ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 49–53

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ПЕШЕХОДНЫХ МОСТОВ

С. А. Кащенко[1,2,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 18.05.2022 г.
После доработки 27.06.2022 г.
Принято к публикации 07.07.2022 г.

От дискретной модели, описывающей колебания пешеходного моста, осуществлен переход к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, непрерывно зависящей от временной и пространственной переменных. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости стационара. Исследована локальная динамика получившейся модели, опирающаяся на формализм метода нормальных форм. Как следствие бесконечномерности критических случаев показано, что роль нормальной формы играет специальная эволюционная краевая задача. Построены семейства простейших ступенчатых периодических по времени решений этой краевой задачи.

Ключевые слова: бифуркации, устойчивость, квазинормальные формы, асимптотика, разрывные периодические решения

DOI: 10.31857/S2686954322050113

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [1] в связи с изучением вопросов устойчивости пешеходных висячих мостов была предложена модель, учитывающая влияние пешеходов на колебания конструкций

$$\begin{gathered}\ddot{u}_j + \lambda(\dot{u}_j^2 + u_j^2 - \varepsilon)\dot{u}_j + \omega^2 u_j = -\ddot{y},\\ \ddot{y} + 2h\dot{y} + \Omega^2 y = -\frac{r}{N}\sum_{i=1}^{N}\ddot{u}_i,\end{gathered} \tag{1}$$

где $j = 1,\ldots,N$. Здесь величина u_j определяет отклонение “пешехода” относительно моста, а y задает отклонение моста. Все параметры этой модели “шагоход–мост” положительны. Они описаны в [1] и [2]. Ряд интересных результатов о динамических свойствах такого типа моделей, базирующихся на исследованиях явлений синхронизации, приведены в [3–12].

В настоящей работе приведены несколько аналитических результатов о коллективном поведении цепочки связанных осцилляторов (1).

Значения $u_j(t)$ можно ассоциировать со значениями функций двух переменных $u(t,x_j)$. Здесь $x_j \in [0,1]$ – равномерно распределенные на некоторой окружности точки с угловой координатой $x_j = 2\pi N^{-1}j$. При таком определении точек x_j естественным образом возникают периодические краевые условия по переменной x. Отметим, что можно было бы рассмотреть и равномерно распределенные на отрезке [0, 1] точки x_j. Тогда более естественно использовать краевые условия типа Неймана. Поскольку этот случай отрезка существенно не отличается от случая окружности, то ограничимся рассмотрением случая периодических краевых условий.

Основных предположений, которые открывают путь к применению аналитических методов, два. Во-первых, предполагаем, что количество осцилляторов (пешеходов) в (1) достаточно велико, т.е. $N \gg 1$. Это дает основание перейти от дискретной системы относительно $u(t,x_j)$, $y(t)$ к непрерывной пространственно-распределенной краевой задаче для величин $u(t,x)$, $y(t)$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda\left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \varepsilon\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \omega^2 u = -\frac{d^2 y}{dt^2},\\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2h\frac{dy}{dt} + \Omega^2 y = -r\int_0^1 \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t^2}\,ds,\end{gathered} \tag{2}$$

$$u(t, x+1) \equiv u(t,x). \tag{3}$$

[1] *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия*
[2] *Региональный научно-образовательный математический центр “Центр интегрируемых систем”, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия*
**E-mail: kasch@uniyar.ac.ru*

Второе ограничение состоит в том, что параметр ε является достаточно малым:

$$0 < \varepsilon \ll 1. \tag{4}$$

Отметим, что при этом условии уравнение Ван–дер–Поля

$$\ddot{u} + \lambda[\dot{u}^2 + u^2 - \varepsilon]\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

имеет устойчивый цикл $u_0(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\rho_0\cos(\omega t(1 + O(\varepsilon))) + O(\varepsilon^{3/2})$ с периодом $2\pi(\omega + O(\varepsilon))^{-1}$, где $\rho_0 = (3\omega^2 + 1)^{-1/2}$.

При условии (4) рассмотрим вопрос о поведении всех решений краевой задачи (2), (3) с начальными условиями из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия.

