ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 57–61

МАТЕМАТИКА

УДК 515.122.5

ОБ УПЛОТНЕНИЯХ НА σ-КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

© 2022 г. А. Е. Липин[1,2,*], А. В. Осипов[1,2,**]

Представлено академиком РАН С.В. Матвеевым
Поступило 15.04.2022 г.
После доработки 16.05.2022 г.
Принято к публикации 10.08.2022 г.

В работе доказывается следующий результат. Пусть полное метрическое пространство X веса $w(X)$ и множество $H \subseteq X$ таковы, что $w(X) < |H| < \mathfrak{c}$. Тогда не существует непрерывной биекции подпространства $X \setminus H$ на σ-компактное пространство. Как следствие, не существует непрерывной биекции подпространства $X \setminus H$ на польское пространство. Таким образом, доказано, что метрические компакты не являются a_τ-пространствами ни для какого несчетного кардинального числа τ. Этот результат является ответом на вопрос, поставленный Е.Г. Пыткеевым в работе (*О свойствах подклассов слабо диадических компактов, Сиб. мат. журнал.*).

Ключевые слова: уплотнение, польское пространство, компакт, σ-компактное пространство, a_τ-пространство

DOI: 10.31857/S2686954322050149

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [6] И.Л. Раухваргер доказала, что для всякого метрического компакта X и любого счетного множества $H \subseteq X$ существует уплотнение (т.е. непрерывная биекция) подпространства $X \setminus H$ на метрический компакт.

Пусть τ – кардинальное число.

- Компактное пространство X называют *a_τ-пространством*, если для любого $H \in [X]^{\leq\tau}$ существует уплотнение пространства $X \setminus H$ на компакт [3]. В частности, a_ω-пространство называется a-пространством.

- Компактное пространство X называют *строгим a_τ-пространством*, если для любого $H \in [X]^{\leq\tau}$ существует уплотнение пространства $X \setminus H$ на компакт, которое продолжается до непрерывного отображения на X [3]. В частности, строгое a_ω-пространство называется строгим a-пространством.

Любой метрический компакт является строгим a-пространством [6]. Различные свойства a_τ-пространств и строгих a_τ-пространств можно найти в работах [1–4].

В работе [1] был предложен следующий вопрос.

Вопрос 1. Предположим, что X – метрический компакт. Для каких τ, $\omega < \tau < \mathfrak{c}$, X – (строгое) a_τ-пространство?

Основной результат работы – доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть X – полное метрическое пространство и для множества $H \subseteq X$ выполняется $w(X) < |H| < \mathfrak{c}$. Тогда подпространство $X \setminus H$ невозможно уплотнить на σ-компактное пространство.*

Отметим, что в предположении континуум-гипотезы посылка теоремы 1 несовместна, так что в этом случае теорема тривиальна (как, впрочем, и вопрос 1).

Е.Г. Пыткеев доказал, что любое сепарабельное метрическое пространство мощности $\mathfrak{c}$ можно разбить на два множества мощности $\mathfrak{c}$, каждое из которых не уплотняется на полное пространство ([8], Предложение 2). Таким образом, по теореме 1 и результату Пыткеева, мы получаем ответ на вопрос 1: метрические компакты не являются a_τ-пространствами ни для какого несчетного кардинального числа τ.

[1] *Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия*
[2] *Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*
**E-mail: tony.lipin@yandex.ru*
***E-mail: oab@list.ru*

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Под пространствами понимаются хаусдорфовы топологические пространства. В работе используются следующие обозначения и термины:

