ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 37–40

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

О СТАЦИОНАРНЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ МЕРАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ “ПОЛЕ–КРИСТАЛЛ”

© 2022 г. Т. В. Дудникова[1,*]

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным
Поступило 18.02.2022 г.
После доработки 16.03.2022 г.
Принято к публикации 12.08.2022 г.

В работе рассматривается задача Коши для гамильтоновой системы, состоящей из поля Клейна–Гордона и бесконечного гармонического кристалла. Предполагается, что начальные данные задачи являются случайной функцией, и изучается сходимость распределений решений к некоторой предельной гауссовой мере при больших временах. При условии, что начальная случайная функция в “левой” и “правой” частях пространства имеет гиббсовское распределение с различными температурами, найдены стационарные состояния системы, в которых предельная плотность потока энергии не обращается в нуль. Таким образом, для данной системы построен класс стационарных неравновесных состояний.

Ключевые слова: поле Клейна–Гордона, взаимодействующее с кристаллом, задача Коши, преобразование Зака, случайные начальные данные, слабая сходимость мер, гауссовские и гиббсовские меры, плотность потока энергии, стационарные неравновесные состояния

DOI: 10.31857/S2686954322050083

1. МОДЕЛЬ

В работе изучается линейная гамильтонова система, состоящая из поля Клейна–Гордона $\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, и кристаллической решетки, описываемой отклонениями $u(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $d, n \geq 1$, частиц (атомов, молекул, ионов и т.п.) от их положения равновесия. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$\mathrm{H}(\psi, u, \pi, v) = \mathrm{H}_F(\psi, \pi) + \mathrm{H}_L(u, v) + \mathrm{H}_I(\psi, u), \quad (1)$$

где $\mathrm{H}_F(\psi, \pi)$ обозначает гамильтониан поля Клейна–Гордона, $\mathrm{H}_L(u, v)$ – гамильтониан решетки, $\mathrm{H}_I(\psi, u)$ – член взаимодействия между полем и решеткой:

$$\mathrm{H}_F(\psi, \pi) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla\psi(x)|^2 + m_0^2|\psi(x)|^2 + |\pi(x)|^2\right)dx,$$

$$\mathrm{H}_L(u, v) := \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left(\sum_{j=1}^{d}|u(k+e_j) - u(k)|^2 + \nu_0^2|u(k)|^2 + |v(k)|^2\right),$$

$$\mathrm{H}_I(\psi, u) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{\mathbb{R}^d} R(x-k)\cdot u(k)\psi(x)dx.$$

Здесь $m_0, \nu_0 > 0$, функция взаимодействия $R(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ – гладкая векторнозначная функция, экспоненциально убывающая на бесконечности, “$\cdot$” обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $e_j \in \mathbb{Z}^d$ – вектор с координатами $e_j^i = \delta_j^i$. Вычисляя вариационные производные от гамильтониана (1), получаем следующую систему динамических уравнений

$$\begin{cases} \dot\psi(x,t) = \pi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \dot\pi(x,t) = (\Delta - m_0^2)\psi(x,t) - \sum\limits_{k'\in\mathbb{Z}^d} R(x-k')\cdot u(k'), \\ \dot u(k,t) = v(k,t), \quad k \in \mathbb{Z}^d, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \dot v(k,t) = (\Delta_L - \nu_0^2)u(k,t) - \int\limits_{\mathbb{R}^d} R(x'-k)\psi(x')dx'. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь Δ_L обозначает дискретный оператор Лапласа на решетке $\mathbb{Z}^d$, $\Delta_L u(k) := \sum\limits_{e\in\mathbb{Z}^d:|e|=1}(u(k+e) - u(k))$. Заметим, что в случае $n = d$ и $R(x) = -\nabla\rho(x)$ слагаемое H_I в гамильтониане (1) является линеаризованной аппроксимацией Паули–Фирца трансляционно-инвариантного взаимодействия вида

[1] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: tdudnikov@mail.ru*

$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int \rho\left(x-k-u(k)\right)\psi(x)dx$ (здесь и ниже мы опускаем обозначение $\mathbb{R}^d$ в нижнем пределе интеграла). Поэтому система (2) может служить моделью для описания движения *блоховских* электронов в периодической среде, порожденной ионными ядрами (т.е. $\psi(x,t)$ описывает движение электронного облака, а $u(k,t)$ – малые отклонения ионных ядер от их положения равновесия). Понимание этого движения является одной из центральных проблем физики твердого тела, см., например, [1, главы 8, 22]. Отметим также, что в литературе большое развитие получила и квазиклассическая модель твердого тела, например, квазиклассическая динамика блоховских электронов изучается в [2, 3].

