ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 83–88

МАТЕМАТИКА

УДК 519.217

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИСЧЕЗАЮЩИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© 2022 г. А. И. Зейфман[1,2,3,*], В. Ю. Королев[1,4,5,], Р. В. Разумчик[1,***], Я. А. Сатин[2,****], И. А. Ковалев[2,4,*****]**

Представлено академиком РАН И.А. Соколовым
Поступило 20.01.2022 г.
После доработки 23.05.2022 г.
Принято к публикации 01.07.2022 г.

Рассматриваются неоднородные марковские цепи с непрерывным временем и исчезающими возмущениями. Доказывается, что при некоторых естественных условиях предельные режимы исходной и возмущенной цепей совпадают, получена явная оценка для построения предельного режима возмущенной цепи, а также рассмотрено применение полученных результатов для нескольких классов систем массового обслуживания.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, устойчивость, исчезающие возмущения

DOI: 10.31857/S2686954322050186

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы будем рассматривать неоднородные марковские цепи, интенсивности которых при $t \to \infty$ стремятся к некоторым заранее заданным. Точнее, мы будем предполагать, что инфинитезимальная матрица $\bar{Q}(t)$ представима в виде $\bar{Q}(t) = Q(t) + \hat{Q}(t)$, где $\hat{Q}(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Так что если назвать цепь с матрицей интенсивностей $Q(t)$ исходной, а цепь с матрицей интенсивностей $\bar{Q}(t)$ – возмущенной, то мы будем изучать так называемую ситуацию с исчезающими возмущениями. Такие модели возникают прежде всего в ситуации, когда интенсивности обслуживания и/или поступления требований асимптотически приближаются к некоторым "оптимальным". Подобным цепям посвящено достаточно много работ, начиная с 1970-х годов. Однако круг нерешенных вопросов по-прежнему остается широким (см., например, работы [1–5], результаты которых носят качественный характер). Здесь мы докажем, что при некоторых естественных условиях предельные режимы исходной и возмущенной цепей совпадают, в отличие от предыдущих работ получим явную оценку для построения предельного режима возмущенной цепи, а также рассмотрим применение полученных результатов для нескольких классов систем массового обслуживания.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть $X(t)$, $t \geq 0$, – вообще говоря, неоднородная марковская цепь с непрерывным временем и не более чем счетным пространством состояний $\{0,1,\ldots,S\}$, $0 < S \leq \infty$. Переходные вероятности для $X(t)$ будем обозначать $p_{ij}(s, t) = \Pr\{X(t) = j | X(s) = i\}$, $0 \leq i, j \leq S, 0 \leq s \leq t$. Пусть $p_i(t) = \Pr\{X(t) = i\}$ – вероятность соответствующего состояния цепи, а $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \ldots, p_S(t))^T$ – вектор вероятностей состояний. Предполагается, что

$$\Pr\{X(t+h) = j | X(t) = i\} = \begin{cases} q_{ij}(t)h + \alpha_{ij}(t,h), & \text{при} \quad j \neq i \\ 1 - \sum\limits_{k \neq i} q_{ik}(t)h + \alpha_i(t,h), & \text{при} \quad j = i, \end{cases} \tag{1}$$

[1] Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия
[2] Вологодский государственный университет, Вологда, Вологодская область, Россия
[3] Вологодский научный центр, Вологда, Россия
[4] Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Московский государственный университет, Москва, Россия
[5] Факультет ВМК, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
*E-mail: a_zeifman@mail.ru
**E-mail: victoryukorolev@yandex.ru
***E-mail: rrazumchik@ipiran.ru
****E-mail: yacovi@mail.ru
*****E-mail: kovalev.iv96@yandex.ru

где $q_{ij}(t)$ – локально интегрируемые на полуоси $[0,\infty)$ функции (интенсивности переходов), h – "малое" приращение времени, а все $\alpha_i(t,h)$ есть $o(h)$ равномерно по i, т.е. $\sup_i|\alpha_i(t,h)| = o(h)$.

Положим $a_{ij}(t) = q_{ji}(t)$ при $j \neq i$, $a_{ii}(t) = -\sum_{j\neq i} a_{ji}(t) = -\sum_{j\neq i} q_{ij}(t)$ и введем в рассмотрение матрицу $A(t) = (a_{ij}(t))$, составленную из функций $a_{ij}(t)$. Предполагая, что

$$|a_{ii}(t)| \leq L < \infty$$

почти при всех $t \geq 0$ (т.е. за исключением множества нулевой меры), справедлива прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова, которая может быть записана в виде одного векторного уравнения

$$\frac{d}{dt}p(t) = A(t)p(t), \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Заметим, что $A(t) = Q^T(t)$ – транспонированная инфинитезимальная матрица марковской цепи $X(t)$.

