ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 54–56

УДК 519.1

ДВУХЦВЕТНЫЕ РАСКРАСКИ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ БЕЗ ДЛИННЫХ ОДНОЦВЕТНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЙ

© 2022 г. В. О. Кирова[1,*], А. А. Сагдеев[2,]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 18.05.2022 г.
После доработки 24.06.2022 г.
Принято к публикации 16.07.2022 г.

Для каждого $1 \le p \le \infty$ и каждого натурального n доказано существование двухцветной раскраски точек n-мерного пространства $\mathbb{R}_p^n$ с нормой ℓ_p такой, что все достаточно длинные арифметические прогрессии содержат точки обоих цветов.

Ключевые слова: раскраска, хроматическое число, арифметическая прогрессия
DOI: 10.31857/S2686954322050125

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача Нельсона о хроматическом числе плоскости является одной из центральных проблем современной комбинаторной геометрии. Одна из наиболее общих ее постановок звучит следующим образом. Для n-мерного нормированного пространства $\mathbb{R}_N^n$ требуется найти его *хроматическое число* $\chi(\mathbb{R}_N^n)$, определяемое как наименьшее r, для которого существует раскраска точек $\mathbb{R}_N^n$ в r цветов, так называемая *r-раскраска*, при которой никакая пара точек на единичном расстоянии не оказалась бы покрашена в один и тот же цвет. Наиболее активно эта проблема изучалась для ℓ_p-пространств $\mathbb{R}_p^n$. Напомним, что ℓ_p-норма точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ определяется равенством $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$ при всех действительных $p \ge 1$, а при $p = \infty$ — равенством $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$. Известно, что при всех $1 \le p \le \infty$ величина $\chi(\mathbb{R}_p^n)$ растет экспоненциально с ростом n. Подробнее об этой и родственных задачах см. [1–11].

В качестве еще более далеко идущего обобщения Пол Эрдёш и соавт. в работах [12–14] предложили запрещать одноцветность более сложных конфигураций. Для подмножества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_N^n$, его *N-изометричной копией* называется такое подмножество $\mathcal{M}' \subset \mathbb{R}^n$, что существует биекция $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ такая, что $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_N = = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_N$ при всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{M}$. *Хроматическим числом* $\chi(\mathbb{R}_N^n, \mathcal{M})$ пространства $\mathbb{R}_N^n$ с запрещенным одноцветным множеством $\mathcal{M}$ называют наименьшее r, для которого существует r-раскраска $\mathbb{R}_N^n$, при которой ни одна N-изометричная копия $\mathcal{M}$ не оказалась бы полностью одноцветной. Систематическому изучению данной задачи посвящены статьи [15–25].

Одними из наиболее естественных для рассмотрения в данной задаче в качестве запрета $\mathcal{M}$ множеств являются арифметические прогрессии $\mathcal{B}_k = \{0, 1, \ldots, k\}$. В [12] было показано, что для евклидова пространства уже при $k = 2$ величина $\chi(\mathbb{R}_2^n, \mathcal{B}_2)$ не только не стремится к бесконечности экспоненциально быстро с ростом n, но и не стремится к ней вовсе, так как во всех размерностях справедливо неравенство $\chi(\mathbb{R}_2^n, \mathcal{B}_2) \le 4$. Более того, верно, что $\chi(\mathbb{R}_2^n, \mathcal{B}_k) = 2$ при всех $k \ge 5$ и при всех натуральных n. Отметим, что открытым остается вопрос об оптимальности констант 4 и 5 в последних двух утверждениях, см. [19].

Целью настоящего исследования являлось обобщение последних неравенств со случая евклидова пространства на случай ℓ_p-пространств при $p \ne 2$. Основным полученным нами результатом является следующий.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский физико-технический институт, Москва, Россия*
**E-mail: kirova_vo@mail.ru*
***E-mail: sagdeev.aa@phystech.edu*

Т е о р е м а 1. *Для любого* $1 \le p \le \infty$ *и любого натурального* n, *существует достаточно большое* $k = k(p,n)$ *такое, что* $\chi(\mathbb{R}^n_p, \mathcal{B}_k) = 2$.

2. ЭСКИЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ

Для случая $p = \infty$ доказательство проводится с использованием явной, но технически сложной двухцветной раскраски, состоящей из одинаковых расположенных друг над другом слоев-‘змеек’, цвета которых мы чередуем. Показывается, что данная раскраска пространства $\mathbb{R}^n$ не содержит одноцветных ℓ_∞-изометричных копий прогрессий $\mathcal{B}_k$ при $k \ge 5^n$.

