ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 73–82

МАТЕМАТИКА

УДК 511.48

СОБСТВЕННЫЕ СИММЕТРИИ ТРЕХМЕРНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

 И. А. Тлюстангелов[1,2,*]

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 31.05.2022 г.
После доработки 19.07.2022 г.
Принято к публикации 21.07.2022 г.

В данной работе доказывается критерий наличия у алгебраической цепной дроби собственной палиндромической симметрии в размерности 4. В качестве многомерного обобщения цепных дробей рассматриваются полиэдры Клейна.

Ключевые слова: полиэдры Клейна, алгебраические решетки

DOI: 10.31857/S2686954322050174

1. ВВЕДЕНИЕ

Обыкновенная цепная дробь действительного числа имеет весьма изящную геометрическую интерпретацию, позволяющую перейти от классического случая к многомерному (см. [1] и, например, [2–4]). Для описания такого обобщения рассмотрим $l_1,\ldots,l_n$ – одномерные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, линейная оболочка которых совпадает со всем $\mathbb{R}^n$. Гиперпространства, натянутые на всевозможные $(n-1)$-наборы из этих подпространств, разбивают $\mathbb{R}^n$ на 2^n симплициальных конусов. Будем обозначать множество этих конусов через

$$\mathscr{C}(l_1,\ldots,l_n).$$

Симплициальный конус с вершиной в начале координат $\mathbf{0}$ будем называть *иррациональным*, если линейная оболочка любой его гиперграни не содержит целых точек, кроме начала координат $\mathbf{0}$.

Определение 1. Пусть C – иррациональный конус, $C\in\mathscr{C}(l_1,\ldots,l_n)$. Выпуклая оболочка $\mathscr{K}(C)=\mathrm{conv}(C\cap\mathbb{Z}^n\backslash\{\mathbf{0}\})$ и его граница $\partial(\mathscr{K}(C))$ называются соответственно *полиэдром Клейна* и *парусом Клейна*, соответствующими конусу C. Объединение же всех 2^n парусов

$$\mathrm{CF}(l_1,\ldots,l_n)=\bigcup_{C\in\mathscr{C}(l_1,\ldots,l_n)}\partial(\mathscr{K}(C))$$

называется $(n-1)$-*мерной цепной дробью*.

Особенный интерес представляет так называемый алгебраический случай. Напомним, что оператор из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ с вещественными собственными значениями, характеристический многочлен которого неприводим над $\mathbb{Q}$, называется *гиперболическим*. Справедливо следующее утверждение о связи гиперболических операторов с алгебраическими числами в случае произвольного n (подробности см., например, в [5]).

Предложение 1. Числа $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ образуют базис некоторого вполне вещественного расширения K поля $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда вектор $(1,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. При этом вектора $(1,\sigma_i(\alpha_1),\ldots,\sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i=1,\ldots,n$, где $\sigma_1(=\mathrm{id}),\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ – все вложения K в $\mathbb{R}$, образуют собственный базис оператора A.

В случае $n=2$ предложение 1 позволяет геометрически проинтерпретировать классическую теорему Лагранжа о периодичности обыкновенной цепной дроби. Геометрически теорема Лагранжа означает, что последовательность целочисленных длин и углов паруса одномерной цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2)$ периодична тогда и только тогда, когда направления l_1 и l_2 являются собственными для некоторого $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ оператора с различными вещественными собственными значениями (см., например [6]).

Определение 2. Пусть $l_1,\ldots,l_n$ – собственные подпространства некоторого гиперболического оператора $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Тогда $(n-1)$-мерная цепная дробь $\mathrm{CF}(l_1,\ldots,l_n)$ называется *алгебраической*. Мы будем также говорить, что эта дробь *ассоцииро-*

[1] *Механико-математический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**E-mail: ibragim-tls@yandex.ru*

вана с оператором A и писать $\mathrm{CF}(A)=\mathrm{CF}(l_1,\ldots,l_n)$. Множество всех $(n-1)$-мерных алгебраических цепных дробей будем обозначать $\mathfrak{A}_{n-1}$.

Будем называть *группой симметрий* алгебраической цепной дроби $\mathrm{CF}(A)=\mathrm{CF}(l_1,\ldots,l_n)$ множество

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CF}(A)) = \\ = \{G\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \,|\, G(\mathrm{CF}(A))=\mathrm{CF}(A)\}.$$

Из соображений непрерывности ясно, что для каждого $G\in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CF}(A))$ однозначно определена перестановка σ_G, такая что

$$G(l_i)=l_{\sigma_G(i)},\quad i=1,\ldots,n. \qquad (1.1)$$

И обратно, если для $G\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ существует такая перестановка σ_G, что выполняются соотношения (1.1), то $G\in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CF}(A))$.

Благодаря теореме Дирихле об алгебраических единицах существует изоморфная $\mathbb{Z}^{n-1}$ подгруппа группы $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CF}(A))$ (см., например, [5]). Относительно действия этой подгруппы на любом из 2^n парусов возникает фундаментальная область, которую можно отождествить с $(n-1)$-мерным тором (см. [2]). Для каждого элемента G, принадлежащего этой подгруппе, $\sigma_G=\mathrm{id}$. Однако в $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CF}(A))$, вообще говоря, могут существовать такие элементы G, для которых $\sigma_G\neq \mathrm{id}$.

О п р е д е л е н и е 3. Оператор $G\in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CF}(A))$ такой, что $\sigma_G=\mathrm{id}$, будем называть *симметрией Дирихле* дроби $\mathrm{CF}(A)\in\mathfrak{A}_{n-1}$.

О п р е д е л е н и е 4. Оператор $G\in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CF}(A))$, не являющийся симметрией Дирихле, будем называть *палиндромической симметрией* дроби $\mathrm{CF}(A)$. Если множество палиндромических симметрией цепной дроби непусто, то такую цепную дробь будем называть *палиндромичной*.