- ω – первый бесконечный ординал и первый бесконечный кардинал;
- $\mathfrak{c}$ – кардинал континуум;
- κ^+ – следующий за κ кардинал;
- для всяких множества A и кардинала τ через $[A]^\tau$ ($[A]^{\le\tau}$, $[A]^{<\tau}$, $[A]^{>\tau}$) обозначается семейство всех подмножеств множества A мощности ровно (не большей, строго меньшей, строго большей) τ;
- $\sqcup$ – *дизъюнктное объединение*, т.е. объединение, аргументы которого не пересекаются;
- $2^{<\omega}$ – множество всех конечных последовательностей над множеством $\{0, 1\}$;
- 2^ω – множество всех последовательностей порядкового типа ω над множеством $\{0,1\}$;
- если $u \in 2^{<\omega}$ и $c \in \{0,1\}$, то uc обозначается конечная последовательность, получаемая из u добавлением в конец элемента c;
- если $u \in 2^{<\omega}$ и $s \in 2^\omega$, то запись $u \prec s$ означает, что u есть начало s;
- *уплотнение* – непрерывная биекция;
- *сумма* пространств понимается, как в [11] (раздел 2.2);
- *польское* пространство – пространство счетного веса, обладающее полной метрикой;
- *абсолютно борелевское* пространство – пространство, гомеоморфное борелевскому подмножеству некоторого полного метрического пространства;
- *ядро* пространства X, $\mathrm{Ker}(X)$ – объединение всех плотных в себе подмножеств пространства X;
- $w(X)$ – вес пространства X.

В работе нам несколько раз пригодится следующий, вероятно известный, результат.

П р е д л о ж е н и е 1. Для всякого пространства X его ядро $\mathrm{Ker}(X)$ замкнуто и плотно в себе, а также $|X\setminus\mathrm{Ker}(X)| \le w(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всякого простанства Y обозначим $\mathrm{Iso}(Y)$ множество изолированных точек Y. Для каждого ординала α определим множество $X_\alpha \subseteq X$ следующим образом: $X_0 := X$; если $\alpha = \beta + 1$, то $X_\alpha := X_\beta\setminus\mathrm{Iso}(X_\beta)$; и если α предельный, то $X_\alpha := \bigcap_{\beta<\alpha} X_\beta$. Так как при $\alpha < \beta$ выполняется $X_\alpha \supseteq X_\beta$, то для некоторого ординала γ верно $X_\gamma = X_{\gamma+1}$. Будем считать, что γ – наименьший ординал с этим свойством.

Легко видеть, что $X_\gamma = \mathrm{Ker}(X)$, и это множество замкнуто и плотно в себе. Для всякой точки $x \in X\setminus X_\gamma$ обозначим $r(x)$ тот ординал α, при котором $x \in \mathrm{Iso}(X_\alpha)$. Очевидно, что при любом выборе базы пространства X всякой точке $x \in X\setminus X_\gamma$ можно сопоставить базисную окрестность $O(x)$ такую, что для всех точек $y \in O(x)$, не равных x, верно $r(y) < r(x)$. Тогда все выбранные $O(x)$ попарно различны, откуда $|X\setminus\mathrm{Ker}(X)| \le w(X)$. □

3. ЛЕММА О НЕСЧЕТНОМ ИНЪЕКТИВНОМ БИНАРНОМ ОТНОШЕНИИ НА ПОЛНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ МАЛОГО ВЕСА

Цель этого раздела состоит в доказательстве следующей леммы.

Л е м м а 1. *Пусть X – полное метрическое пространство, $w(X)<\mathfrak{c}$, $A\in[X]^{>w(X)}$ и функция $f: A\to X$ инъективна. Тогда существуют континуальное множество $C \subseteq X$ и инъекция $g : C \to X$ такие, что график функции g содержится в замыкании графика f в пространстве $X \times X$.*

Если при этом функция f не имеет неподвижных точек, то C и g можно выбрать так, что g также не будет обладать неподвижными точками.

Обозначим (*) условие “X – полное метрическое пространство, $w(X) < \mathfrak{c}$, $A \in [X]^{>w(X)}$ и функция $f : A \to X$ инъективна”.

Центральную роль в доказательстве леммы 1 сыграет следующее понятие.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть (*). Для всяких множеств $M,N \subseteq X$ обозначим $A_f(M, N) := \{x \in A : x \in M, f(x) \in N\}$ и $B_f(M, N) := \{f(x) : x \in A_f(M,N)\}$.

Пару (K, L) замкнутых плотных в себе подмножеств X будем называть *f-существенной*, если $|A_f(K,L)| > w(X)$.

Из предложения 1 вытекает следующее

П р е д л о ж е н и е 2. *Если* (*), *то пара* $(\mathrm{Ker}(X), \mathrm{Ker}(X))$ *f-существенна*.

Напомним, что во всяком полном метрическом пространстве X для любого замкнутого множества $C \subseteq X$ выполняется или $|C| \le w(X)$ (если C разрежено; это следует из предложения 1), или $|C| \ge \mathfrak{c}$ (если C содержит плотное в себе подмножество) (Теорема 6 в [10]).

