ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 41–44

МАТЕМАТИКА

УДК 519.615

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВЫРОЖДЕННЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ. *P*-ФАКТОР МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

© 2022 г. Академик РАН Ю. Г. Евтушенко[1,2,*], Е. Беднарчук[4], А. Прусинска[3], А. А. Третьяков[1,3,4,]**

Поступило 25.05.2022 г.
После доработки 18.08.2022 г.
Принято к публикации 20.08.2022 г.

В статье показывается локальная эквивалентность вырожденных и некорректных задач в классе достаточно гладких отображений, что обосновывает целесообразность применения так называемого *p*-фактор метода регуляризации для их решения. Описываются основные конструкции теории *p*-регулярности, необходимые для устойчивого решения приближенных задач и доказываются теоремы об оценках для регуляризирующих алгоритмов.

Ключевые слова: вырожденные и некорректные задачи, *p*-фактор метод

DOI: 10.31857/S2686954322050095

Рассмотрим задачу (уравнение)

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

где $F : X \to Y$, X, Y – банаховы пространства, F – достаточно гладкое отображение, $X_* = \{x^* \in X \,|\, F(x^*) = 0\}$ – множество решений уравнения (1). Наряду с (1) будем рассматривать приближенное уравнение

$$F_\varepsilon(x) = 0, \tag{2}$$

где $F_\varepsilon(x) \to F(x)$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. F_ε – приближение отображения F. Пусть $U(x^*)$ – некоторая окрестность точки x^*, а $F_0(x) \triangleq F(x)$. Введем

Определение 1. Будем говорить, что задача (1) некорректна в точке x^*, если существуют отображения $F_\varepsilon(x) \in C^1(X)$ такие, что для $\varepsilon > 0$ достаточно малых будет

$$\|F_\varepsilon(x) - F(x)\| \to 0, \quad \|F'_\varepsilon(x) - F'(x)\| \to 0, \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad x \in U(x^*) \tag{3}$$

– так называемое условие аппроксимации, но для множеств $X(\varepsilon) = \{x(\varepsilon) \in X \,|\, F_\varepsilon(x(\varepsilon)) = 0\}$ решений уравнения (2) существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$ такая, что либо

$$U(x^*) \cap X(\varepsilon_k) = \varnothing,$$

либо

$$\rho(X(\varepsilon_k), X_*) \ge \Delta > 0, \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Задачу (1) мы будем называть идеальной, а задачу (2) ε-возмущенной (или ε-приближенной). Отображением F аналогично называем идеальным, а отображение F_ε – ε-возмущенным (или ε-приближенным) отображением.

Определение 2. Будем говорить, что задача (1) вырождена в точке x^*, если $F'(x^*)$ – вырождена, т.е. $\operatorname{Im} F'(x^*) \neq Y$.

Наряду с определением 1 введем понятие слабо некорректной задачи (1).

Определение 3. Будем говорить, что задача (1) является слабо некорректной в точке x^*, если существует отображение $\bar{F}(x) \in C^1(X)$ такое, что

$$\|F(x) - \bar{F}(x)\| = o(\|x - x^*\|) \tag{4}$$

и задача $\bar{F}(x) = 0$ – некорректна.

Очевидно, что определению 3 удовлетворяет существенно более широкий класс отображений, чем определению 1. Отметим, что определение 1 некорректности фактически совпадает с классическим определением некорректности (см., например, [7]), за исключением добавленного здесь условия гладкости отображений и условия аппроксимации на производные $F'_\varepsilon(x)$ и $F'(x)$. Также рассматриваемый в статье класс задач суще-

[1] *Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Московский физико-технический институт, Московская область, г. Долгопрудный, Россия*
[3] *Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland*
[4] *System Res. Inst., Polish Acad. Sciences, Warsaw, Poland*
**E-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru*
***E-mail: prof.tretyakov@gmail.com*

ственно шире классического класса условно-корректных задач [7].

В реальной ситуации отображение F часто не известно, но известна его аппроксимация F_ε, поэтому такие проблемы мы называем обратными. Однако подразумевается, что идеальное отображение F существует (иначе нельзя говорить о решаемой задаче). Взаимосвязь между приближенными и вырожденными задачами в классе достаточно гладких отображений устанавливает следующий результат.