О п р е д е л е н и е 5. Палиндромическая симметрия $G\in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CF}(A))$ называется *собственной*, если у оператора G существует неподвижная точка на некотором парусе цепной дроби $\mathrm{CF}(A)$. Палиндромическая симметрия $G\in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CF}(A))$, не являющаяся собственной, называется *несобственной*.

В данной работе нас будут интересовать собственные палиндромические симметрии $\mathrm{CF}(A)$ в размерности $n=4$. А именно, мы докажем критерий наличия такого рода симметрий у цепной дроби $\mathrm{CF}(A)$. Для размерностей $n=2$ и $n=3$ аналогичные критерии уже существуют.

Для $n=2$, т.е. для одномерных цепных дробей, палиндромичность напрямую связана с симметричностью периодов обыкновенных цепных дробей квадратичных иррациональностей. Критерий симметричности периода цепной дроби квадратичной иррациональности восходит к результатам Галуа [7], Лежандра [8], Перрона [9] и Крайтчика [10]. В работе [6] дано геометрическое доказательство этого критерия. Аналог этого критерия для $n=3$ был получен в работе [5]. Упомянутые критерии выглядят следующим образом:

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2)\in\mathfrak{A}_1$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1,\alpha)$. Тогда $\mathrm{CF}(l_1,l_2)$ имеет собственную симметрию в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число ω степени 2 со своим сопряженным ω', что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(а) $(1,\alpha)\sim(1,\omega)$: $\mathrm{Tr}(\omega)=\omega+\omega'=0$;

(б) $(1,\alpha)\sim(1,\omega)$: $\mathrm{Tr}(\omega)=\omega+\omega'=1$.

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3)\in\mathfrak{A}_2$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1,\alpha,\beta)$. Тогда $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3)$ имеет собственную симметрию в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число ω степени 3 со своими сопряженными ω' и ω'', что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(а) $(1,\alpha,\beta)\sim(1,\omega,\omega')$: $\mathrm{Tr}(\omega)=\omega+\omega'+\omega''=0$;

(б) $(1,\alpha,\beta)\sim(1,\omega,\omega')$: $\mathrm{Tr}(\omega)=\omega+\omega'+\omega''=1$.

При выполнении утверждения (а) или (б) кубическое расширение $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ будет нормальным.

В этих формулировках $\mathbf{v}_1\sim\mathbf{v}_2$ для векторов из $\mathbb{R}^n$ означает существование такого оператора $X\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и такого ненулевого $\mu\in\mathbb{R}$, что $X\mathbf{v}_1=\mu\mathbf{v}_2$.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Основным результатом данной работы является следующая

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathfrak{A}_3$ *и пусть подпространство* l_1 *порождено вектором* $(1,\alpha,\beta,\gamma)$. *Пусть* $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$ *и* $\sigma_1(=\mathrm{id}),\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ – *все вложения поля* K *в* $\mathbb{R}$ (*см. предложение* 1). *Тогда* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ *имеет собственную палиндромическую симметрию в том и только в том случае, если* (*с точностью до перестановки индексов*) *выполняется*

$$\sigma_3(K)=K,\quad \sigma_4(K)=\sigma_2(K),$$
$$\sigma_3^2=\sigma_1=\mathrm{id},\quad \sigma_4=\sigma_2\sigma_3$$

и существуют такие алгебраические числа ω *и* ψ *степени* 4, *принадлежащие полю* K, *что выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(1) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\omega')$: $\psi+\psi'=-(\omega+\omega')$;

(2) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\omega')$: $\psi+\psi'=1-(\omega+\omega')$;

(3) $(1,\alpha,\beta,\gamma) \sim (1,\omega,\psi,\omega')$: $\psi + \psi' = 2 - (\omega + \omega')$;

(4) $(1,\alpha,\beta,\gamma) \sim \left(1,\omega,\psi,\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)$: $\psi+\psi' = -(\omega+\omega')$;

(5) $(1,\alpha,\beta,\gamma) \sim \left(1,\omega,\psi,\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)$: $\psi+\psi' = 2-(\omega+\omega')$;

(6) $(1,\alpha,\beta,\gamma) \sim \left(1,\omega,\psi,\dfrac{\omega+\omega'+1}{2}\right)$: $\psi+\psi' = -(\omega+\omega')$;

(7) $(1,\alpha,\beta,\gamma) \sim \left(1,\omega,\psi,\dfrac{\omega+\omega'+1}{2}\right)$: $\psi+\psi' = 2-(\omega+\omega')$;

(8) $(1,\alpha,\beta,\gamma) \sim \left(1,\omega,\psi,\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)$: $\psi+\psi' = 1-\dfrac{\omega+\omega'}{2}$;

(9) $(1,\alpha,\beta,\gamma) \sim \left(1,\omega,\psi,\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)$: $\psi+\psi' = 2-\dfrac{\omega+\omega'}{2}$;

(10) $(1,\alpha,\beta,\gamma) \sim \left(1,\omega,\psi,\dfrac{\omega'-\omega}{4}\right)$: $\psi+\psi' = 2-\dfrac{\omega+\omega'}{2}$,

где $\omega' = \sigma_3(\omega)$, $\psi' = \sigma_3(\psi)$.

В работе [11] исследуются *циклические* симметрии, т.е. такие симметрии $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathfrak{A}_3$, которые циклически переставляют направления l_1, l_2, l_3, l_4. А именно, в этой работе доказывается, что цепная дробь $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathfrak{A}_3$ имеет собственную циклическую симметрию тогда и только тогда, когда K – циклическое расширение Галуа, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \langle\sigma_2\rangle$ и выполняется один из пунктов (1)–(7) теоремы 1 для $\psi = \sigma_2(\omega)$. Следующее утверждение показывает, что не всякая палиндромичная цепная дробь обладает собственными циклическими симметриями:

П р е д л о ж е н и е 4. Существуют такие вещественные числа α, β, γ, что подпространство l_1 порождено вектором $(1,\alpha,\beta,\gamma)$, вполне вещественное расширение $K = \mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$ поля $\mathbb{Q}$ не является нормальным и $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathfrak{A}_3$ – палиндромичная цепная дробь, не обладающая собственными циклическими симметриями.

