ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 68–72

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51+517.98

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И КОМПАКТНОСТИ ДВУМЕРНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ХАРДИ

© 2022 г. Член-корреспондент РАН В. Д. Степанов[1,*], Е. П. Ушакова[2,]**

Поступило 13.05.2022 г.
После доработки 12.08.2022 г.
Принято к публикации 15.08.2022 г.

В терминах весовых функций v и w на $\mathbb{R}_+^2$ получены критерии ограниченности и компактности двумерного прямоугольного оператора интегрирования, действующего из весового пространства Лебега $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$, когда $1 < p,\, q < \infty$. При $p < q$ критерий ограниченности значительно усиливает классический результат Е. Сойера (см. введение) для $p \le q$. Случай $q < p$ также рассмотрен.

Ключевые слова: весовое пространство Лебега, неравенство Харди, двумерный прямоугольный оператор интегрирования, ограниченность, компактность

DOI: 10.31857/S2686954322050162

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+^n := (0,\infty)^n$ функций $f(y_1,\ldots,y_n)$ n-мерный прямоугольный оператор интегрирования I_n задан формулой

$$I_n f(x_1,\ldots,x_n) := \int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_n} f(y_1,\ldots,y_n)dy_1\ldots dy_n \quad (x_1,\ldots,x_n > 0). \tag{1}$$

Двойственное к I_n преобразование I_n^* имеет вид

$$I_n^* f(x_1,\ldots,x_n) := \int_{x_1}^{\infty}\ldots\int_{x_n}^{\infty} f(y_1,\ldots,y_n)dy_1\ldots dy_n \quad (x_1,\ldots,x_n > 0).$$

Пусть $1 < p,\, q < \infty$ и $v, w \ge 0$ весовые функции на $\mathbb{R}_+^n$. Весовое пространство Лебега $L_v^p(\mathbb{R}_+^n)$ состоит из всех измеримых на $\mathbb{R}_+^n$ функций f таких, что $\|f\|_{p,v}^p := \int_{\mathbb{R}_+^n}|f|^p v < \infty$. Далее будем иметь дело с интегральным неравенством Харди

$$\|I_n f\|_{q,w} \le C_n\|f\|_{p,v} \tag{2}$$

на конусе неотрицательных функций f из $L_v^p(\mathbb{R}_+^n)$. Константа $C_n > 0$ в (2) предполагается наименьшей из возможных и не зависит от f.

Задача характеризации неравенства (2) хорошо известна. Она равносильна нахождению критериев ограниченности I_n из $L_v^p(\mathbb{R}_+^n)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^n)$ и рассматривалась многими авторами (см. [1–4] и ссылки на литературу там же). Одномерный случай этого неравенства полностью изучен (см. [5–7]). Однако при $n > 1$ возникают трудности, препятствующие характеризации (2) без дополнительных ограничений на v и w. Тем не менее хорошо известен результат Е. Сойера для произвольных v и w в случае $1 < p \le q < \infty$. Обозначим $p' := p/(p-1)$ и $\sigma := v^{1-p'}$.

Теорема 1 [1, Theorem 1A]. *Пусть $n = 2$ и $1 < p \le q < \infty$. Неравенство (2) выполнено для всех неотрицательных f на $\mathbb{R}_+^2$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены три условия*

$$A_1 := \sup_{(s,t)\in\mathbb{R}_+^2} A_1[(s,t);\sigma,w] := \sup_{(s,t)\in\mathbb{R}_+^2}[I_2^* w(s,t)]^{\frac{1}{q}}[I_2\sigma(s,t)]^{\frac{1}{p'}} < \infty, \tag{3}$$

$$A_2 := \sup_{(s,t)\in\mathbb{R}_+^2} A_2[(s,t);\sigma,w] := \sup_{(s,t)\in\mathbb{R}_+^2}\left(\int_0^s\int_0^t (I_2\sigma)^q w\right)^{\frac{1}{q}}[I_2\sigma(s,t)]^{-\frac{1}{p}} < \infty, \tag{4}$$