Для всяких $A \subseteq X$ и $x \in X$ обозначим $\Delta(A, x)$ минимум мощностей $|O(x) \cap A|$ по всем окрестностям $O(x)$ точки x (так называемый *дисперсионный характер подпространства $A \cup \{x\}$* в точке x). Для всякого кардинала τ обозначим $A^{\circ\tau} := \{x \in X\colon \Delta(A, x) \geq \tau\}$. Следующее предложение, вероятно, известно.

П р е д л о ж е н и е 3. Если X – пространство и $A \in [X]^{>w(X)}$, *то* $|A^{\circ w^+(X)}| \geq \mathfrak{c}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $U := X \setminus A^{\circ w^+(X)}$. Всякой точке $x \in U$ сопоставим произвольную ее окрестность $O(x)$ такую, что $|O(x) \cap A| \leq w(X)$. Очевидно, что $\bigcup_{x \in U} O(x) = U$, и так как из семейства всех $O(x)$ можно выделить подпокрытие множества U мощности не более $w(X)$, то $|U \cap A| \leq w(X) < |A|$. Тогда $|A^{\circ w^+(X)}| > w(X)$. Так как множество $A^{\circ w^+(X)}$ замкнуто, получаем $|A^{\circ w^+(X)}| \geq \mathfrak{c}$. $\square$

П р е д л о ж е н и е 4. Пусть (*), *пара* (K, L) f-существенна и $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся такие множества $K_0 \sqcup K_1 \subseteq K$ *и* $L_0 \sqcup L_1 \subseteq L$, что пары (K_0, L_0) и (K_1, L_1) f-существенны, а диаметр множеств K_0, K_1, L_0, L_1 меньше ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в K любые две точки множества $A_f(K, L)^{\circ w^+(X)}$ и отделим их замкнутыми окрестностями K_0, K_1 диаметра меньше ε. Очевидно, пары (K_0, L) и (K_1, L) f-существенны. Теперь выберем в L любые две точки множества $B_f(K_0, L)^{\circ w^+(X)}$ и отделим их замкнутыми окрестностями M, N диаметра меньше ε и лежащими на положительном расстоянии друг от друга. Наконец, выберем в L любую точку множества $B_f(K_1, L)^{\circ w^+(X)}$ и обозначим L_1 любую ее настолько малую замкнутую окрестность, что L_1 не может пересекать одновременно M и N, а диаметр L_1 меньше ε. Обозначим L_0 то из множеств M, N, которое не пересекается с L_1. Легко видеть, что K_0, K_1, L_0, L_1 искомые. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. По предложению 2 существует хотя бы одна f-существенная пара. Итерированно применяя предложение 4, выберем для всех $u \in 2^{<\omega}$ f-существенные пары (K_u, L_u) так, что $K_{u0} \sqcup K_{u1} \subseteq K_u$, $L_{u0} \sqcup L_{u1} \subseteq L_u$ и диаметры множеств K_u и L_u меньше $\frac{1}{|u|}$.

Заметим, что для всякой последовательности $s \in 2^\omega$ множества $\bigcap_{u \prec s} K_u$ и $\bigcap_{u \prec s} L_u$ одноэлементны в силу стремящихся к нулю диаметров K_u и L_u при $|u| \to \infty$ и полноты метрики. Единственную точку множества $\bigcap_{u \prec s} K_u$ обозначим y_s, соберем $C := \{y_s : s \in 2^\omega\}$ и для каждой y_s обозначим $g(y_s)$ единственную точку множества $\bigcap_{u \prec s} L_u$. Легко видеть, что C и g искомые.

Теперь пусть f не имеет неподвижных точек. Для каждого $n \in \omega$ обозначим A_n множество таких $x \in A$, что расстояние между x и $f(x)$ больше $\frac{1}{n}$. Поскольку $\bigcup_{n \in \omega} A_n = A$ и $|A| > w(X)$, то найдется такое $n \in \omega$, что $|A_n| > w(X)$. Применим к паре A_n, f уже доказанное первое утверждение леммы и получим некоторые C и g. Покажем, что эти C и g искомые, т.е. что инъекция g не имеет неподвижных точек. От противного: для некоторой точки $y \in C$ оказалось, что $g(y) = y$. Обозначим $O(y)$ любую окрестность точки y диаметра менее $\frac{1}{n}$. Очевидно, такая окрестность не может одновременно содержать x и $f(x)$ ни для какого $x \in A_n$, откуда точка $(y, g(y))$ пространства $X \times X$ не принадлежит замыканию графика функции f. Противоречие. $\square$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Обозначим (**) условие “X – пространство, $X = Y \sqcup H$ и φ есть уплотнение подпространства Y на пространство Z”.