Для системы (2) мы изучаем задачу Коши с начальными данными

$$\begin{cases}\psi(x,0)=\psi_0(x), & \pi(x,0)=\pi_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^d,\\ u(k,0)=u_0(k), & v(k,0)=v_0(k), \quad k\in\mathbb{Z}^d.\end{cases} \tag{3}$$

Введем фазовое пространство начальных данных $Y_0=(\psi_0,u_0,\pi_0,v_0)$. Для этого сначала через $H^s_\alpha\equiv H^s_\alpha(\mathbb{R}^d)$, $s,\alpha\in\mathbb{R}$, обозначим весовые пространства Соболева, т.е. гильбертовы пространства распределений $\psi\in S'(\mathbb{R}^d)$ с конечной нормой $\|\psi\|_{s,\alpha}=\left\|\langle x\rangle^\alpha\Lambda^s\psi\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}<\infty$, где $\langle x\rangle:=\sqrt{|x|^2+1}$, $\Lambda^s\psi:=F^{-1}_{\xi\to x}(\langle\xi\rangle^s\hat\psi(\xi))$, $\hat\psi:=F(\psi)$ обозначает преобразование Фурье обобщенной функции умеренного роста ψ. Если $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, то $\hat\psi(\xi)=\int e^{ix\cdot\xi}\psi(x)dx$. Через $\ell^2_\alpha\equiv\ell^2_\alpha(\mathbb{Z}^d)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, обозначим гильбертово пространство векторнозначных последовательностей $u(k)\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{Z}^d$, с конечной нормой $\|u\|_\alpha:=\|\langle k\rangle^\alpha u(k)\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}<\infty$. Наконец, через $\mathrm{E}^s_\alpha:=H^s_\alpha\oplus\ell^2_\alpha$ обозначим гильбертово пространство функций $Y^0=(\psi(x),u(k))$ с нормой $\|Y^0\|^2_{s,\alpha}:=\|\psi\|^2_{s,\alpha}+\|u\|^2_\alpha<\infty$.

Определение. Фазовое пространство $\mathscr{E}^s_\alpha:=\mathrm{E}^{s+1}_\alpha\oplus\mathrm{E}^s_\alpha$ $(s,\alpha\in\mathbb{R})$ – это гильбертово пространство векторов $Y=(Y^0,Y^1)$, где $Y^0\equiv(\psi,u)$, $Y^1\equiv(\pi,v)$, с конечной нормой $\|Y\|^2_{s,\alpha}:=\|\psi\|^2_{s+1,\alpha}+\|u\|^2_\alpha+\|\pi\|^2_{s,\alpha}+\|v\|^2_\alpha<\infty$.

Обозначим решение системы (2) через $Y(t)=(Y^0(t),Y^1(t))$, где $Y^0(t)=(\psi(x,t),u(k,t))$, $Y^1(t)=(\pi(x,t),v(k,t))$, и $Y_0=(Y_0^0,Y_0^1)$, где $Y_0^0=(\psi_0,u_0)$, $Y_0^1=(\pi_0,v_0)$. Таким образом, $Y_0^0(\cdot)$ и $Y_0^1(\cdot)$ являются функциями на пространстве $\mathbb{P}^d:=\mathbb{R}^d\cup\mathbb{Z}^d$. Например, $Y_0^0(p)=\psi_0(x)$, если $p=x\in\mathbb{R}^d$, и $Y_0^0(p)=u_0(k)$, если $p=k\in\mathbb{Z}^d$. Аналогично определяются функции $Y(p,t)\equiv Y(t)$ и $Y^j(p,t)\equiv Y^j(t)$, $j=0,1$, $p\in\mathbb{P}^d$. Тогда задача (2)–(3) принимает вид