Любопытно, что критерий наличия собственных циклических симметрий не следует непосредственно из теоремы 1. В связи с этим возникает естественный

В о п р о с. Верно ли, что существует такая палиндромичная алгебраическая цепная дробь $\mathrm{CF}(l_1,l_2, \mathrm{l}_3, \mathrm{l}_4)$, для которой поле K является циклическим расширением Галуа и у которой не существует собственных циклических палиндромических симметрий?

Оставшаяся часть статьи имеет следующую структуру: в параграфе 3 мы анализируем то, как у собственных симметрий трехмерных цепных дробей устроены собственные подпространства и перестановки из соотношения (1.1); в параграфе 4 мы изучаем геометрию трехмерных цепных дробей, обладающих собственными симметриями; в параграфе 5 мы устанавливаем связь между определенными классами цепных дробей и матрицами их собственных симметрий; параграф 6 посвящен доказательству теоремы 1; наконец, в параграфе 7 мы доказываем предложение 4.

3. СОБСТВЕННЫЕ СИММЕТРИИ И СОБСТВЕННЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Если задана дробь $\mathrm{CF}(l_1,\ldots,l_n) = \mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$, будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\mathbf{l}_1 = (1,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ (данное допущение корректно в силу предложения 1). Тогда из предложения 1 следует, что числа $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ над $\mathbb{Q}$ и каждое l_i порождается вектором $\mathbf{l}_i = (1,\sigma_i(\alpha_1),\ldots,\sigma_i(\alpha_{n-1}))$, где $\sigma_1(=\mathrm{id}),\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ – все вложения K в $\mathbb{R}$. Заметим, что верна следующая

Л е м м а 3.1. *Пусть* $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CF}(A))$ *и* $\mathrm{CF}(A) = \mathrm{CF}(l_1,\ldots,l_n)$. *Пусть* $G \neq \pm I_n$ *и* $G(\mathbf{l}_1) = \lambda\mathbf{l}_1$. *Тогда* $\lambda \notin \mathbb{Q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{Q}$. Поскольку $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и $G \neq \pm I_n$, то $\mathrm{rank}(G-\lambda I_n) > 0$. Так как $(G-\lambda I_n)(\mathbf{l}_1) = \mathbf{0}$, то какие-то числа из набора 1, $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ выражаются через оставшиеся числа этого набора в виде некоторой линейной комбинации с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. В силу предложения 1 получаем противоречие. $\square$

Отныне будем считать, что $n = 4$, т.е. будем рассматривать трехмерные цепные дроби. Напомним также, что для каждого $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CF}(A))$ соотношением (1.1) определена перестановка σ_G.

Л е м м а 3.2. *Пусть* G *– палиндромическая симметрия* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathfrak{A}_3$, *ассоциированной с (гиперболическим) оператором* A. *Тогда существует такая нумерация подпространств* l_1, l_2, l_3, l_4, *что* $\sigma_G = (1,2)(3,4)$ *или* $\sigma_G = (1,2,3,4)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай $\sigma_G = \mathrm{id}$ невозможен в силу того, что оператор G не является симметрией Дирихле $\mathrm{CF}(A)$.

Предположим, существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, что $\sigma_G = (1)(2,3,4)$. Таким образом, существуют такие вещественные числа μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$, $\mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен оператора G имеет вид

$$\chi_G(x) = (x - \mu_1)(x^3 - \mu_2\mu_3\mu_4) = \\ = x^4 - \mu_1 x^3 - \mu_2\mu_3\mu_4 x \pm 1 \in \mathbb{Z}[x].$$

Следовательно, μ_1 — целое число, и при этом μ_1 — корень уравнения $\chi_G(x) = 0$, т.е. $\mu_1 = \pm 1$. Стало быть, l_1 — собственное подпространство оператора G, соответствующее собственному значению $\mu_1 = \pm 1$. То есть l_1 рационально, что противоречит гиперболичности оператора A.

Предположим, существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, что $\sigma_G = (1)(2)(3,4)$. Таким образом, существуют такие вещественные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$, $\mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен оператора G, коэффициенты которого целочисленны, имеет вид

$$(x - \mu_1)(x - \mu_2)(x^2 - \mu_3\mu_4) = \\ = x^4 - (\mu_1 + \mu_2)x^3 + (\mu_1\mu_2 - \mu_3\mu_4)x^2 + \\ + (\mu_1 + \mu_2)\mu_3\mu_4 x - \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4.$$

Так как $\mu_1 + \mu_2 \in \mathbb{Z}$, то $\mu_3\mu_4 \in \mathbb{Q}$. Тогда существуют такие взаимно-простые целые числа $p \geq 1$ и $q \geq 1$, что $|\mu_3\mu_4| = \frac{p}{q}$, $|\mu_1\mu_2| = \frac{q}{p}$, а значит

$$|\mu_1\mu_2 - \mu_3\mu_4| = \frac{\pm p^2 \pm q^2}{pq}.$$

Итак, p^2 делится на q и q^2 делится на p, т.е. $p = q = 1$ и $\mu_3\mu_4 = \pm 1$. Таким образом, матрица оператора G^2 в базисе $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$, $\mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Из леммы 3.1 следует, что $G^2 = I_4$, т.е. $\mu_1 = \pm 1$. Вновь применяя лемму 3.1, получаем, что $G = \pm I_4$, чего не может быть.

Таким образом, существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, что $\sigma_G = (1,2)(3,4)$ или $\sigma_G = (1,2,3,4)$. $\square$

С л е д с т в и е 1. *Пусть G — палиндромическия симметрия* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. *Пусть* $G' = G^2$, *если* $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 4$, *и* $G' = G$, *если* $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 2$. *Тогда G' — палиндромическия симметрия* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ *и* $\mathrm{ord}(\sigma_{G'}) = 2$.

