ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 45–48

МАТЕМАТИКА

УДК 514.177.2

МНОЖЕСТВА С НЕЧЕТНЫМИ РАССТОЯНИЯМИ И РАВНОУДАЛЕННЫЕ ВПРАВО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ЧЕБЫШЁВСКОЙ И МАНХЕТТЕНСКОЙ МЕТРИКАХ

© 2022 г. А. И. Голованов[1,*], А. Б. Купавский[1,2,**], А. А. Сагдеев[1,***]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 17.05.2022 г.
После доработки 25.06.2022 г.
Принято к публикации 27.07.2022 г.

Мы рассматриваем две связанные задачи экстремальной геометрии в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n_\infty$ с максимальной метрикой. В первой задаче мы показываем, что максимальный размер *равноудаленной вправо* последовательности точек в $\mathbb{R}^n_\infty$ есть $2^{n+1} - 1$. Здесь последовательность называется *равноудаленной вправо*, если каждая точка равноудалена от всех последующих. Во второй задаче мы доказываем, что наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_\infty$ с попарно нечетными расстояниями есть 2^n. Также получены частичные результаты для обеих задач в $\mathbb{R}^n_1$.

Ключевые слова: чебышёвская метрика, манхеттенская метрика, равносторонная размерность, множество с нечетными расстояниями, равноудаленная вправо последовательность

DOI: 10.31857/S2686954322050101

1. ВВЕДЕНИЕ

Для метрического пространства $\mathbb{M}$ назовем его *равносторонней размерностью* наибольшее число равноудаленных друг от друга точек в $\mathbb{M}$ и обозначим это число через $e(\mathbb{M})$. Эта величина активно изучалась для пространств $\mathbb{R}^n_p$ при $1 < p < \infty$. Напомним, что ℓ_p-расстояние между двумя точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ определяется по формуле

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p = (|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p)^{1/p}$$

для любого вещественного $p \geq 1$, а в случае $p = \infty$ — по формуле

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = \max_i |x_i - y_i|.$$

Нетрудно проверить (см. [12]), что в евклидовом случае $e(\mathbb{R}^n_2) = n + 1$, а в случае максимальной нормы $e(\mathbb{R}^n_\infty) = 2^n$. Нижние оценки представляются соответственно вершинами правильного тетраэдра и гиперкуба. Однако про $e(\mathbb{R}^n_p)$ известно намного меньше, когда $p \neq 2, \infty$. Например, для Манхеттенской метрики ℓ_1 Алон и Пудлак [1] показали, что $e(\mathbb{R}^n_1) < cn \log n$ для некоторой положительной константы c, в то время, как наилучшая известная нижняя оценка $e(\mathbb{R}^n_1) \geq 2n$ получается из рассмотрения вершин стандартного кроссполитопа (т.е. точек, у которых все координаты нулевые, кроме одной, равной ± 1). Каснер [9] выдвинул гипотезу о том, что нижняя оценка точна. Эта гипотеза была подтверждена лишь для $n = 3$ [2] и для $n = 4$ [10]. Лучшие известные оценки для других значений p на данный момент можно найти в [1, 14, 16, 17].

В настоящей работе мы рассматриваем две задачи, связанные с равносторонней размерностью. В первой задаче рассматриваются *равноудаленные вправо* последовательности. Последовательность

[1] *Московский физико-технический институт, Москва, Россия*
[2] *G-SCOP, Université Grenoble-Alpes, CNRS, Франция*
**E-mail: Golovanov@phystech.edu*
***E-mail: kupavskii@ya.ru*
****E-mail: sagdeev.aa@phystech.edu*

$\mathbf{x}^{(1)}, ..., \mathbf{x}^{(m)} \in \mathbb{R}_p^n$ назовем *равноудаленной вправо*, если $\|\mathbf{x}^{(j_1)} - \mathbf{x}^{(i)}\|_p = \|\mathbf{x}^{(j_2)} - \mathbf{x}^{(i)}\|_p$ для всех $1 \le i < j_1 \le j_2 \le m$. Неформально говоря, каждая точка равноудалена от всех последующих.

В работе [11, Следствие 14] была доказана следующая общая теорема:

Теорема 1. *Во всяком нормированном пространстве размерности n размер наибольшей равноудаленной вправо последовательности не превосходит* $O(6^n n^2 \log^2 n)$.

Позднее Полянский [13] улучшил эту оценку до $O(3^n n)$. Этот результат можно применить, в частности, для доказательства верхней оценки на размер множества с k различными расстояниями.

Нетрудно видеть, что максимальный размер равноудаленной вправо последовательности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_2^n$ равен $n + 2$. В качестве примера можно привести центр правильного тетраэдра, после которого идут вершины тетраэдра в произвольном порядке[1]. Иные результаты для других ℓ_p пока неизвестны.

В настоящей работе мы получаем оценки для равноудаленных вправо последовательностей с метриками ℓ_∞ и ℓ_1.

Теорема 2. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *максимальный размер равноудаленной вправо последовательности точек из* $\mathbb{R}_\infty^n$ *равен* $2^{n+1} - 1$.