---

[1] *Вычислительный Центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровск, Россия*

[2] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия*

*E-mail: stepanov@mi-ras.ru

**E-mail: elenau@inbox.ru

$$A_3 := \sup_{(s,t)\in\mathbb{R}_+^2} A_3[(s,t);\sigma,w] :=$$

$$:= \sup_{(s,t)\in\mathbb{R}_+^2}\left(\int_s^\infty\int_t^\infty (I_2^* w)^{p'}\sigma\right)^{\frac{1}{p'}}[I_2^* w(s,t)]^{-\frac{1}{q'}} < \infty, \tag{5}$$

причем $C_2 \approx A_1 + A_2 + A_3$ с константами эквивалентности, зависящими только от параметров p и q.

Отметим, что в одномерном случае аналоги условий (3)–(5) эквивалентны друг другу [8]. При $n = 2$ это, вообще говоря, неверно. Более того, как показано в [1, § 4] для $p = q = 2$, никакие два условия из (3)–(5) не гарантируют выполнение (2). Однако конструкция второго контрпримера из [1, § 4] не переносится на случай $p < q$.

Цель настоящей работы – получить новые критерии выполнения неравенства Харди (2) при $n = 2$ и $1 < p \neq q < \infty$, а также исследовать компактность $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \to L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ для всех $p, q > 1$. Решение первой задачи содержится в теоремах 2 и 3 (см. § 1). В теореме 4 найдены альтернативные достаточные условия на v и w для выполнения (2) в случае $n = 2$ и $1 < q < p < \infty$. Напомним, что критерий Е. Сойера ограниченности I_2 из $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ при $1 < p \le q < \infty$ выражается конечностью трех независимых функционалов (см. теорему 1). В теореме 2 показано, что при $p < q$ неравенство (2) характеризуется конечностью только одного функционала. С некоторым ограничением на v и w аналогичное утверждение получено и для $q < p$ (см. теорему 3). В § 2 представлены условия компактности оператора I_2 из $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$, а также характеризуется мера некомпактности $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \to L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ в случае $1 < p \le q < \infty$.

Аналоги теорем 2 и 3 также справедливы для двойственного оператора I_2^* и смешанных операторов Харди, относительно деталей см. [1, Remark 1].

Билинейные весовые неравенства с прямоугольными операторами интегрирования изучены в [9]. Также некоторые аспекты многомерных неравенств рассматривались в работах [10–13].

На протяжении всей работы запись вида $\Phi \lesssim \Psi$ означает $\Phi \le c\Psi$ с некоторой константой $c > 0$, зависящей только от параметров суммирования p и q. Мы пишем $\Phi \approx \Psi$ в случае $\Phi \lesssim \Psi \lesssim \Phi$. Символ χ_E обозначает характеристическую функцию множества E. Значки := и =: применяются для определения новых величин.

1. УСЛОВИЯ ОГРАНИЧЕННОСТИ

Обозначим

$$\alpha(p,q) := \frac{p^2(q-1)}{q-p}, \quad p < q;$$

$$\beta(p,q,c) := 3\max\left\{\frac{3^{3q+1}}{4}, \frac{3^{\frac{q}{p}+2q}}{2^{\frac{q}{p}}}, \frac{3^{2q-\frac{q}{p}+2-c}}{4c}\left[\frac{2\cdot 3^{3c}}{1-c} - 3^{c-2}\right]\right\}, \quad q < p,$$

где $1/r := 1/q - 1/p$ и $0 < q/p \le c < 1$. Положим $\sigma := v^{1-p'}$ и

$$B := \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} d_y[I_2\sigma(x,y)]^{\frac{r}{p'}} d_x(-[I_2^* w(x,y)]^{\frac{r}{q}})\right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} [I_2\sigma(x,y)]^{\frac{r}{p'}} d_x d_y [I_2^* w(x,y)]^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} [I_2^* w(x,y)]^{\frac{r}{q}} d_x d_y [I_2\sigma(x,y)]^{\frac{r}{p'}}\right)^{\frac{1}{r}},$$

где последние два равенства получаются интегрированием по частям.