$$\dot Y(t)=\mathscr{A}(Y(t)),\quad t\in\mathbb{R},\quad Y(0)=Y_0, \tag{4}$$

где $\mathscr{A}:=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\mathscr{H} & 0\end{pmatrix}$, $\mathscr{H}:=\begin{pmatrix}-\Delta+m_0^2 & S\\ S^* & -\Delta_L+\nu_0^2\end{pmatrix}$, $(Su)(x):=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}R(x-k)\cdot u(k)$, $(S^*\psi)(k):=\int R(x-k)\psi(x)dx$. Заметим, что динамика задачи (4) инвариантна относительно сдвигов в $\mathbb{Z}^d$. Поэтому удобнее переписать ее, используя преобразование Блоха–Флоке–Зака.

Определение. Через $\tilde u(\theta)$ обозначим дискретное преобразование Фурье, $\tilde u(\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}e^{ik\cdot\theta}u(k)$, $\theta\in\mathbb{T}^d\equiv\mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$. Представим $x\in\mathbb{R}^d$ в виде $x=l+y$, $l=[x]\in\mathbb{Z}^d$, $y\in[0,1]^d$, и введем *преобразование Блоха–Флоке–Зака* функции $\psi(x)$ следующим образом: $\mathscr{Z}\psi\equiv\tilde\psi_e(\theta,y)=e^{iy\cdot\theta}\tilde\psi(\theta,y)=e^{iy\cdot\theta}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}e^{il\cdot\theta}\psi(l+y)$, $\theta\in K^d:=[0,2\pi]^d$ (ниже для краткости будем называть это *преобразованием Зака*, см. [4]). Заметим, что $\tilde\psi_e(\theta,y)$ является периодической функцией по $y\in\mathbb{T}_1^d:=\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ и квазипериодической по $\theta\in K^d$, т.е. $\tilde\psi_e(\theta,y+l)=\tilde\psi_e(\theta,y)$ при $l\in\mathbb{Z}^d$ и $\tilde\psi_e(\theta+2\pi e_j,y)=e^{i2\pi y_j}\tilde\psi_e(\theta,y)$ при $j=1,\ldots,d$.

Применим преобразование Зака к решению $Y(\cdot,t)$ задачи (4) и обозначим $\tilde Y_e(\theta,t):=\mathscr{Z}Y(\cdot,t)=(\tilde\psi_e(\theta,y,t),\tilde u(\theta,t),\tilde\pi_e(\theta,y,t),\tilde v(\theta,t))$, где $\tilde Y_e(\theta,t)\equiv\tilde Y_e(\theta,r,t)$, $r\in\mathscr{T}_1^d\equiv\mathbb{T}_1^d\cup\{0\}$. Тогда задача (4) сводится к *задаче Блоха* на торе $\mathbb{T}_1^d$ с параметром $\theta\in K^d$:

$$\dot{\tilde Y}_e(\theta,t)=\tilde{\mathscr{A}}(\theta)\tilde Y(\theta,t),\quad t\in\mathbb{R},\quad \tilde Y_e(\theta,t)\big|_{t=0}=\tilde Y_{0,e}(\theta).$$

Здесь $\tilde Y_{0,e}(\theta)\equiv\tilde Y_{0,e}(\theta,r)$ – преобразование Зака начальных данных Y_0, $\tilde{\mathscr{A}}(\theta)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\tilde{\mathscr{H}}(\theta) & 0\end{pmatrix}$, $\tilde{\mathscr{H}}(\theta):=\mathscr{Z}\mathscr{H}\mathscr{Z}^{-1}$ – (самосопряженный) оператор “Шредингера–Блоха” на торе вида $\tilde{\mathscr{H}}(\theta)=\begin{pmatrix}(i\nabla_y+\theta)^2+m_0^2 & \tilde S(\theta)\\ \tilde S^*(\theta) & \omega_*^2(\theta)\end{pmatrix}$, где $(\tilde S(\theta)\tilde u)(\theta,y)=$

$= \tilde{R}_e(\theta, y) \cdot \tilde{u}(\theta)$, $(\tilde{S}^*(\theta)\tilde{\psi}_e)(\theta) = \int\limits_{\mathbb{T}_1^d} \tilde{R}_e(-\theta, y)\tilde{\psi}_e(\theta, y)dy$,

$\omega_*^2(\theta) = \sum\limits_{j=1}^{d}(2 - 2\cos\theta_j) + \nu_0^2$. Предполагается, что $\tilde{\mathcal{H}}(\theta) > 0$ для всех $\theta \in K^d$, что соответствует гиперболичности задачи (2). Следовательно, оператор $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ имеет дискретный, положительный спектр $\omega_l^2(\theta)$, $l = 1, 2, \ldots$.