Пусть G — палиндромическия симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, в силу леммы 3.2 можно рассмотреть такие вещественные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$, $\mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

или вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$, $\mathbf{l}_4$ имеет вид (3.1). В работе [11] доказывается, что G является собственной симметрией $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ тогда и только тогда, когда $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$ (см. следствие 1 в [11]). Для палиндромических симметрий вида (3.2) справедливо аналогичное утверждение:

Л е м м а 3.3. *Пусть G — палиндромическая симметрия* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ *и матрица оператора G в базисе* $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$, $\mathbf{l}_4$ *имеет вид* (3.2). *Тогда G является собственной симметрией дроби* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ *в том и только том случае, если* $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G является собственной симметрией цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существуют такие числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 из множества $\{-1, 1\}$, что

$$G(\varepsilon_1\mathbf{l}_1, \varepsilon_2\mathbf{l}_2, \varepsilon_3\mathbf{l}_3, \varepsilon_4\mathbf{l}_4) = (\mu_3\varepsilon_1\mathbf{l}_3, \mu_4\varepsilon_2\mathbf{l}_4, \mu_1\varepsilon_3\mathbf{l}_1, \mu_2\varepsilon_4\mathbf{l}_2),$$

и выполняются неравенства

$$\mu_1\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} > 0, \quad \mu_2\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_2} > 0, \quad \mu_3\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} > 0, \quad \mu_4\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4} > 0.$$

Стало быть, $\mu_1\mu_3 > 0$ и $\mu_2\mu_4 > 0$. Так как у оператора G существует неподвижная точка на некотором парусе, то у оператора G существует одномерное собственное подпространство, соответствующее собственному значению 1. Теперь, поскольку характеристический многочлен оператора G имеет вид $(x^2 - \mu_1\mu_3)(x^2 - \mu_2\mu_4)$, то $\mu_1\mu_3 = 1$ или $\mu_2\mu_4 = 1$. Тогда $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$.

Если $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$, то, опять же, характеристический многочлен оператора G имеет вид $x^4 - 2x^2 + 1$. Стало быть, у оператора G существует целочисленный собственный вектор, соответствующий собственному значению 1. Этот вектор лежит внутри некоторого конуса $C \in \mathcal{C}(l_1, l_2, l_3, l_4)$, поскольку цепная дробь $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ является алгебраической. $\square$

Следствие 2. *Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Тогда G является собственной симметрией в том и только том случае, если G' (см. следствие 1) является собственной симметрией.*

Доказательство. Если G является собственной симметрией $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$, то, очевидно, оператор G' также является собственной симметрией цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$.

Обратно, предположим G' — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Если $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 4$, то, изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, можно считать, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$, $\mathbf{l}_4$ имеет вид (3.2). Тогда матрица оператора $G' = G^2$ в базисе $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$, $\mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1\mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2\mu_1 \\ \mu_3\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_4\mu_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стало быть, в силу леммы 3.3 $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$, а значит G — собственная симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ (см. следствие 1 в [11]). $\square$

Лемма 3.4. *Пусть G — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 2$. Тогда существуют такие одномерные рациональные подпространства l_+^1, l_+^2, l_-^1 и l_-^2, что $Gl_+^1 = l_+^1$, $Gl_+^2 = l_+^2$, $Gl_-^1 = l_-^1$, $Gl_-^2 = l_-^2$ и $l_+^1 + l_+^2 + l_-^1 + l_-^2 = \mathbb{R}^4$. При этом подпространства l_+^1 и l_+^2 соответствуют собственному значению 1, а подпространства l_-^1 и l_-^2 соответствуют собственному значению -1.*

Доказательство. Изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, в силу леммы 3.3 можно считать, что существуют такие вещественные числа μ_1 и μ_2, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$, $\mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ \dfrac{1}{\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\mu_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\chi_G(x) = (x-1)^2(x+1)^2$, то у оператора G есть двумерное инвариантное подпространство L_+, соответствующее собственному значению 1, и двумерное инвариантное подпространство L_-, соответствующее собственному значению -1. Покажем рациональность подпространств L_+ и L_-, из чего будет следовать утверждение леммы.

Поскольку подпространство L_+ совпадает с решением системы линейных уравнений

$$(G - I_4)\mathbf{x}^\top = \mathbf{0},$$

то фундаментальная система решений данной системы линейных уравнений имеет размерность 2. Рассмотрев в качестве значений свободных переменных наборы (0, 1) и (1, 0), мы определим два линейно-независимых рациональных решения данной системы, из чего следует рациональность L_+. Рациональность подпространства L_- доказывается аналогичным способом. $\square$

4. ГЕОМЕТРИЯ СОБСТВЕННЫХ СИММЕТРИЙ

Лемма 4.1. *Пусть G — собственная симметрия дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Пусть $F = G'$ (см. следствие 1) — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ (см. следствие 2). Тогда существуют $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4 \in \mathbb{Z}^4$, такие что*

$$F(\mathbf{z}_1) = \mathbf{z}_3, \quad F(\mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_4,$$
$$F(\mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_1, \quad F(\mathbf{z}_4) = \mathbf{z}_2$$

и выполняется хотя бы одно из следующих одиннадцати утверждений:

(1) *вектора $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*

(2) *вектора $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*

(3) *вектора $\mathbf{z}_1$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2)$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3)$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*

(4) *вектора* $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3)$, $\frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$;

(5) *вектора* $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3)$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_4)$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$;

(6) *вектора* $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4-\mathbf{z}_2)$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$;

(7) *вектора* $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2)+\frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_4-\mathbf{z}_3-\mathbf{z}_2)$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$;

(8) *вектора* $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_4)$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$;

(9) *вектора* $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3)$, $\frac{1}{4}\mathbf{z}_1+\frac{1}{2}\mathbf{z}_2-\frac{1}{4}\mathbf{z}_3+\frac{1}{2}\mathbf{z}_4$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$;

(10) *вектора* $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3)$, $\frac{1}{2}\mathbf{z}_1+\frac{1}{4}\mathbf{z}_2+\frac{1}{2}\mathbf{z}_4$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$;

(11) *вектора* $\mathbf{z}_1$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2)$, $\mathbf{z}_3$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4-\mathbf{z}_2)$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$.