Предположим теперь, что $1 < p < \infty$. Известно, что единичный шар ℓ_p нормы в этом случае является строго выпуклым. А значит, всякая ℓ_p-изометричная копия множества $\mathcal{B}_k$ лежит на некоторой прямой. Как следствие, она является арифметической прогрессией в пространстве $\mathbb{R}^n_\infty$, длину звена (а значит – и диаметр) которой можно контролировать в терминах n и p. Здесь мы используем тот факт, что ℓ_p- и ℓ_∞-нормы на $\mathbb{R}^n$ ‘эквивалентны’ друг другу, т.е. при некоторых положительных $c = c(n,p)$ и $C = C(n,p)$ верно, что $c\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_p \le C\|\mathbf{x}\|_\infty$ при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. А значит, из отсутствия в некоторой раскраске пространства $\mathbb{R}^n$ с нормой ℓ_∞ достаточно длинных одноцветных арифметических прогрессий действительно следует и отсутствие в ней одноцветных ℓ_p-изометричных копий множеств $\mathcal{B}_k$ при всех достаточно больших значениях k.

Наконец, мы рассмотрим случай $p = 1$. Эта ситуация в некотором смысле диаметрально противоположна предыдущей, так как единичным шаром ℓ_1-нормы является выпуклый центрально симметричный многогранник (точнее – гипероктаэдр или кросс-политоп). Известно, что всякий такой многогранник с f парами противоположных граней является центральным сечением f-мерного гиперкуба некоторой гиперплоскостью. А значит, пространство $\mathbb{R}^n_1$ может быть изометрично вложено в $\mathbb{R}^m_\infty$ при $m = 2^{n-1}$. Следовательно, для построения искомой двухцветной раскраски пространства $\mathbb{R}^n_1$ достаточно рассмотреть такую раскраску $\mathbb{R}^m_\infty$, а затем просто индуцировать ее на соответствующее подпространство.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наше доказательство оставляет открытым вопрос об асимптотическом повелении оптимальной константы $k(p,n)$ из теоремы 1. Наилучшие оценки для $p = \infty$, которых нам удалось добиться в рамках известных методов, таковы: $n/\ln(2) \le k(\infty,n) \le 3^n$. При каждом фиксированном $1 < p < \infty$ можно показать, что $k(p,n) = o(n)$ при $n \to \infty$, однако не ясно, стремится ли эта величина к бесконечности с ростом n. Напомним, что в евклидовом случае это стремление отсутствует, так как из вышеупомянутых результатов Эрдёша следует, что $k(2,n) \le 5$ при всех $n \in \mathbb{N}$. С учетом возросшего в последние годы интереса специалистов к так называемым полихроматическим раскраскам, уместным было бы рассмотреть следущее обобщение исходной задачи. Доказать, что для любого $1 \le p \le \infty$ и любых натуральных n и t, существует достаточно большое натуральное $k = k(p,n,t)$ и раскраска пространства $\mathbb{R}^n$ в t цветов такая, что всякая ℓ_p-изометричная копия прогрессии $\mathcal{B}_k$ в $\mathbb{R}^n$ содержит точки всех t цветов. Отметим, что даже для евклидова случая вопрос об асимптотическом поведении величины $k(2,n,t)$ остается открытым.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Настоящая работа частично выполнена за счет средств гранта поддержки ведущих научных школ № Н.Ш.-775.2022.1.1, а также гранта РФФИ № 20-31-90009. Второй автор также является победителем конкурса ‘Молодая Математика России’ и благодарит его спонсоров и жюри.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *de Grey A.D.N.J.* The chromatic number of the plane is at least 5, Geombinatorics. 2018. V. 28. P. 18–31.
2. *Golovanov A., Kupavskii A., Sagdeev A.* Odd-distance and right-equidistant sets in the maximum and Manhattan metrics. European Journal of Combinatorics, 2023, V. 107, 103603.
3. *Kozhevnikov V.S., Raigorodskii A.M., Zhukovskii M.E.* Large cycles in random generalized Johnson graphs, Discrete Math. 2022. V. 345. № 3, P. 112721.
4. *Kupavskiy A.* On the chromatic number of R^n with an arbitrary norm, Discrete Math. 2011. V. 311. № 6. P. 437–440.
5. *Prosanov R.* A new proof of the Larmanв–Rogers upper bound for the chromatic number of the Euclidean space, Discrete Appl. Math. 2020. V. 276. P. 115–120.
6. *Пушняков Р.А., Райгородский А.М.* Оценка числа ребер в подграфах графа Джонсона, Доклады РАН. 2021. V. 499. № 1. P. 40–43.
7. *Raigorodskii A.M.* On the Chromatic Number of a Space, Russian Math. Surveys. 2000. V. 55. P. 351–352.
8. *Raigorodskii A.M.* On the Chromatic Number of a Space with the Metric ℓ_p, Russian Math. Surveys. 2004. V. 59. P. 973–975.