Введем обозначение. Пусть

$$M(v(x)) = \int_0^1 v(x)dx.$$

Положим в (2), (3)

$$u(t,x) = u_0(t) + u_1(t,x), \quad M(u_1) = 0.$$

В результате приходим к системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \lambda M\left(\left(u^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) - \\ - \lambda\varepsilon\dfrac{du_0}{dt} + \omega^2 u_0 = -\dfrac{d^2 y}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} + 2h\dfrac{dy}{dt} + \Omega^2 y = -r\dfrac{d^2 u_0}{dt^2}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \lambda\left[\left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)\frac{\partial u}{\partial t} - \right. \\ \left. - M\left(\left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] - \lambda\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial t} + \omega^2 u_1 = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

С учетом краевых условий (3) имеем равенства

$$u_1(t, x+1) \equiv u_1(t,x). \tag{7}$$

При изучении локальной динамики решений важную роль играет поведение решений при $\varepsilon = 0$ линеаризованных систем, линейных относительно u_0, u_1 и y:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u_0}{dt^2} + \omega^2 u_0 = -\dfrac{d^2 y}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} + 2h\dfrac{dy}{dt} + \Omega^2 y = -r\dfrac{d^2 u_0}{dt^2}, \end{cases} \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим отдельно два случая, когда параметр r является малым, и когда он не является малым.

2. ПЕРВЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть параметр r является малым, т.е. для некоторого фиксированного значения r_1 имеем равенство

$$r = \varepsilon r_1. \tag{10}$$

В краевой задаче (7)–(9) реализуется критический случай бесконечного множества пар чисто мнимых корней $\pm i\omega$. Им соответствуют периодические решения

$$\begin{gathered} u_k(t,x) = \exp(i\omega t + ikx), \quad y_k(t,x) = 0 \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{gathered} \tag{11}$$

Используем методику построения квазинормальных форм, разработанную в [13, 14]. Будем искать асимптотику решений краевой задачи (5)–(7), базирующихся на решении (11). Для этого используем формальное асимптотическое представление

$$\begin{gathered} u(t,x) = \varepsilon^{1/2}(\xi(\tau,x)\exp(i\omega t) + \\ + \bar{\xi}(\tau,x)\exp(-i\omega t)) + \varepsilon^{3/2}u_3(t,\tau,x) + \ldots, \\ y(t) = \varepsilon^{3/2}y_3(t,\tau) + \ldots. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$ – медленное время, от x зависимость 1-периодическая, $\xi(\tau,x)$ – неизвестные амплитуды, функции u_3 и y_3 – $2\pi/\omega$-периодичны по t.

Подставим (12) в (5), (6) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε. При $\varepsilon^{1/2}$ получаем верное равенство, а собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, приходим к системе уравнений для u_3, y_3. Условие разрешимости этой системы в указанном классе функций состоит в выполнении равенства

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\lambda\xi + \gamma\int_0^1 \xi(\tau,s)ds + b\xi|\xi|^2 \tag{13}$$

и краевых условий

$$\xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau,x). \tag{14}$$

Для коэффициентов γ и b имеем выражения

$$\gamma = r_1\omega^2[2(\Omega^2 - \omega^2 + 2i\omega h)]^{-1},$$

$$b = -\frac{1}{2}\lambda(3\omega^2 + 1).$$

Следующее утверждение является центральным. Оно говорит о том, что краевая задача (13)–(14) является квазинормальной формой.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнено условие* (10) *и краевая задача* (13)–(14) *имеет ограниченное при* $\tau \to \infty$, $x \in [0,1]$ *решение* $\xi(\tau,x)$. *Тогда* 2π-*периодические по x функции*

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}(\xi(\tau,x)\exp(i\omega t) + \overline{\xi}(\tau,x)\exp(-i\omega t)) + \\ + \varepsilon^{3/2}\frac{\lambda i}{8}(1-\omega^2)(\xi^3(\tau,x)\exp(3i\omega t) - \\ - \overline{\xi}^3(\tau,x)\exp(-3i\omega t)), \quad (15)$$

$$y(t,x,\varepsilon) = \\ = \varepsilon^{3/2} r\omega^2 M([\Omega^2 - \omega^2 + 2ih\omega]^{-1}\xi(\tau,x)\exp(i\omega t) + \\ + [\Omega^2 - \omega^2 - 2ih\omega]^{-1}\overline{\xi}(\tau,x)\exp(-i\omega t)) \quad (16)$$

удовлетворяет исходной системе (2) с точностью до $o(\varepsilon^{3/2})$.

Рассмотрим вопрос о построении точных решений краевой задачи (13), (14). Положим $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2)\lambda$, $b_0 = 3\omega^2 + 1$ $(b_0 > 0)$.

