеркнем особо некоторые логические связи, действующие между полной и глобальной неустойчивостью какого-либо одного типа.

Утверждение B. *Для системы* (1):

a) *ляпуновская полная неустойчивость эквивалентна ляпуновской глобальной неустойчивости*;

b) [3] *ни ляпуновская*, *ни верхнепредельная*, *ни даже перроновская полная неустойчивость не влечет за собой ни верхнепредельную, ни перроновскую глобальную неустойчивость.*

Следующий результат настоящей работы развивает заключительную часть утверждения B и представляет систему, у которой при неограниченном росте времени:

– все ненулевые решения, начинающиеся в некоторой окрестности нуля (и отчасти на ее границе), стремятся по норме к бесконечности, следовательно, имеет место как *перроновская*, так и *верхнепредельная полная неустойчивость* (и стало быть, *ляпуновская глобальная неустойчивость*);

– однако все остальные решения стремятся к нулю, т.е. имеет место *и перроновская, и верхнепредельная частная устойчивость*, причем не просто частная, а даже *массивная*.

Теорема 2 [4]. *При* $n = 2$ *и* $G = \mathbb{R}^2$ *существует такая система* (1), *что ее правая часть удовлетворяет условию* (7) *и при* $\delta = 1$ *верны следующие два утверждения*:

1) *все решения* $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$, *а также все решения* $x \equiv (x_1, x_2)^T \in \mathcal{S}_*(f)$ *с начальными условиями*

$$|x(0)| = 1, \quad \text{где} \quad x_1(0) \le 0, \quad x_2(0) \ne -1,$$

удовлетворяют равенству

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty;$$

2) *все решения* $x \in \mathcal{S}^\delta(f)$, *а также все решения* $x \in \mathcal{S}_*(f)$ *с начальными условиями*

$$|x(0)| = 1, \quad \text{где} \quad x_1(0) \ge 0, \quad x_2(0) \ne 1,$$

удовлетворяют равенству (3).

C. Заметим, что описанные в теоремах 1 и 2 системы неавтономны, и это не случайно, поскольку в автономном случае полные и глобальные неустойчивости всех типов сразу логически неразличимы.

Утверждение C [5]. *Если система* (1) *автономна и обладает хотя бы одним из шести следующих свойств: ляпуновской*, *перроновской или верхнепредельной полной или глобальной неустойчивостью, — то она обладает и остальными пятью свойствами.*

Итак, системы, существование которых утверждается в теоремах 1 и 2, не могут быть сделаны еще и автономными. Тем не менее несколько упрощенные примеры таких автономных систем предлагают ниже теоремы 3 и 4 соответственно.

Во-первых, существует двумерная *автономная* система, у которой:

– каждое ненулевое решение хотя бы по некоторой неограниченной последовательности моментов времени стремится к нулю, следовательно, система обладает *перроновской глобальной устойчивостью*;

– каждое же решение, за исключением тех, что начинаются на конкретной окружности (проходящей через начало координат), по некоторой другой неограниченной последовательности моментов времени выходит за пределы фиксированной трубки нулевого решения, т.е. система обладает *и ляпуновской*, *и верхнепредельной неустойчивостью*, которая при этом, так сказать, даже *почти глобальна* (глобальной она не может быть в силу утверждения C).

Теорема 3 [5]. *При* $n = 2$ *и* $G = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,1)^T\}$ *существует такая автономная система* (1), *что каждое решение* $x \equiv (x_1, x_2)^T \in \mathcal{S}_*(f)$:

1) *удовлетворяет равенству* (5)*;*

2) *не удовлетворяет ни одному из неравенств* (2) *и* (6) *при* $\varepsilon = 1$ *и при выполнении начального условия*

$$x_1^2(0) + (x_2(0) - 1)^2 \ne 1.$$

Во-вторых, существует двумерная *автономная* система, у которой:

– все решения, начинающиеся вне некоторой окрестности нуля, при неограниченном росте времени стремятся к нулю, следовательно, система обладает *и перроновской, и верхнепредельной массивной частной устойчивостью*;

— однако сколь угодно близко к нулю начинаются такие решения, которые с некоторого момента (вообще говоря, своего для каждого решения) навсегда выходят за пределы фиксированной трубки нулевого решения, т.е. система обладает *и ляпуновской, и верхнепредельной, и перроновской неустойчивостью* (заведомо не полной, в силу утверждения С).