9. *Raigorodskii A.M.* The Borsuk problem and the chromatic numbers of some metric spaces, Russian Math. Surveys. 2001. V. 56. P. 103–139.
10. *Raigorodskii A.M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters, Thirty Essays on Geometric Graph Theory, New York, Springer, 2013. P. 429–460.
11. *Райгородский А.М., Карась В.С.* Асимптотика числа независимости случайного подграфа графа $G(n, r, < s)$, Матем. Заметки. 2022. V. 111. № 1. P. 107–116.
12. *Erdös P., Graham R.L., Montgomery P., Rothschild B.L., Spencer J., Straus E.G.* Euclidean Ramsey theorems I, J. Combin. Theory Ser. A. 1973. V. 14. № 3. P. 341–363.
13. *Erdös P., Graham R.L., Montgomery P., Rothschild B.L., Spencer J., Straus E.G.* Euclidean Ramsey theorems II, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam, 1973. V. 10. P. 520–557.
14. *Erdös P., Graham R.L., Montgomery P., Rothschild B.L., Spencer J., Straus E.G.* Euclidean Ramsey theorems III, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam, 1973. V. 10. P. 559–583.
15. *Conlon D., Fox J.* Lines in Euclidean Ramsey theory, Disc. Comput. Geom. 2019. V. 61. № 1. P. 218–225.
16. *Frankl N., Kupavskii A., Sagdeev A.* Max-norm Ramsey Theory, arXiv preprint 2111.08949. 2021.
17. *Frankl N., Kupavskii A., Sagdeev A.* Solution to a conjecture of Schmidt and Tuller on linear packings and coverings, arXiv preprint 2203.03873. 2022.
18. *Frankl P., Rödl V.* A partition property of simplices in Euclidean space, J. Amer. Math. Soc. 1990. V. 3. № 1. P. 1–7.
19. *Graham R.L.* Euclidean Ramsey theory, Handbook of Discrete and Computational Geometry, Chapman and Hall/CRC, 2017. P. 281–297.
20. *Křž I.* Permutation groups in euclidean Ramsey theory, Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 112. № 3. P. 899–907.
21. *Купавский А.Б., Сагдеев А.А.* Теория Рамсея в пространстве с чебышёвской метрикой, Успехи математических наук. 2020. V. 75. № 5. P. 191–192.
22. *Kupavskii A., Sagdeev A.* All finite sets are Ramsey in the maximum norm, Forum Math. Sigma. 2021. V. 9. № e55. 12 pp.
23. *Naslund E.* Monochromatic Equilateral Triangles in the Unit Distance Graph, Bull. Lond. Math. Soc. 2020. V. 52. № 4. P. 687–692.
24. *Просанов Р.И.* Верхние оценки хроматических чисел евклидовых пространств с запрещенными рамсеевскими множествами, Матем. Заметки. 2018. V. 103. № 2. P. 248–257.
25. *Сагдеев А.А.* Экспоненциально рамсеевские множества, Проблемы передачи информации. 2018. V. 54. № 4. P. 82–109.

TWO-COLORINGS OF THE NORMED SPACES WITH NO LONG MONOCHROMATIC UNIT ARITHMETIC PROGRESSIONS

V. O. Kirova[a] and A. A. Sagdeev[b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[b] *Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

Given $1 \le p \le \infty$ and $n \in \mathbb{N}$, we construct the two-coloring of the n-dimensional space $\mathbb{R}_p^n$ equipped with the ℓ_p norm such that all sufficiently long unit arithmetic progressions contain points of both colors.

Keywords: coloring, chromatic number, arithmetic progression