Т е о р е м а 1. *Пусть $F \in C^2(X)$ и $F(x^*) = 0$. Тогда задача* (1) *слабо некорректна в точке x^* тогда и только тогда, когда задача* (1) *вырождена в точке x^*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задача (1) некорректна. Покажем, что отображение $F(\cdot)$ вырождено в точке x^*. Действительно, если $F'(x^*)$ не вырождена, то по теореме о неявной функции [1] применительно к отображениям $F(x,\varepsilon) \triangleq F_\varepsilon(x)$, получаем существование $x(\varepsilon) \in U(x^*)$ такого, что $F(x(\varepsilon),\varepsilon) = 0$ и $\rho(x(\varepsilon),x^*) \le K\|F(x^*,\varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по всем $F_\varepsilon(x)$, удовлетворяющих условию аппроксимации (3). Это, в свою очередь, означает корректность задачи (1).

Предположим теперь, что $F'(x^*)$ вырождена. Тогда существует $\xi \in Y$ и $\xi \not\in \operatorname{Im} F'(x^*)$, $\|\xi\| = 1$. Покажем, что задача (1) слабо некорректна. Рассмотрим отображения $\bar{F}(x) = F(x^*) + F'(x^*)(x - x^*)$ и $\bar{F}_\varepsilon(x) = \bar{F}(x) + \varepsilon\xi$. Очевидно, что $\|F(x) - \bar{F}(x)\| = o(\|x - x^*\|)$, но уравнение (2) $\bar{F}_\varepsilon(x) = 0$ не имеет решения при $x \in U(x^*)$, так как $\varepsilon\xi \not\in \operatorname{Im} F'(x^*)$, а $F'(x^*)(x - x^*) \in \operatorname{Im} F'(x^*)$. То есть задача $\bar{F}(x) = 0$ не корректна, что означает слабую некорректность исходной задачи (1).

С л е д с т в и е 1. *Пусть F — линейное отображение $F \in C^1(X)$. Тогда задача* (1) *некорректна в точке x^* тогда и только тогда, когда задача* (1) *вырождена в точке x^*.*

Причем, если отображение F некорректно в точке x^*, то $F'(x^*)$ — вырожденно, а линейность нужна только при обратной импликации.

Таким образом, при решении приближенных задач целесообразно использовать методы, адаптированные для вырожденных задач, описание и основные конструкции которых предложены в теории p-регулярности (см., например, [2–4]).

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ p-РЕГУЛЯРНОСТИ

Будем рассматривать уравнение (1), причем отображение F вырождено в точке решения x^*.

Пусть

$$Y = Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_p, \tag{5}$$

где $Y_1 = \operatorname{Cl}(\operatorname{Im} F'(x^*))$ и $Z_1 = Y$. Через Z_2 обозначим замкнутое дополнение Y_1 до Y (если такое существует) и $P_{Z_2} : Y \to Z_2$ — оператор проектирования на Z_2 параллельно Y_1. Тогда Y_2 — замыкание линейной оболочки образа квадратичной формы $P_{Z_2}F''(x^*)[\cdot]^2$. И далее индуктивно

$$Y_i = \operatorname{Cl}(\operatorname{span} \operatorname{Im} P_{Z_i} F^{(i)}(x^*)[\cdot]^i) \subset Z_i,$$
$$i = 2,\ldots,p-1,$$

где Z_i — замкнутое дополнение $Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_{i-1}$ до Y и $P_{Z-i} : Y \to Z_i$ — операторы проектирования на Z_i параллельно $Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_{i-1}$, $i = 1,\ldots,p$. Окончательно, $Y_p = Z_p$. При этом порядок p выбирается как минимальное число (если такое существует), для которого выполнено представление (5).

Определим следующие отображения:

$$F_i : X \to Y_i, \quad F_i(x) = P_{Y_i}F(x), \quad i = 1,\ldots,p, \tag{6}$$

где $P_{Y_i} : Y \to Y_i$ оператор проектирования на Y_i параллельно $Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_{i-1} \oplus Y_{i+1} \oplus \ldots \oplus Y_p$. Тогда отображение F может быть представлено как

$$F(x) = F_1(x) + \ldots + F_p(x)$$

или в векторном виде

$$F(x) = \big(F_1(x),\ldots,F_p(x)\big).$$

О п р е д е л е н и е 4. Линейный оператор $\Psi_p = \Psi_p(h) : X \to Y$

$$\Psi_p(h) = F_1'(x^*) + F_2''(x^*)[h] + \ldots + F_p^{(p)}(x^*)[h]^{p-1} \tag{7}$$

называется p-фактор оператором, определенным элементом h, или просто p-фактор оператором, если это ясно из контекста.

Введем в рассмотрение нелинейный оператор $\Psi_p[\cdot]^p$ так, что

$$\Psi_p[x]^p = F_1'(x^*)[x] + F_2''(x^*)[x]^2 + \ldots + F_p^{(p)}(x^*)[x]^p.$$

Заметим, что $\Psi_p[x]^p = \Psi_p(x)[x]$.