Теорема 3, *Для любого* $n \in N$ *существует равноудаленная вправо последовательность из* $4n - 1$ *точки в* $\mathbb{R}_1^n$.

Вторая задача, которую мы рассматриваем, происходит из работы [8]. Для данных $n \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty]$ можно построить $e(\mathbb{R}_p^n)$ точек в $\mathbb{R}_p^n$ с попарно единичными расстояниями. В частности, наибольшее число точек в $\mathbb{R}_p^n$ с попарно нечетными расстояниями не меньше $e(\mathbb{R}_p^n)$. В работе [8] показано, что эта тривиальная нижняя оценка в сущности оптимальна в евклидовом случае. В частности, авторы работы доказали следующее.

Теорема 4 ([8]). *Наибольшее число точек в* $\mathbb{R}_2^n$ *с попарно нечетными расстояниями равно* $n + 2$, *если* $n \equiv 14 \pmod{16}$, *и* $n + 1$ *в противном случае*.

[1] Этот пример не единственен. Более того, существует континуально много попарно неизометричных последовательностей максимального размера.

Мы доказываем следующий аналогичный результат для максимальной нормы. В частности, это показывает, что естественная конфигурация, заданная вершинами единичного гиперкуба, оптимальна в любой размерности.

Теорема 5. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *наибольшее число точек в* $\mathbb{R}_\infty^n$ *с попарно нечетными расстояниями есть* 2^n.

Случай с Манхеттенской метрикой не так прозрачен. Для всех $n \in \mathbb{N}$ мы нашли явную конструкцию из $7n$ точек в $\mathbb{R}_1^{3n}$ с попарно нечетными расстояниями. Из этого следует, что вершины стандартного кросполитопа не представляют оптимальную конструкцию. С другой стороны, лучшая верхняя оценка, которую мы получаем, растет асимптотически как n!

Теорема 6. *Число точек* $\mathbb{R}_1^n$ *с попарно нечетными расстояниями не превосходит* $n! \cdot n \cdot \ln n \cdot (4 + o(1))$ *при* $n \to \infty$.

Вообще говоря, найденная нами верхняя оценка также является верхней оценкой *хроматического числа* пространства $\mathbb{R}_1^n$ с запрещенными нечетными расстояниями. Интересно, что для евклидовой плоскости неизвестно, конечно ли ее хроматическое число с запрещенными нечетными расстояниями (см. [7]).

2. ИДЕИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ВЕРХНИХ ОЦЕНОК

При работе с метрикой ℓ_∞ в обоих результатах используется следующий инструмент. Напомним, что *частично упорядоченным множеством* (сокращенно *чум*) называется пара $\mathcal{P} = (S, \preceq)$, где S есть множество, а $\preceq$ – рефлексивное антисимметричное транзитивное отношение на его элементах. Назовем $x, y \in S$ *сравнимыми*, если $x \preceq y$ или $y \preceq x$. В противном случае будем называть их *несравнимыми*. Множество попарно сравнимых элементов будем называть *цепью*, а попарно несравнимых – *антицепью*.

Теорема Дилворта [4] утверждает, что размер наибольшей антицепи во всяком чуме равен наименьшему количеству цепей, в объединении дающих все множество. Для доказательства наших результатов в метрике ℓ_∞ мы строим чумы, в котором нет больших цепей, а антицепями служат конструкции меньшей размерности. В частности, мы говорим, что $x \preceq y$, если $x = y$ или если $|x_n - y_n| > |x_i - y_i|$ для всех $i < n$ и при этом $x_n < y_n$.

Например, в случае множеств с нечетными расстояниями при таком построении всякая антицепь есть пример для размерности $n - 1$, а все цепи имеют размеры не более 2. В таком случае теорема Дилворта дает рекуррентное соотношение $f(n) \le 2f(n-1)$ на искомую оценку, что эквивалентно $f(n) \le 2^n$. В случае равноудаленных вправо последовательностей может найтись одна цепь длины 3, после удаления которой все цепи имеют длины не более 2, что приводит к похожему соотношению $f(n) \le 2f(n-1)+1$, которое эквивалентно $f(n) \le 2^{n+1} - 1$.

Для доказательства верхней оценки случая нечетных расстояний в ℓ_1 рассматривается решетка Λ, порожденная векторами $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_n, \ldots, \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n$, $2\mathbf{e}_n$, где $\mathbf{e}_i$ есть i-й базисный вектор. В каждой точке этой решетки устанавливается копия уменьшенного кросcполитопа $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_1 < 1/2\}$. Оказывается, что никакие две точки объединения копий этого тела не находятся на нечетном расстоянии друг от друга. Также оказывается, что асимптотически достаточно $\frac{\det(\Lambda)}{\operatorname{vol}(C)} \cdot (2+o(1))n\ln n$ копий этого объединения, чтобы покрыть все пространство, см. [5]. Из этого наблюдения и получается верхняя оценка.