Введем обозначения

$$\mathbb{C}_{t,s} := 3^{3q}\left[4\left(\frac{2}{3}\right)^q \max\left\{t, 2q(q')^{\frac{q}{p'}}\right\}\left(\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}\right)^{\frac{q}{p}} + 3^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{3^{q-1}}{3^{q-1}-1}\right)^{\frac{1}{q'}}\right],$$

$$\mathbf{C}_{t,s} := 3^{3q}\left[2^q 3^{-q}\max\left\{t, 2q(p')^{q-1}\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{q}{r}}\right\}\left(\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}\right)^{\frac{q}{p}} + 3s^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{3^{q-1}}{3^{q-1}-1}\right)^{\frac{1}{q'}}\right].$$

Усилением теоремы 1 для $p < q$ является следующее утверждение.

Теорема 2 [14]. *Пусть $1 < p < q < \infty$. Неравенство*

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^2} (I_2 f)^q w\right)^{\frac{1}{q}} \le C_2\left(\int_{\mathbb{R}_+^2} f^p v\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6}$$

выполнено тогда и только тогда, когда $A_1 < \infty$, при этом

$$A_1 \le C_2 \le \mathbb{C}_{\alpha,\alpha^*} A_1,$$

где $\alpha := \alpha(p,q)$ *и* $\alpha^* := \alpha(q',p')$.

Напомним, что в случае $p \le q$ наилучшая константа C_2 двумерного неравенства (6) эквивалентна $\sum_{i=1}^{3} A_i$ (см. теорему 1). Однако для $p < q$ имеют место неравенства

$$A_1 \le C_2 \le \mathbb{C}_{1,1}[A_1 + A_2 + A_3] \le \le \mathbb{C}_{1,1}[1 + \alpha(p,q)^{\frac{1}{q}} + \alpha(q',p')^{\frac{1}{p'}}]A_1. \quad (7)$$

При этом $\lim_{p\to q-0}[\alpha(p,q) + \alpha(q',p')] = \infty$. Таким образом, правое неравенство в (7) и оценка сверху в теореме 2 при $p \to q - 0$ имеют blow-up эффект.

Новый результат в случае $q < p$ формулирует следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $1 < q < p < \infty$. *Предположим, что весовая функция* v *удовлетворяет условию*:

$$\text{существует } \gamma \in [q/p, 1) \text{ такое, что } \frac{\partial^2([I_2\sigma(x,y)]^{\gamma})}{\partial x \partial y} \ge 0 \text{ для п.в. } (x,y) \in \mathbb{R}^2_+. \quad (8)$$

Кроме этого, для веса w *выполнено условие*:

$$\text{существует } \gamma^* \in [p'/q', 1) \text{ такое, что } \frac{\partial^2([I_2^* w(x,y)]^{\gamma^*})}{\partial x \partial y} \ge 0 \text{ для п.в. } (x,y) \in \mathbb{R}^2_+. \quad (9)$$

Тогда неравенство (6) *выполнено тогда и только тогда, когда* $B < \infty$, *при этом*

$$2^{-\frac{1}{p'}} \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'}{r}\right)^{\frac{1}{p'}} B \le C_2 \le \mathbf{C}_{\beta,\beta^*} B, \quad (10)$$

где $\beta := \beta(p,q,\gamma)$ *и* $\beta^* := \beta(q',p',\gamma^*)$.

З а м е ч а н и е 1. Оценка снизу в (10) справедлива без требований (8) и (9) на весовые функции v и w. В качестве весов, удовлетворяющих (8) и (9), подходят, к примеру, $\sigma(x,y) = (x+y)^{\tau}$, $\tau > 0$, и $w(x,y) = (x+y)^{-\rho}$, $\rho > 2$.