Основным инструментом доказательства станет следующая конструкция.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть (**). Обозначим:

(1) Π_X^φ множество пар $(z, p) \in Z \times H$ таких, что при любом выборе окрестности $O(p)$ точки p точка z предельна для множества $\varphi[O(p) \cap Y]$;

(2) Δ_φ множество $\{(\varphi(x), x) : x \in Y\}$;

(3) $P_z := \{p \in H : (z, p) \in \Pi_X^\varphi\}$ для каждой $z \in Z$.

Л е м м а 2. *Если* (**), *то множество* $\Pi_X^\varphi \cup \Delta_\varphi$ *замкнуто в пространстве* $Z \times X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка $(z, a) \in Z \times X$ предельна для $\Pi_X^\varphi \cup \Delta_\varphi$. Возможны два случая:

(1) $a = p$ для некоторой $p \in H$. Возьмем любую окрестность U точки p и положим $V := U \cap Y$, $W := \varphi[V]$;

(2) $a = x$ для некоторой $x \in Y$. Возьмем любую окрестность W точки $\varphi(x)$ и положим $V := \varphi^{-1}[W]$. Обозначим U произвольное открытое в X множество такое, что $U \cap Y = V$.

В обоих случаях множество U открыто в X, $a \in U$, $V = U \cap Y$ и $W = \varphi[V]$.

Обозначим A множество тех $w \in Z$, для которых существует точка $b \in U$ такая, что $(w, b) \in \Pi_X^\varphi \cup \Delta_\varphi$. Из определения Π_X^φ легко следует, что $A \subseteq \overline{W}$. При этом z предельна для A. Значит, точка z предельна для W.

Тогда в случае (1) получаем по определению $(z, p) \in \Pi_X^{\varphi}$, а в случае (2) точки z и $\varphi(x)$ не отделимы в Z, откуда $z = \varphi(x)$ и $(z, x) \in \Delta_{\varphi}$. □

Следствие 1. *Пусть* (**) *и* $z \in Z$. *Тогда множество* $P_z \cup \{z\}$ *замкнуто.*

Определение 3. Пусть (**). Обозначим H_s множество тех $p \in H$, для которых существует хотя бы одна точка $z \in Z$ такая, что $(z, p) \in \Pi_X^{\varphi}$. Обозначим $H_f := H \backslash H_s$.

Предложение 5. Пусть (**), $|H_s| > w(X)$ и $|H| < \mathfrak{c}$. Тогда существуют множество $A \in [Z]^{>w(X)}$ и инъекция $f : A \to H$ такие, что $f \subseteq \Pi_X^{\varphi}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого множества $S \in [X]^{\le w(X)}$ и инъекции $h : S \to X$, $h \subseteq \Pi_X^{\varphi}$, найдутся точки $z \notin S$ и $p \notin h[S]$ такие, что $(z, p) \in \Pi_X^{\varphi}$.

По следствию 1 множество $P_w \cup \{w\}$ замкнуто в X для каждого $w \in Z$. Тогда или $|P_w| \le w(X)$, или $|P_w| \ge \mathfrak{c}$. При этом $P_w \subseteq H$ и $|H| < \mathfrak{c}$, откуда $|P_w| \le w(X)$. Тогда и $\left|\bigcup_{w \in S} P_w\right| \le w(X)$. Значит, найдется точка $p \in H_s$ такая, что ни для какого $w \in S$ не выполняется $(w, p) \in \Pi_X^{\varphi}$, и в частности $p \notin h[S]$. Наконец, по определению H_s существует точка $z \in Z$, для которой $(z, p) \in \Pi_X^{\varphi}$. □

Лемма 3. *Пусть* (**), *пространство* X *обладает полной метрикой и* $|H| < \mathfrak{c}$. *Тогда* $|H_s| \le w(X)$.