3. ПОСТРОЕНИЕ КОНФИГУРАЦИИ, ДАЮЩЕЙ НИЖНЮЮ ОЦЕНКУ

Для того, чтобы построить пример равноудаленной вправо последовательности в $\mathbb{R}^n_\infty$ или в $\mathbb{R}^n_\infty$, достаточно рассмотреть вершины соответственно правильного гиперкуба или кросcполитопа. Если у этого многогранника m вершин, то последовательность размера $2m-1$ можно построить, зафиксировав вершину $\mathbf{x}$, которая будет последней, и затем в некотором порядке для каждой из остальных вершин $\mathbf{y}$ добавлять в последовательность $\lambda\mathbf{y}$ и $2\lambda\mathbf{y}$, постоянно уменьшая λ. Порядок выбора вершин задается отдельно в каждом случае. Оказывается, что при достаточном уменьшении λ (например, на каждом шаге в 2 раза) полученная последовательность действительно оказывается равноудаленной вправо в данной метрике.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят Илью Богданова за упрощение оригинального доказательства теоремы 2.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Настоящая работа выполнена при поддержке гранта RSF N 22-21-00368.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alon N., Pudlák P.* Equilateral Sets in l_p^n, Geom. Funct. Anal. 2003. V. 13. № 3. P. 467–482.
2. *Bandelt H.-J., Chepoi V., Laurent M.* Embedding into rectilinear spaces, Discrete Comput. Geom. 1998. V. 19. № 4. P. 595–604.
3. *Blokhuis A., Wilbrink H.A.* Alternative proof of Sine's theorem on the size of a regular polygon in $\mathbb{R}^n$ with the ℓ_∞-metric, Discrete Comput. Geom. 1992. V. 7. № 4. P. 433–434.
4. *Dilworth R.P.* A decomposition theorem for partially ordered sets, Ann. of Math. 1950. V. 51. № 2. P. 161–166.
5. *Erdös P., Rogers C.A.* Covering space with convex bodies, Acta Arith. 1962. V. 7. № 3. P. 281–285.
6. *Frankl N., Kupavskii A., Sagdeev A.* Max-norm Ramsey Theory, arXiv preprint 2111.08949, 2021.
7. *Ardal H., Maňuch J., Rosenfeld M., Shelah S., Stacho L.* The Odd-Distance Plane Graph, Discrete Comput. Geom. 2009. V. 42. P. 132–141.
8. *Graham R.L., Rothschild B.L., Straus E.G.* Are there $n + 2$ points in E^n with odd integral distances? Amer. Math. Monthly. 1974. V. 81. № 1. P. 21–25.
9. *Guy R.* editor, Unsolved Problems: An Olla-Podrida of Open Problems, Often Oddly Posed, Amer. Math. Monthly. 1983. V. 90. № 3. P. 196–200.
10. *Koolen J., Laurent M., Schrijver A.* Equilateral dimension of the rectilinear space, Des. Codes Cryptogr. 2000. V. 21. № 1. P. 149–164.
11. *Naszódi M., Pach J., Swanepoel K.* Arrangements of homothets of a convex body, Mathematika. 2017. V. 63. № 2. P. 696–710.
12. *Petty C.M.* Equilateral sets in Minkowski spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 29. № 2. P. 369–374.
13. *Polyanskii A.* Pairwise intersecting homothets of a convex body, Discrete Math. 2017. V. 340. № 8. P. 1950–1956.
14. *Smyth C.* Equilateral sets in l_p^d, Thirty Essays on Geometric Graph Theory, ed. *J. Pach*, Springer, New York, 2013. P. 483–488.
15. *Swanepoel K.J.* Cardinalities of k-distance sets in Minkowski spaces, Discrete Mathematics. 1999. V. 197. P. 759–767.
16. *Swanepoel K.J.* A problem of Kusner on equilateral sets, Arch. Math. 2004. V. 83. № 2. P. 164–170.
17. *Swanepoel K.J., Villa R.* Maximal equilateral sets, Discrete Comput. Geom. 2013. V. 50. № 2. P. 354–373.

ODD-DISTANCE AND RIGHT-EQUIDISTANT SETS IN THE MAXIMUM AND MANHATTAN METRICS

A. I. Golovanov[a], A. B. Kupavskii[a,b], and A. A. Sagdeev[a]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation*

[b] *G-SCOP, Université Grenoble-Alpes, CNRS, France*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We solve two related extremal-geometric questions in the n-dimensional space $\mathbb{R}^n_\infty$ equipped with the maximum metric. First, we prove that the maximum size of a *right-equidistant* sequence of points in $\mathbb{R}^n_\infty$ equals $2^{n+1}-1$. A sequence is *right-equidistant* if each of the points is at the same distance from all the succeeding points. Second, we prove that the maximum number of points in $\mathbb{R}^n_\infty$ with pairwise odd distances equals 2^n. We also obtain partial results for both questions in the n-dimensional space $\mathbb{R}^n_1$ with the Manhattan distance.

Keywords: maximum metric, Manhattan metric, equilateral dimension, odd-distance sets, right-equidistant sequences