В завершение параграфа представим альтернативные достаточные условия выполнения неравенства (6) без дополнительных ограничений на v и w.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $1 < q < p < \infty$. *Неравенство* (6) *выполнено, если*

$$B_v := \left(\int_{\mathbb{R}^2_+} \sigma(u,z) \left(\int_u^{\infty}\int_z^{\infty} (I_2\sigma)^{q-1} w \right)^{\frac{r}{q}} du dz \right)^{\frac{1}{r}} < \infty, \quad (11)$$

причем $C_2 \lesssim B_v$.

Верна также двойственная формулировка последней теоремы с функционалом

$$B_w := \left(\int_{\mathbb{R}^2_+} w(u,z) \left(\int_0^u\int_0^z (I_2^* w)^{p'-1} \sigma \right)^{\frac{r}{p'}} du dz \right)^{\frac{1}{r}}$$

вместо B_v.

З а м е ч а н и е 2. Если веса v и w факторизуемы, т.е. представляются в виде произведения одномерных функций, то условие $B_v < \infty$ (или $B_w < \infty$) необходимо и достаточно для выполнения (6) в случае $1 < q < p < \infty$, при этом $C_2 \approx B_v \approx B_w$ [4].

2. КОМПАКТНОСТЬ И МЕРА НЕКОМПАКТНОСТИ

Предположим, что $1 < p,\ q < \infty$ и оператор I_2 ограничен из $L^p_v(\mathbb{R}^2_+)$ в $L^q_w(\mathbb{R}^2_+)$.

Пусть $a,b,c,d \in (0,\infty)$ такие, что $a < c$ и $b < d$. Обозначим

$$\mathbf{\Omega}_0 := \mathbf{\Omega}_0(a,b) := \{(0,a)\times(0,\infty)\} \cup \{[a,\infty)\times(0,b)\},$$

$$\mathbf{\Omega}_\infty := \mathbf{\Omega}_\infty(a,b,c,d) := := \{[a,\infty)\times(d,\infty)\} \cup \{(c,\infty)\times[b,d]\}.$$

Для формулировки критерия компактности $I_2 : L^p_v(\mathbb{R}^2_+) \to L^q_w(\mathbb{R}^2_+)$ в случае $p \le q$ нам понадобятся следующие условия:

$$\lim_{\substack{a\to 0, b\to 0\\ c\to\infty, d\to\infty}} \left[\sup_{(u,z)\in\mathbf{\Omega}_0} A_1[(u,z);\sigma,w] + \sup_{(u,z)\in\mathbf{\Omega}_\infty} A_1[(u,z);\sigma,w] \right] = 0, \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{a\to 0, b\to 0\\ c\to\infty, d\to\infty}} \left[\sup_{(u,z)\in\mathbf{\Omega}_0} A_2[(u,z);\sigma,w] + \sup_{(u,z)\in\mathbf{\Omega}_\infty} A_2[(u,z);\sigma\chi_{\mathbf{\Omega}_\infty}, w\chi_{\mathbf{\Omega}_\infty}] \right] = 0, \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{a\to 0, b\to 0\\ c\to\infty, d\to\infty}} \left[\sup_{(u,z)\in\mathbf{\Omega}_0} A_3[(u,z);\sigma\chi_{\mathbf{\Omega}_0}, w\chi_{\mathbf{\Omega}_0}] + \sup_{(u,z)\in\mathbf{\Omega}_\infty} A_3[(u,z);\sigma,w] \right] = 0. \quad (14)$$

Т е о р е м а 5. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$. *Если* $p < q$, *то* $I_2 : L^p_v(\mathbb{R}^2_+) \to L^q_w(\mathbb{R}^2_+)$ *компактен тогда и только тогда, когда* $A_1 < \infty$ *и выполнено* (12).

В случае $p = q$ оператор $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \to L_w^p(\mathbb{R}_+^2)$ компактен, если и только если $\sum_{i=1,2,3} A_i < \infty$ и выполнены условия (12)–(14).

Для $q < p$ достаточное условие и необходимое условие компактности $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \to L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ представлены в следующей теореме.