При условии $\frac{\lambda}{2} + \gamma_1 > 0$ имеем бесконечно много периодических решений

$$\xi_0(\tau,x) = ((1+\gamma_1)b_0^{-1})^{1/2}\exp\left(i\gamma_2\frac{1}{2}\lambda\tau\right),$$
$$\xi_k(\tau,x) = b_0^{-1/2}\exp(i2\pi kx),$$
$$(k = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Более интересно построить периодические по τ и кусочно-постоянные по пространственной переменной решения. Например, фиксируем произвольное (конечное) количество интервалов из отрезка [0, 1] суммарной длиной 1/2 и положим на них $\xi(\tau,x) = ((1+\gamma_1)b_0^{-1})^{1/2}\exp(i\gamma_2\lambda\tau/2)$, а для остальных значений x из [0, 1] положим $\xi(\tau,x) = -((1+\gamma_1)b_0^{-1})^{1/2}\exp(i\gamma_2\lambda\tau/2)$.

Можно сконструировать семейства $4\pi(\lambda\gamma_2)^{-1}$-периодические по τ и 1-периодические и кусочно-непрерывные по x решения $\xi(\tau, x, \alpha, k_1, k_2) = \rho(x,\alpha,k_1,k_2)\exp(i\gamma_2\lambda\tau/2)$, где

$$\rho(x,\alpha,k_1,k_2) = \begin{cases} ((1+\gamma_1)b_0^{-1})^{1/2}\exp(i2\pi\alpha^{-1}k_1x), \\ x \in (0,\alpha), \quad k_1 = \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ ((1+\gamma_1)b_0^{-1})^{1/2}\exp(i2\pi(-\alpha)^{-1}k_2x), \\ x \in (\alpha,1), \quad k_2 = \pm 1, \pm 2, \ldots. \end{cases}$$

Более интересны циклы, состоящие из двух различных по “амплитуде” ступенек на отрезке [0, 1]. Для их построения фиксируем произвольно параметры $\alpha \in (0,1)$ и $\varphi_{1,2} \in [0,2\pi]$. Положим

$$\xi_0(\tau,x) = \rho(x)\exp(i\delta\tau),$$
$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1\exp(i\varphi_1), & x \in [0,\alpha], \\ \rho_2\exp(i\varphi_2), & x \in [\alpha,1]. \end{cases}$$

Подставим это выражение в (13). Тогда получим систему четырех алгебраических уравнений относительно пяти вещественных переменных ρ_1, ρ_2, δ, α и $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \in [0,2\pi]$

$$B\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \alpha\gamma_2 & -(1-\alpha)(\gamma_1\cos\varphi - \gamma_2\sin\varphi) \\ -\alpha\gamma_1\sin\varphi + \alpha\gamma_2\cos\varphi & (1-\alpha)\gamma_2 \end{pmatrix},$$

$$b_0\rho_1^3 = (1+\alpha\gamma_1)\rho_1 + (1-\alpha)(\gamma_1\cos\varphi - \gamma_2\sin\varphi)\rho_2, \quad (18)$$

$$b_0\rho_2^3 = (1+(1-\alpha)\gamma_1)\rho_2 + \alpha(\gamma_1\cos\varphi + \gamma_2\sin\varphi)\rho_1. \quad (19)$$

Условие вещественности собственных значений δ_+ и δ_- и отвечающих им собственных векторов в (17) состоит в выполнении неравенства

$$4\alpha(1-\alpha)\sin^2\varphi \le \gamma_2^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1}. \quad (20)$$

Тогда

$$\delta_\pm = \frac{1}{2}\gamma_2 \pm [\gamma_2^2 - 4\alpha(1-\alpha)\sin^2\varphi\cdot(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)]^{1/2}$$

и

$$\rho_2^\pm = c_\pm\rho_1^\pm, \quad \text{где} \quad c_\pm = (\delta_\pm - \alpha\gamma_2)\times \\ \times[(1-\alpha)(\gamma_2\cos\varphi + \gamma_1\sin\varphi)]^{-1}. \quad (21)$$

С учетом (20) и (21) выражения (18) и (19) принимают вид

$$b_0(\rho_1^\pm)^2 = R_1^\pm, \quad \text{где} \quad R_1^\pm = 1 + \alpha\gamma_1 + \\ + (1-\alpha)c_\pm(\gamma_1\cos\varphi - \gamma_2\sin\varphi), \quad (22)$$

$$b_0(\rho_1^\pm)^2 = R_2^\pm, \quad \text{где} \quad R_2^\pm = [(1+(1-\alpha)\gamma_1)c_\pm + \\ + \alpha(\gamma_1\cos\varphi + \gamma_2\sin\varphi)]c_\pm^{-3}. \quad (23)$$