Доказательство. От противного: пусть $|H_s| > w(X)$. Из предложения 5 следует существование множества $A \in [Y]^{>w(X)}$ и инъекции $f : A \to H$ таких, что $\{(\varphi(x), f(x)) : x \in A\} \subseteq \Pi_X^{\varphi}$. Отметим, что инъекция f не имеет неподвижных точек, так как ее области определения и значений не пересекаются. Тогда по лемме 1 найдутся континуальное множество $C \subseteq X$ и инъекция $g : C \to X$ такие, что g не имеет неподвижных точек и график функции g содержится в замыкании графика f. По лемме 2 для каждой $y \in C \cap Y$ выполняется $(\varphi(y), g(y)) \in \Pi_X^{\varphi}$. Но тогда множество H содержит континуальное подмножество $g[C \cap Y]$, что противоречит условию $|H| < \mathfrak{c}$. □

Предложение 6. Если (**), $|H| < \mathfrak{c}$, X обладает полной метрикой и Z — компакт, то $H_f \cap \operatorname{Ker}(X) = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $p \in H \cap \operatorname{Ker}(X)$. Так как всякое плотное в себе полное метрическое пространство имеет мощность не менее $\mathfrak{c}$, то и любая окрестность $O(p)$ точки p содержит не менее $\mathfrak{c}$ точек. Тогда, так как $|H| < \mathfrak{c}$, то множество $O(p) \cap Y$ непусто. Значит, можно выбрать последовательность S элементов множества Y, сходящуюся к точке p. Так как Z — компакт, то последовательность $\varphi[S]$ обладает хотя бы одной предельной точкой z. Легко видеть, что по определению $(z, p) \in \Pi_X^{\varphi}$, т.е. $p \in H_s$. □

Лемма 4. *Пусть* X *— полное метрическое пространство и для множества* $H \subseteq X$ *выполняется* $w(X) < |H| < \mathfrak{c}$. *Тогда подпространство* $X \backslash H$ *невозможно уплотнить на компакт.*

Доказательство. Пусть (**), $|H| < \mathfrak{c}$, пространство X обладает полной метрикой и Z — компакт. По предложению 6 множество H_f содержится в $X \backslash \operatorname{Ker}(X)$, откуда $|H_f| \le w(X)$. По лемме 3 также $|H_s| \le w(X)$, и отсюда $|H| \le w(X)$. □

Доказательство теоремы 1. От противного: подпространство $Y := X \backslash H$ уплотняется на пространство $Z = \bigcup_{n \in \omega} K_n$, где все множества K_n компактны. Для всякого $n \in \omega$ обозначим X_n замыкание множества $f^{-1}(K_n)$ в пространстве X и положим $M := \bigcup_{n \in \omega} X_n$. Очевидно, $M \supseteq Y$. Из леммы 4 следует, что для каждого $n \in \omega$ имеет место $|H \cap X_n| \le w(X_n) \le w(X)$. Тогда $|M \cap H| \le w(X) < |H|$, и отсюда $|X \backslash M| = |H|$. Но $X \backslash M$ — борелевское множество в X, и тогда по теореме 6 в работе [10] неравенство $w(X) < |X \backslash M| < \mathfrak{c}$ невозможно. Противоречие. □

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теорема 1 вместе с результатом Е.Г. Пыткеева порождает следующее

Следствие 2. *Пусть* X *— полное метрическое пространство и для множества* $H \subseteq X$ *выполняется* $w(X) < |H| < \mathfrak{c}$. *Тогда подпространство* $X \backslash H$ *невозможно уплотнить на сепарабельное абсолютно борелевское пространство.*

Доказательство. В работе [9] Е.Г. Пыткеев доказал, что всякое сепарабельное абсолютно борелевское не σ-компактное пространство уплотняется на компакт. Тогда если бы подпространство $X \backslash H$ уплотнялось на сепарабельное абсолютно борелевское пространство, то уплотнялось бы и на σ-компактное пространство.

Заметим, что в работе [7] А.С. Пархоменко построил пример (польского) σ-компактного метрического пространства, которое не уплотняется на компакт.

Укажем также одну переформулировку теоремы 1 для сепарабельных пространств.