О п р е д е л е н и е 5. p-ядро оператора Ψ_p есть множество

$$H_p(x^*) = \operatorname{Ker}^p\Psi_p = \{z \in X \,|\, F_1'(x^*)[z] + $$
$$+ F_2''(x^*)[z]^2 + \ldots + F_p^{(p)}(x^*)[z]^p = 0\}.$$

Заметим, что $\operatorname{Ker}^p\Psi_p = \cap_{k=1}^p \operatorname{Ker}^k F_k^{(k)}(x^*)$, где $\operatorname{Ker}^k F_k^{(k)}(\cdot) = \{z \in X \,|\, F^{(k)}(\cdot)[z]^k = 0\}$ — k-ядро отображения $F^{(k)}(\cdot)[\cdot]^k$.

Определение 6. Отображение F называется p-регулярным в точке x^* на элементе h, если $\operatorname{Im}\Psi_p(h) = Y$.

Определение 7. Отображение F называется p-регулярным в точке x^*, если оно p-регулярно на каждом элементе $h \in H_p(x^*)\backslash\{0\}$ или $H_p(x^*) = \{0\}$.

2. p-ФАКТОР МЕТОД РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение (1) при $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^n$ в случае вырождения $F'(x^*)$ в решении x^*. Тогда принципиальная схема p-фактор метода будет следующая:

$$\begin{gathered} x_{k+1} = x_k - \\ - \{F'(x_k) + P_2F''(x_k)h + \ldots + P_pF^p(x_k)h^{p-1}\}^{-1} \cdot \\ \cdot (F(x_k) + P_2F'(x_k)h + \ldots + P_pF^{(p-1)}(x_k)h^{p-1}), \\ k = 0,1,2,\ldots, \end{gathered} \tag{8}$$

где $P_i = P_{Y_i}$, $i = 1,\ldots,p$ и элемент h, $\|h\| = 1$ выбирается таким образом, что p-фактор оператор $\Psi_p(h) = F'(x^*) + P_2F''(x^*)h + \ldots + P_pF^{(p)}(x^*)h^{p-1}$ был невырожденным, что означает p-регулярность отображения F в точке x^* на элементе h.

Для p-фактор метода (8) будет справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $F \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ и существует элемент h, $\|h\| = 1$ такой, что p-фактор оператор $\Psi_p(h)$ не вырожден. Тогда для $x_0 \in U_\varepsilon(x^*)$ ($\varepsilon > 0$ — достаточно малое), последовательность $\{x_k\}$, определенная схемой* (8), *сходится к решению x^* и верна оценка скорости сходимости*

$$\|x_{k+1} - x^*\| \le C\|x_k - x^*\|^2, \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{9}$$

где $C > 0$ — независимая константа.

3. p-ФАКТОР МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ (p-ФАКТОР РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ)

Пусть x^* является решением идеальной задачи (уравнения) (1). При этом регулярность (не вырожденность) F в точке x^* не предполагается. Одновременно рассматриваем приближенное уравнение

$$\widetilde{F}(x) = 0, \tag{10}$$

$\|\widetilde{F}(x) - F(x)\| \le \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое и $x \in U(x^*)$. При этом считаем $\widetilde{F} \in C^{p+1}(X)$. Основная идея p-фактор регуляризации состоит в следующем. Нужно заменить уравнение (1) другим уравнением, которое гарантированно имело бы x^* своим решением и было бы невырождено в точке x^*. Здесь предлагается реализация данной идеи, основанной на конструкции p-регулярности. Базовым результатом является

Теорема 3. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $F, \widetilde{F} \in C^{p+1}(X,Y)$, $F(x^*) = 0$ и F — p-регулярно на элементе $h \in X$, $h \ne 0$, причем*

$$\|\widetilde{F}^{(k)}(x) - F^{(k)}(x)\| \le \varepsilon, \quad k = 0,1,\ldots,p+1,$$

$\forall x \in U(x^*)$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое, а $U(x^*)$ — некоторая окрестность точки x^*.