Теорема 6. *Пусть $1 < q < p < \infty$. Оператор $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \to L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ компактен, если выполнено* (11). *Если $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \to L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ компактен, то $B < \infty$.*

Замечание 3. С условиями (8) и (9) на весовые функции v и w, соответственно, оператор $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \to L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ компактен, если и только если $B < \infty$.

Далее, определим

$$\boldsymbol{\alpha}(T) := \inf \|T - P\|,$$

где инфимум берется по всем ограниченным линейным отображениям $P : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \to L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ конечного ранга. Величина $\boldsymbol{\alpha}(T)$ совпадает с так называемым множеством меры некомпактности оператора T, действующего ограниченно из $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ (см. [15, § 2] и [16, Proposition 3.1]).

Так как для $1 < q < p$ оператор I_2 из $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ компактен тогда и только тогда, когда он ограничен (см. [17, 18, § 5.3]), то в таком случае $\boldsymbol{\alpha}(I_2) = 0$. Это следует из аппроксимационного свойства пространства $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ [19, § 10.2.3/1]. Для пространств Y, обладающих таким свойством, известно, что $\boldsymbol{\alpha}(T) = 0$ тогда и только тогда, когда $T : X \to Y$ компактен [19, § 10.1.3].

Рассмотрим ситуацию, когда $1 < p \le q < \infty$. Положим

$$A_1(\boldsymbol{\Omega}_0) := \sup_{(u,z)\in\boldsymbol{\Omega}_0} A_1[(u,z);\sigma,w],$$
$$A_1(\boldsymbol{\Omega}_\infty) := \sup_{(u,z)\in\boldsymbol{\Omega}_\infty} A_1[(u,z);\sigma,w];$$
$$A_2(\boldsymbol{\Omega}_0) := \sup_{(u,z)\in\boldsymbol{\Omega}_0} A_2[(u,z);\sigma,w],$$
$$A_2(\boldsymbol{\Omega}_\infty) := \sup_{(u,z)\in\boldsymbol{\Omega}_\infty} A_2[(u,z);\sigma\chi_{\boldsymbol{\Omega}_\infty},w\chi_{\boldsymbol{\Omega}_\infty}];$$
$$A_3(\boldsymbol{\Omega}_0) := \sup_{(u,z)\in\boldsymbol{\Omega}_0} A_3[(u,z);\sigma\chi_{\boldsymbol{\Omega}_0},w\chi_{\boldsymbol{\Omega}_0}],$$
$$A_3(\boldsymbol{\Omega}_\infty) := \sup_{(u,z)\in\boldsymbol{\Omega}_\infty} A_3[(u,z);\sigma,w].$$

Пусть

$$J(\boldsymbol{\Omega}_0) := A_1(\boldsymbol{\Omega}_0) \quad \text{и} \quad J(\boldsymbol{\Omega}_\infty) := A_1(\boldsymbol{\Omega}_\infty) \tag{15}$$

в случае $1 < p < q < \infty$; для $p = q$ мы полагаем

$$J(\boldsymbol{\Omega}_0) := \sum_{i=1}^{3} A_i(\boldsymbol{\Omega}_0) \quad \text{и} \quad J(\boldsymbol{\Omega}_\infty) := \sum_{i=1}^{3} A_i(\boldsymbol{\Omega}_\infty). \tag{16}$$

Для $1 < p \le q < \infty$ мера некомпактности $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \to L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ охарактеризована в следующем утверждении.

Теорема 7. *Пусть $1 < p \le q < \infty$ и I_2 ограничен из $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$. Тогда*