Доказательство. Будем называть плоскость *рациональной,* если множество содержащихся в нем целых точек является (аффинной) решеткой ранга, равного размерности этой плоскости.

Рассмотрим для собственной симметрии F подпространства l_+^1, l_+^2, l_-^1 и l_-^2 из леммы 3.4 и положим $S = l_+^2 + l_-^1 + l_-^2$. Обозначим через S_1 ближайшую к S рациональную гиперплоскость, параллельную S и не совпадающую с S (любую из двух). Тогда $G(S_1) = S_1$. Также обозначим через $\mathbf{p}$ точку пересечения гиперплоскости S_1 и l_+^1, а через l и π прямую и плоскость, проходящие через точку $\mathbf{p}$ и параллельные l_+^2 и $L_- = l_-^1 + l_-^2$ соответственно. При этом $F(l) = l$, $F(\pi) = \pi$ и $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$.

Плоскость π разделяет гиперплоскость S_1 на два множества S_1^+ и S_1^-. Пусть Q и R – рациональные плоскости, ближайшие к π, параллельные π и не совпадающие с π, принадлежащие множествам S_1^+ и S_1^- соответственно. Отметим, что, вообще говоря, расстояния от π до Q и от π до R не обязательно равны. Положим $\mathbf{p}^Q = Q \cap l$ и $\mathbf{p}^R = R \cap l$.

Пусть $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ – такая пара точек решетки $\mathbb{Z}^4$, что $\mathbf{z}_1 \in Q$, $\mathbf{z}_2 \in R$, вектора $\mathbf{z}_1 - \mathbf{p}^Q$ и $\mathbf{z}_2 - \mathbf{p}^R$ неколлинеарны. Тогда можно построить точки

$$\mathbf{z}_3 = F(\mathbf{z}_1) \in \mathbb{Z}^4 \cap Q, \quad \mathbf{z}_4 = F(\mathbf{z}_2) \in \mathbb{Z}^4 \cap R,$$

$$\mathbf{z}_1^R = \mathbf{z}_1 + (\mathbf{p}^R - \mathbf{p}^Q), \quad \mathbf{z}_3^R = \mathbf{z}_3 + (\mathbf{p}^R - \mathbf{p}^Q),$$
$$\mathbf{z}_2^Q = \mathbf{z}_2 + (\mathbf{p}^Q - \mathbf{p}^R), \quad \mathbf{z}_4^Q = \mathbf{z}_4 + (\mathbf{p}^Q - \mathbf{p}^R),$$

$$\mathbf{z}_1^\pi = \mathbf{z}_1 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}^Q), \quad \mathbf{z}_3^\pi = \mathbf{z}_3 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}^Q),$$
$$\mathbf{z}_2^\pi = \mathbf{z}_2 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}^R), \quad \mathbf{z}_4^\pi = \mathbf{z}_4 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}^R).$$

Рассмотренные точки определяют тройку параллелограммов $(\Delta^\pi, \Delta^Q, \Delta^R)$, где

$$\Delta^\pi = \mathrm{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi) \subset \pi,$$

$$\Delta^Q = \mathrm{conv}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4^Q) \subset Q,$$
$$\Delta^R = \mathrm{conv}(\mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3^R, \mathbf{z}_4) \subset R.$$

При помощи метода спуска можно построить такую пару $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$, что (см. рис. 1)

$$\Delta^Q \cap \mathbb{Z}^4 \subseteq \left\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4^Q, \mathbf{p}^Q, \frac{\mathbf{z}_2^Q + \mathbf{p}^Q}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^Q + \mathbf{p}^Q}{2}\right\},$$

$$\Delta^R \cap \mathbb{Z}^4 \subseteq \left\{\mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3^R, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}^R, \frac{\mathbf{z}_1^R + \mathbf{p}^R}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^R + \mathbf{p}^R}{2}\right\},$$

и $\Delta^\pi \cap \mathbb{Z}^4$ является подмножеством множества

$$\left\{\mathbf{z}_1^\pi, \mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{z}_3^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{z}_4^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2},\right.$$
$$\left.\frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{p}}{2}\right\}.$$

Аккуратно перебирая возможные расположения точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в тройке параллелограммов $(\Delta^\pi, \Delta^Q, \Delta^R)$, мы попадаем в одну из одиннадцати ситуаций, соответствующей одному из утверждений (1)–(11).

5. МАТРИЦЫ СОБСТВЕННЫХ СИММЕТРИЙ

Напомним, что если задана дробь $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) = \mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_3$, будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\mathbf{l}_1 = (1, \alpha, \beta, \gamma)$. Тогда из предложения 1 следует, что числа 1, α, β, γ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ над $\mathbb{Q}$ и каждое l_i порождается вектором $\mathbf{l}_i = (1, \sigma_i(\alpha), \sigma_i(\beta), \sigma_i(\gamma))$, где $\sigma_1(= \mathrm{id}), \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ – все вложения K в $\mathbb{R}$. То есть, если через $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4)$ обозначить матрицу со столбцами $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$, $\mathbf{l}_4$, получим