Тогда отображение $\Phi_{\widetilde{F}}(x)$

$$\Phi_{\widetilde{F}}(x) = \widetilde{F}(x) + P_2\widetilde{F}'(x)h + \ldots + P_p\widetilde{F}^{(p-1)}(x)h^{p-1}$$

является p-фактор регуляризующим для приближенного уравнения (10), *т.е.*

$$\Phi_{\widetilde{F}}^{-1}(0) \ne \varnothing \tag{11}$$

и

$$\begin{gathered} \rho(x^*, \Phi_{\widetilde{F}}^{-1}(0)) \le \\ \le \|\widetilde{F}(x^*) + P_2\widetilde{F}'(x^*)h + \ldots + P_p\widetilde{F}^{(p-1)}(x^*)h^{p-1}\| \le \\ \le C \cdot \varepsilon. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь через $\Phi_{\widetilde{F}}^{-1}(0)$ обозначим прообраз точки $y = 0$ для отображения $\Phi_{\widetilde{F}}(x)$, т.е. $\Phi_{\widetilde{F}}^{-1}(0) = \{x \in X \,|\, \Phi_{\widetilde{F}}(x) = 0\}$.

Замечание 1. Если p-фактор оператор $F'(x^*) + P_2F''(x^*)h + \ldots + P_pF^{(p)}(x^*)h^{p-1}$ биективен, то существует локально единственное решение уравнения (10): $\widetilde{F}(x) = 0$ в окрестности $U(x^*)$, которое мы обозначим через $\tilde{x}$. Тогда основной результат выглядит следующим образом

$$\Phi_{\widetilde{F}}(\tilde{x}) = 0 \tag{13}$$

и

$$\rho(x^*, \tilde{x}) \le C \cdot \varepsilon. \tag{14}$$

Например, условие биекции заведомо будем выполнено, если X, Y — конечномерные евклидовы пространства одинаковой размерности.

Доказательство. Обозначим $\Phi(\widetilde{F}, x) = \Phi_{\widetilde{F}}(x)$. Тогда, применяя классическую теорему о неявной функции [1] к отображению $\Phi(\widetilde{F}, x)$ в точке $\widetilde{F} = F$ и $x = x^*$, получаем, что оператор $\Phi'_x(F, x^*)$ не вырожден в этой точке (F, x^*) и, следовательно, существует функция $x = x(\widetilde{F})$, которая является локальным решением уравнения $\Phi(\widetilde{F}, x(\widetilde{F}))) = \Phi_{\widetilde{F}}(x(\widetilde{F})) = 0$ и справедливы оценки (12) и (14), т.к. $\|x(\widetilde{F}) - x^*\| \le C\|\Phi(\widetilde{F}, x^*)\|$ для $C > 0$ – независимой константы.

Использование в конструкции отображения $\Phi(\cdot)$ точных операторов P_k, $k = 1,\ldots, p-1$ сделано заведемо специально, так как этот аспект не является главным в идеологии предложенного подхода, а скорее техническим в практической реализации метода. Тем более, что уже существуют способы построения операторов P_k, $k = 1,\ldots, p-1$ на основе приближенной информации (см., например, [5, 6]). В общем случае построение операторов P_k или их приближений с нужными свойствами требует использования специфики рассматриваемой задачи (см. [2]).

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30005) и научной темы № 165/0015 Министерства образования и науки Польши.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
2. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* 2-регулярные решения нелинейных задач. Теория и численные методы. М.: Физико-математическая литература, 1999.
3. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* Фактор-анализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
4. *Tret'yakov A., Marsden J.E.* Factor analysis of nonlinear mappings: p-regularity theory //Communications on Pure & Applied Analysis. 2003. V. 2. № 4. P. 425–445.
5. *Брежнева О.А., Третьяков А.А.* Методы решения существенно нелинейных задач. М.: ВЦ РАН, 2000.
6. *Szczepanik E., Tret'yakov A.* Teoria P-regularności i metody rorwiązywania nieliniowych problemów optymalizacji. Siedlce: Uniwersytet Przyrodniczo Humanistyczny w Siedlcach, 2020. (на польском языке)
7. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Из-во СО РАН, 2018.

ON THE EQUIVALENCE OF SINGULAR AND ILL-POSED PROBLEMS. *P*-FACTOR REGULARIZATION METHOD

Academician of the RAS Yu. G. Evtushenko[a,b], E. Bednarczuk[d], A. Prusinska[c], and A. A. Tret'yakov[a,c,d]

[a] *Federal Research Center "Informatics and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[b] *Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow region, g. Dolgoprudny, Russian Federation*
[c] *Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland*
[d] *System Res. Inst., Polish Acad. Sciences, Warsaw, Poland*

In this paper it is shown the equivalence of singular and ill-posed problems from the points of view of approach to their solution. Justifies the use of the so-called p-factor method for approximate problems and a construction is proposed that makes it possible to regularize the approximate equation even in the case of degeneracy in the solution. A theorem on convergence of the proposed method of the p-factor regularization is proved and an estimate for the approximate solution is obtained.

Keywords: degenerate, ill-posed, p-regular, factor method