Фиксируем произвольно параметр $\varphi \in [0,2\pi]$. Через $\Phi_\pm(\varphi)$ обозначим множество всех таких значений $\alpha \in [0,1]$, для которых выполнены неравенства (20) и $R_j^\pm \ge 0$ $(j = 1,2)$. Приравнивая правые части в (22) и (23), приходим к равенству

$$R_1^\pm = R_2^\pm, \quad (24)$$

которое рассматриваем как уравнение относительно $\alpha_\pm = \alpha_\pm(\varphi)$. В том случае, когда корень $\alpha_\pm(\varphi)$ этого уравнения существует и принадлежит соответственно множеству $\Phi_\pm(\varphi)$, определяем все элементы ступенчатого периодического решения $\rho(x)\exp(i\delta\tau)$ краевой задачи (13), (14).

Численные эксперименты позволили установить, что при определенных значениях коэффициентов в (13) существуют однопараметрические семейства таких ступенчатых периодических решений.

3. ВТОРОЙ СЛУЧАЙ

Здесь рассматриваем ситуацию, когда параметр $r \neq 0$ и как-то фиксирован. Предполагаем, что все корни характеристического уравнения

$$(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda^2 + 2h\lambda + \Omega^2) - r\lambda^4 = 0$$

для линейной системы (8) имеют отрицательные вещественные части. Тогда краевая задача (9), (7) имеет бесконечно много периодических решений (11), где индекс k принимает значения $\pm 1, \pm 2, \ldots$. В силу того, что $k \neq 0$, в выражении (12) появляется дополнительное условие

$$M(\xi(\tau, x)) = 0. \tag{25}$$

Подставляя (12) в (2), (3) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем систему уравнений относительно $2\pi/\omega$-периодических по t функций u_3 и y_3. Из условия разрешимости этой системы приходим к уравнению

$$2\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda\xi - \lambda(1 + 3\omega^2)(\xi|\xi|^2 - M(\xi|\xi|^2)) \tag{26}$$

с условиями

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x), \quad M(\xi(\tau, x)) = 0. \tag{27}$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполнено условие $r \neq 0$ и краевая задача* (26), (27) *имеет ограниченное при $\tau \to \infty, x \in [0,1]$ решение $\xi(\tau, x)$. Тогда 2π-периодические по x функции* (15) *и $y(t, x, \varepsilon) = 0$ удовлетворяют исходной системе* (2) *с точностью до $o(\varepsilon^{3/2})$.*

Тем самым полученная краевая задача является квазинормальной формой в рассматриваемой ситуации.

Периодическими решениями (26), (27) являются, например, функции $(1 + 3\omega^2)^{-1/2}\exp(i2\pi kx)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Состояниями равновесия для (26), (27) является зависещее от параметра $\alpha \in (0,1)$ семейство ступенчатых функций

$$\xi(x) = \begin{cases} (1-\alpha)(\alpha(1+3\omega^2)^{1/2})^{-1}, & x \in [0, \alpha], \\ (1+3\omega^2)^{-1/2}, & x \in (\alpha, 1]. \end{cases} \tag{28}$$

З а м е ч а н и е 3.1. Построенные выше ступенчатые решения допускают асимптотическое исследование их устойчивости. Здесь на этом не останавливаемся. Отметим лишь, что некоторые результаты об устойчивости решений вида (28) приведены в [15].

З а м е ч а н и е 3.2. В более общем случае, когда в исходной системе (2) в левой части первого уравнения присутствует, например, слагаемое γu^3, приходим к квазинормальной форме, которая отличается от (26) только наличием еще одного чисто мнимого слагаемого $3i\lambda\gamma\xi|\xi|^2$. Это приводит к тому, что вместо семейства состояний равновесия в (26), (27) появляются континуальные семейства периодических по τ решений с различными периодами.

З а м е ч а н и е 3.3. При рассмотрении вопроса о построении трех, четырех и т.д. ступенчатых на отрезке [0, 1] решений с различными амплитудами возникают многопараметрические семейства таких решений.

В качестве важного вывода отметим, что динамические свойства краевых задач (13), (14) и (26), (27) являются достаточно богатыми.