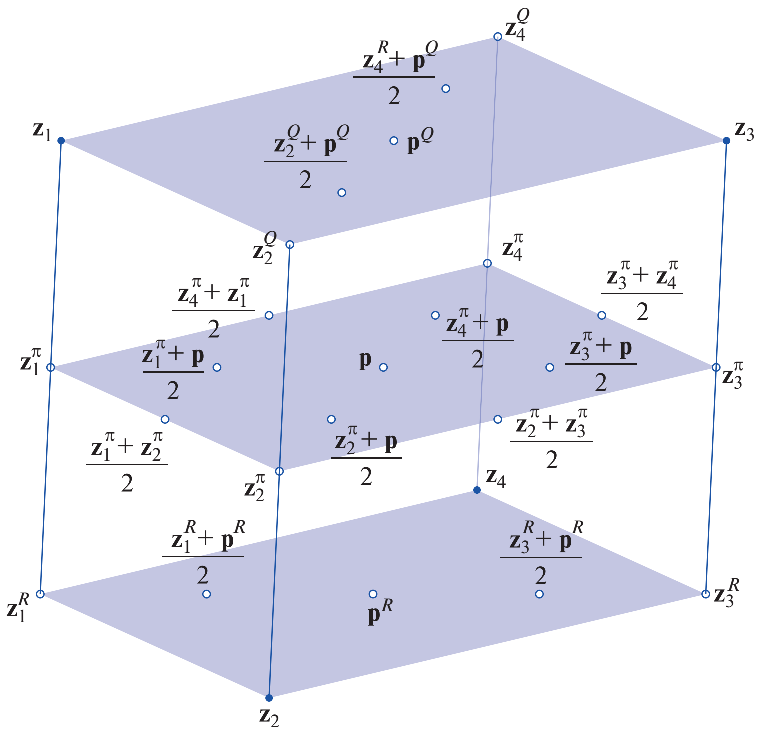

Рис. 1. Возможное расположение точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в параллелограммах из построенной тройки $(\Delta^\pi, \Delta^Q, \Delta^R)$.

$$(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \sigma_2(\alpha) & \sigma_3(\alpha) & \sigma_4(\alpha) \\ \beta & \sigma_2(\beta) & \sigma_3(\beta) & \sigma_4(\beta) \\ \gamma & \sigma_2(\gamma) & \sigma_3(\gamma) & \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Мы будем обозначать через $\widetilde{\mathfrak{A}}_3$ множество всех трехмерных алгебраических цепных дробей, для которых

$$\sigma_3(K) = K, \quad \sigma_4(K) = \sigma_2(K),$$
$$\sigma_3^2 = \mathrm{id}, \quad \sigma_4 = \sigma_2\sigma_3.$$

Для каждого $i = 1, 2, \ldots, 10$ определим $\mathbf{CF}_i$ как класс дробей из $\widetilde{\mathfrak{A}}_3$, удовлетворяющих паре соотношений $\mathfrak{R}_i$, где

$$\mathfrak{R}_1 \colon \beta + \sigma_3(\beta) = -(\alpha + \sigma_3(\alpha)), \ \gamma = \sigma_3(\alpha);$$

$$\mathfrak{R}_2 \colon \beta + \sigma_3(\beta) = 1 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)), \ \gamma = \sigma_3(\alpha);$$

$$\mathfrak{R}_3 \colon \beta + \sigma_3(\beta) = 2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)), \ \gamma = \sigma_3(\alpha);$$

$$\mathfrak{R}_4 \colon \beta + \sigma_3(\beta) = -(\alpha + \sigma_3(\alpha)), \ \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2};$$

$$\mathfrak{R}_5 \colon \beta + \sigma_3(\beta) = 2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)), \ \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2};$$

$$\mathfrak{R}_6 \colon \beta + \sigma_3(\beta) = -(\alpha + \sigma_3(\alpha)), \ \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha) + 1}{2};$$

$$\mathfrak{R}_7 \colon \beta + \sigma_3(\beta) = 2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)), \ \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha) + 1}{2};$$

$$\mathfrak{R}_8 \colon \beta + \sigma_3(\beta) = 1 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}, \ \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2};$$

$$\mathfrak{R}_9 \colon \beta + \sigma_3(\beta) = 2 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}, \ \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2};$$

$$\mathfrak{R}_{10} \colon \beta + \sigma_3(\beta) = 2 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}, \ \gamma = \frac{\sigma_3(\alpha) - \alpha}{4}.$$

Покажем, что все дроби из классов $\mathbf{CF}_i$, палиндромичны для каждого $i = 1, 2, \ldots, 10$. Положим $G_1, G_2, \ldots, G_{10}$ равными соответственно матрицам

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&-1&0&2\\1&0&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&-1&0&2\\3&0&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&2\\1&0&-1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&2\\2&0&-1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&4\\2&-1&-1&-2\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Лемма 5.1. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathfrak{A}_3$ *и* $i\in\{1,2,\ ...,\ 10\}$. *Тогда цепная дробь* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ *принадлежит классу* $\mathbf{CF}_i$ *в том и только в том случае, если* G_i *— ее собственная симметрия и* $\mathrm{ord}(\sigma_{G_i})=2$.

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{CF}(l_1,\ l_2,\ l_3,l_4)$ принадлежит классу $\mathbf{CF}_1$ в том и только в том случае, если G_1 — ее собственная симметрия и $\mathrm{ord}(\sigma_{G_1})=2$.