$$\boldsymbol{\alpha}(I_2) \approx \lim_{\substack{a\to 0, b\to 0\\ c\to\infty, d\to\infty}} \left[J(\boldsymbol{\Omega}_0) + J(\boldsymbol{\Omega}_\infty)\right].$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в Вычислительном центре ДВО РАН при поддержке гранта РНФ (проект № 22-21-00579, https://rscf.ru/project/22-21-00579/).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sawyer E.* Weighted inequalities for two-dimensional Hardy operator // Studia Math. 1985. V. 82. № 1. P. 1–16.
2. *Kokilashvili V., Meskhi A., Persson L.-E.* Weighted norm inequalities for integral transforms with product kernels // New-York: Nova Science Publishers, 2009. 342 pp.
3. *Meskhi A.* A note on two-weight inequalities for multiple Hardy-type operators // J. Funct. Spaces Appl. 2005. V. 3. № 3. P. 223–237.
4. *Persson L.-E., Ushakova E.P.* Some multi-dimensional Hardy type integral inequalities // J. Math. Inequal. 2007. V. 1. № 3. 301–319.
5. *Bradley J.S.* Hardy inequalities with mixed norms // Canad. Math. Bull. 1978. V. 21. № 4. P. 405–408.
6. *Прохоров В.Д., Степанов В.Д., Ушакова Е.П.* Интегральные операторы Харди-Стеклова // Совр. пробл. матем. 2016. Т. 22. 186 с.
7. *Sinnamon G., Stepanov V.D.* The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1992. V. 2. № 2. P. 232–242.
8. *Gogatishvili A., Kufner A., Persson L.-E., Wedestig A.* An equivalence theorem for integral conditions related to Hardy's inequality // Real Anal. Exchange. 2003/04. V. 29. № 2. P. 867–880.
9. *Степанов В.Д., Шамбилова Г.Э.* О двумерных билинейных неравенствах с прямоугольными операторами Харди в весовых пространствах Лебега // Труды МИАН. 2021. Т. 312. С. 251–258.
10. *Wedestig A.* Weighted inequalities for the Sawyer two-dimensional Hardy operator and its limiting geometric mean operator // J. Inequal. Appl. 2005. V. 4. P. 387–394.
11. *Barza S., Kamińska A., Persson L.-E., Soria J.* Mixed norm and multidimensional Lorentz spaces // Positivity. 2006. V. 10. № 3. P. 539–554.
12. *Forzani L., Martń-Reyes F.J., Ombrosi S.* Weighted inequalities for the two-dimensional one-sided Hardy–Littlewood maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 2011. V. 363. № 4. P. 1699–1719.

13. *Kumar S.* A Hardy-type inequality in two dimensions // Indag. Math. (N.S.) 2009. V. 20. № 2. P. 247–260.

14. *Stepanov V.D., Ushakova E.P.* On weighted Hardy inequality with two-dimensional rectangular operator – extension of the E. Saywer theorem // Math. Ineq. & Appl. 2021. V. 24. № 3. P. 617–634.

15. *Edmunds D.E., Stepanov V.D.* The measure of non–compactness and approximation numbers of certain Volterra integral operators // Math. Ann. 1994. V. 298. P. 41–66.

16. *Canavati J.A., Galaz-Fontes F.* Compactness of imbeddings between Banach spaces and applications to Sobolev spaces // J. Lond. Math. Soc., II Ser. 1990. V. 41. № 2. P. 511–525.

17. *Ando T.* On compactness of integral operators // Indag. Math. (New Series). 1962. V. 24. P. 235–239.

18. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций // М.: Наука, 1966. 500 с.

19. *Пич А.* Операторные идеалы. М.: Мир, 1982. 536 с.

ON THE BOUNDEDNESS AND COMPACTNESS OF THE TWO-DIMENSIONAL RECTANGULAR HARDY OPERATOR

Corresponing member of the RAS V. D. Stepanov[a] and E. P. Ushakova[b]

[a] *Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation*

[b] *V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Criteria in terms of weight functions v and w on $\mathbb{R}_+^2$ are obtained for the two-dimensional rectangular integration operator to be bounded and compact from a weighted Lebesgue space $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ to $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ if $1 < p$, $q < \infty$. For $p < q$ the boundedness criterion significantly enhances the classical result by E. Saywer (see Introduction) given for $p \le q$. The case $q < p$ is also discussed.

Keywords: weighted Lebesgue space, Hardy inequality, two-dimensional rectangular integration operator, boundedness, compactness