В порядке обсуждения результатов отметим, что на том же пути рассматривается квазилинейный случай, когда первое уравнение в (2) заменяется на

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 u + \varepsilon f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\frac{d^2 y}{dt^2}.$$

В этом случае аналогичная (13) квазинормальная форма имеет вид

$$2i\omega\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = g(\xi) - M(g(\xi)),$$

$$g(\xi) = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f\left(\xi\exp(i\omega t) + \bar{\xi}\exp(-i\omega t),\right. \tag{29}$$

$$\left. i\omega\xi\exp(i\omega t) - i\omega\bar{\xi}\exp(-i\omega t)\right)\exp(-i\omega t)dt$$

и для $u(t, \tau, x)$, $y(t, \tau)$ имеют место асимптотические представления

$$u(t, \tau, x) = \xi(\tau, x)\exp(i\omega t) +$$
$$+ \bar{\xi}(\tau, x)\exp(-i\omega t) + \varepsilon u_1(t, \tau, x) + \ldots,$$
$$y(t, \tau) = \varepsilon y_1(t, \tau) + \ldots.$$

Можно так подобрать функцию f, например, в виде многочлена по u и $\partial u/\partial t$ степени 5, чтобы колебания носили кластерный характер: краевая задача (29), (27) имела такие ступенчатые решения, что различные “ступени” колебались с различными периодами по t.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 21-71-30011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Belykh I., Jeter R., Belykh V.* Foot force models of crowd dynamics on a wobbly bridge // Sci. Adv. 2017. V. 3. e1701512.
2. *Bennett M., Schatz M.F., Rockwood H., Wiesenfeld K.* Huygens’s clocks // Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. 2002. V. 458. P. 563–579.
3. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge Univ. Press, 2003. V. 12.

4. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D.L., Zhou C.S.* The synchronization of chaotic systems. Phys. Rep. 2002. V. 366. P. 1–101.
5. *Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M.* Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems. Physica D. 2004. V. 195. P. 159–187.
6. *Belykh I.V., Porfiri M.* Introduction: Collective dynamics of mechanical oscillators and beyond. Chaos 26. 2016. 116101.
7. *Strogatz S.H., Abrams D.M., McRobie A., Eckhardt B., Ott E.* Theoretical mechanics: Crowd synchrony on the Millennium Bridge // Nature. 2005. V. 438. P. 43–44.
8. *Eckhardt B., Ott E., Strogatz S.H., Abrams D.M., McRobie A.* Modeling walker synchronization on the Millennium Bridge // Phys. Rev. E 75. 2007. 021110.
9. *Abdulrehem M.M., Ott E.* Low dimensional description of pedestrian-induced oscillation of the Millennium Bridge // Chaos. 2009. V. 19. 013129.
10. *Bocian M., Macdonald J.H.G., Burn J.F.* Biomechanically inspired modelling of pedestrian-induced forces on laterally oscillating structures // J. Sound Vib. 2012. V. 331. P. 3914–3929.
11. *Barker C.* Some observations on the nature of the mechanism that drives the self-excited lateral response of footbridges // Proceedings of the International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of Footbridges, 20 to 22 November (2002).
12. *Acebron J.A., Bonilla L.L., Vicente C.J.P., Ritort F., Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // Rev. Mod. Phys. 2005. V. 77. P. 137.
13. *Кащенко С.А.* Бифуркации в пространственно распределенных цепочках двумерных систем уравнений // Успехи математических наук. 2020. Т. 75, 6(456). С. 171–172.
14. *Кащенко С.А.* Локальная динамика цепочек связаных систем Ван-дер-Поля // Математические заметки. 2020. Т. 108. № 6. С. 936–940.
15. *Grigorieva E.V., Kashchenko S.A.* Rectangular structures in the model of an optoelectronic oscillator with delay // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2021. V. 417. P. 132818.

QUASINORMAL FORMS IN THE PROBLEM OF VIBRATION OF PEDESTRIAN BRIDGES

S. A. Kashchenko[a,b]

[a] *P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation*

[b] *Regional Scientific and Educational Mathematical Center "Center for Integrable Systems", P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

From a discrete model describing the oscillations of a pedestrian bridge, a transition was made to a system of nonlinear integro-differential equations that continuously depends on time and space variables. Critical cases are singled out in the problem of stationary stability. The local dynamics of the resulting model based on the formalism of the method of normal forms is investigated. As a consequence of the infinite-dimensionality of the critical cases, it is shown that the role of the normal form is played by a special evolutionary boundary value problem. Families of the simplest stepwise time-periodic solutions of this boundary value problem are constructed.

Keywords: bifurcation, stability, quasinormal forms, asymptotic, discontinuous periodic solutions