В силу леммы 3.3 оператор $G\in\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ является собственной симметрией дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_G)=2$ тогда и только тогда, когда с точностью до перестановки индексов существуют такие действительные числа μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, что $G(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4)=(\mu_3\mathbf{l}_3,\mu_4\mathbf{l}_4,\mu_1\mathbf{l}_1,\mu_2\mathbf{l}_2)$ и $\mu_1\mu_3=\mu_2\mu_4=1$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathbf{CF}_1$. Заметим, что $\sigma_2=\sigma_2\sigma_3^2=\sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3(\gamma)=\sigma_3^2(\alpha)=\alpha$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_4\sigma_3(\alpha)=\sigma_2(\alpha)$, $\sigma_2(\beta)+\sigma_2\sigma_3(\beta)=\sigma_2(\beta+\sigma_3(\beta))=\sigma_2(-(\alpha+\sigma_3(\alpha)))=-(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha))$ и $\sigma_4(\beta)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$G_1\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}1\\\sigma_3(\alpha)\\-\beta-(\alpha+\sigma_3(\alpha))\\\alpha\end{pmatrix},$$
$$G_1\mathbf{l}_2=\begin{pmatrix}1\\\sigma_2\sigma_3(\alpha)\\-\sigma_2(\beta)-(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha))\\\sigma_2(\alpha)\end{pmatrix},$$
$$G_1\mathbf{l}_3=\begin{pmatrix}1\\\alpha\\-\sigma_3(\beta)-(\sigma_3(\alpha)+\alpha)\\\sigma_3(\alpha)\end{pmatrix},$$
$$G_1\mathbf{l}_4=\begin{pmatrix}1\\\sigma_2(\alpha)\\-\sigma_2\sigma_3(\beta)-(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha))\\\sigma_2\sigma_3(\alpha)\end{pmatrix},$$

то есть $G_1(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4)=(\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4,\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$. Следовательно, G_1 — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{G_1})=2$. Обратно, предположим, G_1 — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{G_1})=2$. Тогда существует μ_3 такое, что с точностью до перестановки индексов

$$G_1\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}1\\\gamma\\-\beta-(\alpha+\gamma)\\\alpha\end{pmatrix}=\mu_3\begin{pmatrix}1\\\sigma_3(\alpha)\\\sigma_3(\beta)\\\sigma_3(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\gamma=\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3^2(\alpha)=\sigma_3(\gamma)=\alpha$, $\sigma_3^2(\gamma)=\sigma_3(\alpha)=\gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta)=-(\alpha+\sigma_3(\alpha))$, $\sigma_3^2(\beta)=-\sigma_3(\beta)-(\sigma_3(\alpha)+\sigma_3^2(\alpha))=-\sigma_3(\beta)-(\alpha+\sigma_3(\alpha))=\beta$. Существует μ_4 такое, что

$$G_1\mathbf{l}_2=\begin{pmatrix}1\\\sigma_2(\gamma)\\-\sigma_2(\beta)-(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2(\gamma))\\\sigma_2(\alpha)\end{pmatrix}=\mu_4\begin{pmatrix}1\\\sigma_4(\alpha)\\\sigma_4(\beta)\\\sigma_4(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4=1$, $\sigma_4(\alpha)=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_2(\alpha)=\sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta)=-\sigma_2(\beta)-(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2(\gamma))=\sigma_2(-\beta-(\alpha+\gamma))=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Следовательно, $\mathrm{CF}(l_1,\ l_2,\ l_3,l_4)\in\mathbf{CF}_1$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Для $i=2,\ldots,10$ рассуждения аналогичны. □

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим для каждого $i=1,\ldots,10$ через $\overline{\mathbf{CF}}_i$ образ $\mathbf{CF}_i$ при действии группы $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$:

$$\overline{\mathbf{CF}}_i=\{\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathfrak{A}_3\,|\,\exists X\in\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}):\ X(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4))\in\mathbf{CF}_i\}.$$

Лемма 6.1. *Для дроби* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathfrak{A}_3$ *выполняется* условие (i) *теоремы 1 тогда и только тогда, когда* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ *принадлежит классу* $\overline{\mathbf{CF}}_i$, *где* $i\in\{1,2,\ldots,10\}$.

Доказательство. Для любого $X\in\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ гиперболичность оператора $A\in\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ равносильна гиперболичности оператора XAX^{-1}. При этом собственные подпространства гиперболического оператора однозначно восстанавливаются по любому его собственному вектору. Остается воспользоваться определением эквивалентности из параграфа 1. □

Теорему 1 при помощи леммы 6.1 можно переформулировать следующим образом: *дробь* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathfrak{A}_3$ *имеет собственную симметрию G* *тогда и только тогда, когда она принадлежит одному из классов* $\overline{\mathbf{CF}}_i$, *где* $i \in \{1,2,\ldots,10\}$.

Доказательство теоремы 1. Если $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ принадлежит какому-то $\overline{\mathbf{CF}}_i$, то по лемме 5.1 она имеет собственную симметрию G, ибо действие оператора из $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ сохраняет свойство существования у алгебраической цепной дроби собственной симметрии.

Обратно, пусть дробь $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathfrak{A}_3$ имеет собственную симметрию G. Положим $F = G'$ и рассмотрим точки $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ из леммы 4.1. Обозначим также через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ стандартный базис $\mathbb{R}^4$. Для точек $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ выполняется хотя бы одно из утверждений (1)–(11) леммы 4.1.

Пусть выполняется утверждение (1) леммы 4.1. Рассмотрим такой оператор $X_1 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_1\left(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{z}_3,\frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)\right) = \\ = (\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1).$$

Тогда $X_1(\mathbf{z}_4) = X_1\left(4\cdot\frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)-\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2-\mathbf{z}_3\right) = \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$ и $X_1GX_1^{-1} = G_1$, так как по лемме 4.1

$$X_1GX_1^{-1}(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3) = \\ = (\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4).$$

Стало быть, $X_1(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)) \in \mathbf{CF}_1$, т.е. $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\mathbf{CF}}_1$.

Рассуждения аналогичны для случаев, когда выполняется утверждение (i) леммы 4.1, где $i = 2,\ldots,10$.