Л е м м а. *Для любых начальных данных* $Y_0 \in \mathcal{E}_\alpha^s$, $s, \alpha \in \mathbb{R}$, *существует, и притом единственное, решение задачи* (4) $Y(t) = W_t Y_0 \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E}_\alpha^s)$.

Ниже полагаем, что $s, \alpha < -d/2$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Введем сначала гиббсовские меры для модели (1). Формально гиббсовские меры определяются следующим образом, $g_\beta(dY) = (Z_\beta)^{-1}\exp\{-\beta H(Y)\}\prod\limits_{p\in\mathbb{P}^d} dY(p)$, где Z_β – нормирующий множитель, $\mathrm{H}(Y)$ – гамильтониан, $\beta = T^{-1}$, T – соответствующая абсолютная температура, $T > 0$. Так как гамильтониан, определенный в (1), квадратичен, то мы можем определить гиббсовские меры g_β как гауссовские борелевские вероятностные меры $g_\beta(dY) = g_\beta^0(dY^0)\times g_\beta^1(dY^1)$ на пространстве $\mathcal{E}_\alpha^s = \mathrm{E}_\alpha^{s+1} \oplus \mathrm{E}_\alpha^s$, где меры g_β^0 и g_β^1 имеют характеристические функционалы вида

$$\hat{g}_\beta^0(Z) \equiv \int \exp\left\{i\left\langle Y^0, Z\right\rangle\right\} g_\beta^0(dY^0) = = \exp\left\{-\frac{1}{2\beta}\left\langle \mathcal{H}^{-1}Z, Z\right\rangle\right\},$$

$$\hat{g}_\beta^1(Z) \equiv \int \exp\left\{i\left\langle Y^1, Z\right\rangle\right\} g_\beta^1(dY^1) = \exp\left\{-\frac{1}{2\beta}\left\langle Z, Z\right\rangle\right\},$$
$$Z \in D_F \oplus D_L,$$

$D_F := C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $D_L := [C_0(\mathbb{Z}^d)]^n$. Меры g_β существуют на $\mathcal{E}_\alpha^s$ для любых $s, \alpha < -d/2$ в силу теоремы Минлоса. Кроме того, корреляционная матрица меры g_β имеет вид $Q_\beta(p, p') = (Q_\beta^{ij}(p, p'))_{i,j=0}^1$, $p, p' \in \mathbb{P}^d$, где $Q_\beta^{ij}(p, p') := \int (Y^i(p) \otimes Y^j(p'))g_\beta(dY)$, причем $Q_\beta^{ij}(p, p') = 0$ при $i \neq j$, а при $i = j$ матрицы Q_β^{jj} удовлетворяют условию $Q_\beta^{jj}(k + r, k' + r') = q_\beta^{jj}(k - k', r, r')$ $\forall k, k' \in \mathbb{Z}^d$. Более того, матрицы q_β^{jj}, $j = 0, 1$, в преобразовании Зака имеют вид $\tilde{q}_\beta^{00}(\theta) = \beta^{-1}\tilde{\mathcal{H}}^{-1}(\theta)$, $\tilde{q}_\beta^{11}(\theta) = \beta^{-1}I$, $\theta \in K^d$, где через $\tilde{q}_\beta^{jj}(\theta)$ обозначается интегральный оператор с ядром $\tilde{q}_\beta^{jj}(\theta, r, r') := e^{i(r-r')\cdot\theta}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} e^{ik\cdot\theta} q_\beta^{jj}(k, r, r')$, $r, r' \in \mathcal{T}_1^d$.