Теорема 4 [5]. *При* $n = 2$ *и* $G = \mathbb{R}^2$ *существует такая автономная система* (1), *что верны следующие два утверждения*:

1) *при* $\delta = 1$ *все ее решения* $x \in \mathcal{S}^{\delta}(f)$ *удовлетворяют равенству* (3);

2) *для каждого* $\delta > 0$ *хотя бы одно решение* $x \in \mathcal{S}_{\delta}(f)$ *не удовлетворяет неравенству* (4) *при* $\varepsilon = 1$.

D. В заключение заметим, что описанные в теоремах 1, 2 и 4 системы неодномерны и нелинейны, и это также не случайно, поскольку в линейном (однородном) и одномерном случаях некоторые (к примеру, любые одноименные верхнепредельные и ляпуновские) свойства логически неразличимы.

Утверждение D [3]. *Если система* (1) — *одномерна или линейна*, *то она*:

a) *обладает каким-либо верхнепредельным свойством тогда и только тогда*, *когда она обладает одноименным ляпуновским свойством*;

b) *обладает полной неустойчивостью какого-либо типа тогда и только тогда*, *когда она обладает глобальной неустойчивостью того же типа*;

c) *обладает массивной частной устойчивостью какого-либо типа тогда и только тогда, когда она обладает устойчивостью того же типа*.

Зато результат теоремы 3 как раз в неавтономном случае допускает конкретное усиление, состоящее в существовании *линейной* однородной ограниченной дифференциальной системы произвольной размерности (в том числе и *одномерной*) и, так сказать, *скалярного* типа, у которой при неограниченном росте времени все ненулевые решения сразу:

— по некоторой одной последовательности моментов стремятся к нулю, а значит, имеет место *перроновская глобальная устойчивость*;

— по некоторой другой последовательности моментов стремятся по норме к бесконечности; таким образом, имеет место как *ляпуновская*, так и *верхнепредельная глобальная неустойчивость*.

Теорема 5 [3]. *При любом* $n \in \mathbb{N}$ *и* $G = \mathbb{R}^n$ *существует такая линейная система* (1), *что ее правая часть удовлетворяет условию*

$$f(t,x) = a(t)x, \quad a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$
$$\|a\| \equiv \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|a(t)| < +\infty,$$

и все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ *удовлетворяют*:

1) *равенству* (5);

2) *равенству*

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}|x(t)| = +\infty.$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа А.А. Бондарева выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 21-8-2-4-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
2. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.
3. *Сергеев И.Н.* Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.
4. *Бондарев А.А.* Пример дифференциальной системы с перроновской и верхнепредельной полной неустойчивостью, но массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 147–152.
5. *Сергеев И.Н.* Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. 2020. Т. 56. № 2. С. 63–78.
6. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова // Минск: БГУ. 2006.
7. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
8. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
9. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1947.
10. *Лапин К.С.* Ограниченность в пределе по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и функции Ляпунова // Матем. заметки. 2018. Т. 103. № 2. С. 223–235.

EXAMPLES OF DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH CONTRASTING COMBINATIONS OF LYAPUNOV, PERRON AND UPPER-LIMIT PROPERTIES

A. A. Bondarev[a] and I. N. Sergeev[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

A number of examples of systems of differential equations are given that have, in a sense, opposite properties of stability or instability of various types: Lyapunov, Perron, and upper-limit. So, all non-zero solutions of one of these systems tend to zero (with an unlimited growth of time), nevertheless moving away from it at least once at a specific distance common for all of them. For example, in another system, all non-zero solutions starting in a fixed neighborhood of zero tend to infinity in norm, and all the rest, on the contrary, tend to zero.

Keywords: differential system, Lyapunov stability, Perron stability, upper limit stability, autonomous systems, nonlinear systems, asymptotic properties of solutions