Если выполняется утверждение (11) леммы 4.1, то, как и при выполнении утверждения (2) леммы 4.1, вновь $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\mathbf{CF}}_2$. Действительно, пусть выполняется утверждение (11) леммы 4.1. Рассмотрим такой оператор $X_{11} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_{11}\left(\mathbf{z}_1,\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2),\mathbf{z}_3,\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)\right) = \\ = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_4).$$

Тогда $X_{11}(\mathbf{z}_2) = X_{11}\left(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2)-\mathbf{z}_1\right) = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_4$, $X_{11}(\mathbf{z}_4) = X_{11}\left(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)-\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2-\mathbf{z}_3\right) = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$ и $X_{11}GX_{11}^{-1} = G_2$, так как по лемме 4.1

$$X_{11}GX_{11}^{-1}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3) = \\ = (\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_4).$$

Стало быть, $X_{11}(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)) \in \mathbf{CF}_2$, т.е. $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\mathbf{CF}}_2$. □

7. ПРИМЕР ПАЛИНДРОМИЧНОЙ ЦЕПНОЙ ДРОБИ, НЕ ОБЛАДАЮЩЕЙ СОБСТВЕННЫМИ ЦИКЛИЧЕСКИМИ СИММЕТРИЯМИ

Рассмотрим вещественные числа $\theta_1 = \sqrt{4+\sqrt{2}}$ и $\theta_2 = \sqrt{4-\sqrt{2}}$. Заметим, что $\theta_1^2 = 4+\sqrt{2}$, а значит θ_1 является корнем уравнения $x^4-8x^2+14 = 0$. В силу критерия Эйзенштейна для $p = 2$ многочлен $f(x) = x^4-8x^2+14$ неприводим над $\mathbb{Q}$. Таким образом, $f(x)$ – минимальный многочлен для θ_1 и

$$f(x) = (x-\theta_1)(x-\theta_2)(x+\theta_1)(x+\theta_2).$$

Рассмотрим такие вложения σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 вполне вещественного поля $\mathbb{Q}(\theta_1)$, что $\sigma_1(\theta_1) = \theta_1$, $\sigma_2(\theta_1) = \theta_2$, $\sigma_3(\theta_1) = -\theta_1$, $\sigma_4(\theta_1) = -\theta_2$. Пусть $K_1 = \mathbb{Q}(\theta_1)$, $K_2 = \mathbb{Q}(\theta_2)$, $K_3 = \mathbb{Q}(-\theta_1)$, $K_4 = \mathbb{Q}(-\theta_2)$ – сопряженные поля над $\mathbb{Q}$. Ясно, что $K_1 = K_3$, $K_2 = K_4$ и $\sigma_3^2 = \mathrm{id}$, $\sigma_4 = \sigma_2\sigma_3$.

Предположим, что $K_1 = K_2$. Поскольку $(x-\theta_1)(x+\theta_1) = x^2-4-\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$, то K_1 – нормальное расширение степени 2 поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. При этом $(x-\theta_2)(x+\theta_2) = x^2-4+\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$. Пусть $\phi \in \mathrm{Gal}(K_1/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$. Тогда $\phi(\theta_1\theta_2) = (-\theta_1)(-\theta_2) = \theta_1\theta_2$, а значит $\theta_1\theta_2 = \sqrt{14} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, чего не может быть. Таким образом, $K_1 \neq K_2$.

Поскольку $\theta = \theta_1$ – примитивный элемент расширения K_1, то набор чисел $1, \theta, \theta^2, \theta^3$ является базисом K_1. Положим $\omega = \theta+\theta^2$ и $\psi = -\theta^2+\frac{1}{2}\theta^3$. Тогда $\omega'' = \sigma_3(\omega) = -\theta+\theta^2$, $\psi'' = \sigma_3(\psi) = -\theta^2-\frac{1}{2}\theta^3$. Заметим, что $\psi+\psi'' = -2\theta^2 = -(\omega+\omega'')$ и набор чисел 1, ω, ψ, ω'' является базисом K_1, поскольку

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \psi \\ \omega'' \end{pmatrix}.$$

Теперь, полагая, что $\alpha = \omega$, $\beta = \psi$, $\gamma = \omega''$, с помощью предложения 1 можно построить алгебраическую цепную дробь $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \widetilde{\mathfrak{A}}_3$, где подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta, \gamma)$. Поскольку выполняется утверждение (1) теоремы 1, то $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ – палиндромичная цепная дробь. При этом, поскольку $K_1 \neq K_2$, то $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ не обладает циклическими симметриями (см. работу [11]).

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит О.Н. Германа за внимание к работе и полезные обсуждения результатов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00079.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Klein F.* Uber eine geometrische Auffassung der gewohnlichen Kettenbruchentwichlung // Nachr. Ges. Wiss., Gottingen. 1895. V. 3. P. 357–359.
2. *Коркина Е.И.* Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры // Тр. МИАН. 1995. Т. 209. С. 143–166.
3. *German O.N.* Klein polyhedra and lattices with positive norm minima // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 2007. V. 19. P. 157–190.
4. *Karpenkov O.N.* Geometry of Continued Fractions. Springer-Verlag, Algorithms and Computation in Mathematics, 2013. V. 26.
5. *Герман О.Н., Тлюстангелов И.А.* Симметрии двумерной цепной дроби // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 4. С. 53–68.
6. *German O.N., Tlyustangelov I.A.* Palindromes and periodic continued fractions // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2016. V. 6. № 2–3. P. 354–373.
7. *Galois É.* Demonstration d'un theoreme sur les fractions continues periodiques Annales de Mathematiques. 1828. V. 19. P. 294–301.
8. *Legendre A.M.* Theorie des nombres. (3 ed.) Paris 1830.
9. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. (3 Aufl.). Teubner, 1954.
10. *Kraitchik M.* Theorie des nombres. Tome II. Paris. 1926.
11. *Тлюстангелов И.А.* Собственные циклические симметрии многомерных цепных дробей // Матем. сб. 2022. Т. 213. № 9. С. 138–166.

PROPER SYMMETRIES OF 3-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS

I. A. Tlyustangelov[a,b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, Russian Federation*
[b] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

In this work we prove a criterion for an algebraic continued fraction to have a proper palindromic symmetry in dimension 4. As a multidimensional generalization of continued fractions, we consider Klein polyhedra.

Keywords: Klein polyhedra, algebraic lattices