Предполагается, что начальные данные $Y_0(p)$, $p = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{P}^d$, – это случайная функция вида $Y_0(p) = \sum\limits_{\pm}\zeta_\pm(p_1)Y_\pm(p)$, где "срезающие" неотрицательные функции $\zeta_\pm$ равны $\zeta_\pm(p_1) = 1$ при $\pm p_1 > a$ и $\zeta_\pm(p_1) = 0$ при $\pm p_1 < -a$ с некоторым $a > 0$, причем случайные функции $Y_\pm(p)$ имеют гиббсовские распределения $g_\pm \equiv g_{\beta_\pm}$ $(\beta_\pm = T_\pm^{-1})$ с температурами $T_\pm$ и корреляционными матрицами $Q_\pm := Q_{\beta_\pm}$, определенными выше. Обозначим через μ_0 вероятностную борелевскую меру на $\mathcal{E}_\alpha^s$, которая является распределением функции Y_0, а через $Q_0(p, p') = (Q_0^{ij}(p, p'))_{i,j=0}^1$ – ее корреляционную матрицу, где $Q_0^{ij}(p, p') := \int (Y^i(p) \otimes Y^j(p'))\mu_0(dY)$, $i, j = 0, 1$. Тогда $Q_0(p, p') = Q_-(p, p')$ при $p_1, p_1' < -a$ и $Q_0(p, p') = Q_+(p, p')$ при $p_1, p_1' > a$. Таким образом, начальная мера μ_0 не является, вообще говоря, трансляционно-инвариантной относительно сдвигов в $\mathbb{Z}^d$. Через μ_t, $t \in \mathbb{R}$, обозначим вероятностную борелевскую меру на пространстве $\mathcal{E}_\alpha^s$, которая является распределением решений $Y(t)$ задачи (4), т.е. $\mu_t(B) = \mu_0(W_t^{-1}B)$ для любого борелевского множества $B \subset \mathcal{E}_\alpha^s$. Основным результатом является следующая теорема.

Т е о р е м а. (1) *Корреляционные функции мер* μ_t *сходятся к пределу при* $t \to \infty$. (2) *Меры* μ_t *слабо сходятся при* $t \to \infty$ *на пространстве* $\mathcal{E}_\alpha^s$, *т.е. для всякой ограниченной непрерывной функции* f *на* $\mathcal{E}_\alpha^s$ *справедлива сходимость* $\int f(Y)\mu_t(dY) \to \int f(Y)\mu_\infty(dY)$ *при* $t \to \infty$. *При этом предельная мера* μ_∞ *является гауссовой мерой, трансляционно-инвариантной относительно сдвигов в* $\mathbb{Z}^d$. *Характеристический функционал меры* μ_∞ *имеет вид* $\hat{\mu}_\infty(Z) \equiv \int \exp\{i\langle Y, Z\rangle\}\mu_\infty(dY) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(Z, Z)\right\}$, $Z \in \mathcal{D} \equiv [D_F \oplus D_L]^2$, *где* $\mathcal{Q}_\infty(Z, Z)$ – *действительная неотрицательная квадратичная форма на пространстве* $\mathcal{D}$, *равная* $\mathcal{Q}_\infty(Z, Z) = \int |\langle Y, Z\rangle|^2 \mu_\infty(dY) = \langle Q_\infty(p, p'), Z(p) \otimes Z(p')\rangle$, $Q_\infty(p, p') = \int (Y(p) \otimes Y(p'))\mu_\infty(dY)$. *Предельная корреляционная матрица* $Q_\infty(p, p') = (Q_\infty^{ij}(p, p'))_{i,j=0}^1$ *является трансляционно-инвариантной относительно сдви-*

гов в $\mathbb{Z}^d$, *т.е.* $Q_\infty(p,p') = Q_\infty(p+k, p'+k)$ $\forall k \in \mathbb{Z}^d$, *а функции* $q_\infty^{ij}(k-k', r, r') := Q_\infty^{ij}(k+r, k'+r')$, $i, j = 0, 1$, *имеют вид* (*в преобразовании Зака*)

$$\tilde{q}_\infty^{11}(\theta) = \tilde{\mathscr{H}}(\theta)\tilde{q}_\infty^{00}(\theta) = \frac{1}{2}(T_+ + T_-)I,$$

$$\tilde{q}_\infty^{01}(\theta) = -\tilde{q}_\infty^{10}(\theta) =$$

$$= \frac{i}{2}(T_+ - T_-)\sum_{\sigma=1}^{\infty}\omega_\sigma^{-1}(\theta)\,\mathrm{sign}\left(\frac{\partial\omega_\sigma(\theta)}{\partial\theta_1}\right)\Pi_\sigma(\theta),$$

где $\Pi_\sigma(\theta)$ — *проектор на собственное подпространство*, *соответствующее собственному значению* $\omega_\sigma(\theta)$ *оператора* $\sqrt{\tilde{\mathscr{H}}(\theta)}$, $\sigma = 1, 2, \ldots$.