Следствие 3. *Предположим, что сепарабельное метрическое пространство Y уплотняется на сепарабельное абсолютно борелевское пространство. Тогда либо Y польское, либо для всякого пополнения X пространства Y выполняется* $|X \setminus Y| = \mathfrak{c}$.

Отметим, что свойство метрической полноты пространства X в теореме 1 существенно.

Предложение 7. Для всякого τ, такого, что $\omega < \tau < \mathfrak{c}$, существуют метрическое сепарабельное пространство X и множество $H \subseteq X$ мощности τ такие, что X и $X \setminus H$ гомеоморфны и уплотняются на метрический компакт.

Доказательство. Пусть $I = [0,1]$, $A \in [I]^{\tau}$ и $Q \in [I]^{\omega}$. Положим $B := (I \times I) \setminus (A \times Q)$. Зафиксируем на множествах A и B их естественную топологию как подпространств прямой и плоскости соответственно. Обозначим X сумму пространства B и счетного числа копий $A_n, n \in \omega$ пространства A. Легко видеть, что X – метрическое сепарабельное пространство, которое уплотняется на компакт $I \times I$, и для $H = A_0$ подпространство $X \setminus H$ гомеоморфно X. □

Вопрос 2. Существуют ли полное метрическое пространство X и множество $H \subseteq X$ такие, что $w(X) < |H| < \mathfrak{c}$ и подпространство $X \setminus H$ уплотняется на полное метрическое пространство?

Вопрос 3. Существуют ли абсолютно борелевское пространство X и множество $H \subseteq X$ такие, что $w(X) < |H| < \mathfrak{c}$ и подпространство $X \setminus H$ уплотняется на абсолютно борелевское пространство? В частности, может ли такое X быть польским?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белугин В.И., Осипов А.В., Пыткеев Е.Г.* О свойствах подклассов слабо диадических компактов, Сиб. мат. журнал. 2022 (принята в печать).
2. *Белугин В.И., Осипов А.В., Пыткеев Е.Г.* О некоторых свойствах субкомпактных пространств, Матем. Заметки. 2022. V. 111. № 2. P. 188–201.
3. *Белугин В.И., Осипов А.В., Пыткеев Е.Г.* О классах субкомпактных пространств, Матем. Заметки. 2021. V. 109. № 6. P. 810–820.
4. *Belugin V.I., Osipov A.V., Pytkeev E.G.* Compact condensations of Hausdorff spaces, Acta Math. Hungarica. 2021. V. 164. № 1. P. 15–27.
5. *Куратовский К. Топология*, Том 1, Изд. "МИР" Москва, 1966.
6. *Раухваргер И.Л.* Об уплотнениях в компакты, Докл. АН СССР. 1949. V. 66. № 13. P. 13–15.
7. Пархоменко А.С. Об уплотнениях в компактные пространства, Изв. АН СССР. Сер. матем. 1941. V. 5. № 3. P. 225–232.
8. *Пыткеев Е.Г.* К теории уплотнений на компакты, Докл. АН СССР. 1977. V. 233. № 6. P. 1046–1048.
9. *Пыткеев Е.Г.* О верхних гранях топологий, Матем. Заметки. 1976. V. 20. № 4. P. 489–500.
10. *Stone A.H.* Non-separable Borel sets, Rozpr. Math. 1962. V. 28. P. 3–40.
11. *Энгелькинг Р.* Общая топология, Изд. "МИР" Москва, 1986.

ON CONDENSATIONS ONTO σ-COMPACT SPACES

A. E. Lipin[a,b] **and A. V. Osipov**[a,b]

[a] *N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

[b] *Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.V. Matveev

In this paper, we prove the following result. Let the full metric space X of weight $w(X)$ and the set $H \subseteq X$ are such that $w(X) < |H| < \mathfrak{c}$. Then there is no continuous bijection of the subspace $X \setminus H$ onto σ-compact space. As a result, there is no continuous bijection of the subspace $X \setminus H$ onto the Polish space. Thus, it has been proved that metric compacta are not a_τ-spaces for any uncountable cardinal numbers τ. This result is the answer to the question delivered by E.G. Pytkeev in his work (*On the properties subclasses of weakly dyadic compact sets, Sib. mat. journal.*).

Keywords: compaction, Polish space, compact space, σ-compact space, a_τ-space