Заметим, что наша модель может быть рассмотрена как “открытая система, взаимодействующая с двумя тепловыми резервуарами”, где “резервуары” — это две части модели, состоящие из решений $Y(p,t)$ с $p_1 < -a$ и $p_1 > a$, а “открытая система” — остальная ее часть. В начальный момент времени “резервуары” находятся в тепловом равновесии с температурами T_- и T_+ (т.е. имеют гиббсовские распределения $g_\pm$). Используя явные формулы для предельных корреляционных функций, вычисляем предельную среднюю плотность потока энергии J и при дополнительных условиях на функцию взаимодействия R получаем

$$J = c(T_- - T_+, 0, \ldots, 0), \quad c > 0, \tag{5}$$

что соответствует Второму закону термодинамики, т.е. тепло передается от “горячего” резервуара к “холодному”. Таким образом, доказано, что существуют стационарные неравновесные состояния, при которых в изучаемой модели имеется ненулевой поток тепла.

Сходимость мер μ_t была доказана в [5] в частном случае, когда начальные меры являются трансляционно-инвариантными относительно сдвигов в $\mathbb{Z}^d$ вероятностными мерами на пространстве $\mathscr{E}_\alpha^0$. Формулы, аналогичные (5), были получены для поля Клейна–Гордона в [6, 7] и для гармонического кристалла в [8, 9]. Обзор открытых проблем и результатов, касающихся неравновесных систем, см., например, в статье [10], в которой также содержится обзор численных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашкрофт Н., Мермин Н.* Физика твердого тела. Т. 1, 2. М.: Мир, 1976 [перевод с анг.: *N.W. Ashcroft, N.D. Mermin*. Solid State Physics. New York: Saunders, 1976].
2. *Panati G., Spohn H., Teufel S.* // Commun. Math. Phys. 2003. V. 242. P. 547–578.
3. *Panati G., Spohn H., Teufel S.* // In: Analysis, Modeling and Simulation of Multiscale Problems, ed. *A. Mielke*, pp. 595–617. (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006).
4. *Zak J.* // Phys. Rev. 1968. V. 168. P. 685–695.
5. *Dudnikova T.V., Komech A.I.* // Rus. J. Math. Phys. 2005. V. 12. № 3. P. 301–325.
6. *Дудникова Т.В., Комеч А.И.* // Теор. вероятн. и ее примен. 2006. V. 50. № 4. С. 582–611.
7. *Дудникова Т.В.* // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 5. С. 110–131.
8. *Dudnikova T., Komech A., Mauser N.* // J. Stat. Phys. 2004. V. 114. P. 1035–1083.
9. *Dudnikova T.V.* // Rus. J. Math. Phys. 2019. V. 26. № 4. P. 429–453.
10. *Lepri S., Livi R., Politi A.* // Phys. Rep. 2003. V. 377. P. 1–80.

ON THE STATIONARY NON-EQUILIBRIUM MEASURES FOR THE “FIELD–CRYSTAL” SYSTEM

T. V. Dudnikova

Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

In the paper, we consider the Cauchy problem for a Hamiltonian system consisting of a Klein–Gordon field and an infinite harmonic crystal. We assume that the initial data of the problem are a random function and study the convergence of the distributions of the solutions to a limiting measure for large times. Under the condition that the initial random function in the “left” and “right” parts of the space has the Gibbs distribution with different temperatures, we find the stationary states of the system in which the limiting energy current density does not vanish. Thus, for this system, a class of stationary non-equilibrium states is constructed.

Keywords: Klein–Gordon field coupled to a crystal, Cauchy problem, Zak transform, random initial data, weak convergence of measures, Gaussian and Gibbs measures, energy current density, stationary nonequilibrium states