Условимся далее через $\|\cdot\|$ (или $\|\cdot\|_1$) обозначать обычную l_1-норму, т.е. $\|x\| = \sum_i |x_i|$ для любого вектора x, а $\|B(t)\| = \sup_j \sum_i |b_{ij}(t)|$, если $B(t) = (b_{ij}(t))$. Пусть $\Omega = \{x : x_i \geq 0, \|x\| = 1\}$, т.е. множество всех векторов с неотрицательными координатами и единичной l_1-нормой. Поскольку

$$\|A(t)\| = 2\sup_i |a_{ii}(t)| \leq 2L$$

почти при всех $t \geq 0$, то можно использовать соответствующую теорию (см., например, [6]), рассматривая (2) как уравнение в пространстве l_1. В частности, задача Коши для уравнения (2) имеет единственное решение при любом начальном условии, а если $p(s) \in \Omega$, то $p(t) \in \Omega$ при любом $0 \leq s \leq t$ и любом начальном условии $p(s)$. Обозначая $z(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_S(t))^T$, из (2) получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}z(t) = B(t)z(t) + f(t), \tag{3}$$

где $f(t) = (a_{10}(t), a_{20}(t), \ldots, a_{S0}(t))^T$,

$$B(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) - a_{10}(t) & a_{12}(t) - a_{10}(t) & \cdots & a_{1S}(t) - a_{10}(t) \\ a_{21}(t) - a_{20}(t) & a_{22}(t) - a_{10}(t) & \cdots & a_{2S}(t) - a_{20}(t) \\ a_{31}(t) - a_{30}(t) & a_{32}(t) - a_{10}(t) & \cdots & a_{3S}(t) - a_{30}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{S1}(t) - a_{S0}(t) & a_{S2}(t) - a_{S0}(t) & \cdots & a_{SS}(t) - a_{S0}(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $\bar{X}(t)$ – "возмущенная" марковская цепь с тем же пространством состояний, что и $X(t)$, вероятностями состояний $\bar{p}_i(t)$ и транспонированной инфинитезимальной матрицей $\bar{A}(t) = (\bar{a}_{ij}(t))$. Отклонения возмущенных характеристик от исходных условимся обозначать соответственно $\hat{a}_{ij}(t)$ и $\hat{A}(t)$.

Напомним, что марковская цепь $X(t)$ слабо эргодична, если для любой пары векторов $p^*(t)$, $p^{**}(t)$ – решений (2) с различными начальными условиями имеет место $\|p^*(t) - p^{**}(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Пусть $p^*(t)$ и $p^{**}(t)$ – решения (2). Тогда из определения вектора $z(t)$ следуют неравенства

$$\|z^*(t) - z^{**}(t)\| \leq \|p^*(t) - p^{**}(t)\| \leq$$
$$\leq 2\|z^*(t) - z^{**}(t)\|,$$

где $z^*(t)$ и $z^{**}(t)$ – векторы, соответствующие $p^*(t)$ и $p^{**}(t)$.

Далее мы будем рассматривать уравнение (3) не только в пространстве l_1, но и в содержащемся в нем подпространстве

$$\left\{z(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_S(t))^T : \|Dz(t)\|_1 < \infty\right\}$$

(при подходящем линейном операторе D; более подробно см. далее в разделе 3), которое будем обозначать l_{1D}, а норму в нем – через $\|\cdot\|_{1D}$. Тогда, если при некоторых $M > 0$, $a > 0$ и любых начальных условиях $p^*(s)$, $p^{**}(s) \in l_1$ неравенство

$$\|p^*(t) - p^{**}(t)\|_{1D} \leq Me^{-a(t-s)}\|p^*(s) - p^{**}(s)\|_{1D} \tag{4}$$

выполняется для всех $t \geq s \geq 0$, то такую марковскую цепь $X(t)$ будем называть $1D$-экспоненциально эргодичной (см. [7]). Заметим, что если при этом у цепи $X(t)$ есть стационарный (т.е. не зависящий от времени) режим, то она является $1D$-экспоненциально эргодичной. Условия эргодичности, соответствующие оценки скорости сходимости, и связь их с оценками устойчивости изучалась многими авторами (см., например, [5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22]).

3. ОБЩИЕ ОЦЕНКИ

Стандартные подходы для исследования марковских цепей с непрерывным временем описаны в работе [7]. Однако применить их непосредственно в ситуации с исчезающими возмущениями не удается. В этом разделе впервые приводится оценка решений уравнения (3), которая делает дальнейшие исследования возможными. При этом для большей наглядности получаемые результаты сформулированы в явном виде после проведенных оценок.

Рассмотрим соответствующее (3) уравнение для возмущенной цепи

$$\frac{d}{dt}\bar{z}(t) = \bar{B}(t)\bar{z}(t) + \bar{f}(t), \tag{5}$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\bar{z}(t) = B(t)\bar{z}(t) + f(t) + \hat{B}(t)\bar{z}(t) + \hat{f}(t). \tag{6}$$

Если обозначить через $V(t,s)$ оператор Коши уравнения (3), то решения уравнений (3) и (6) могут быть записаны в виде:

$$z(t) = V(t)z(0) + \int_0^t V(t,\tau)f(\tau)d\tau,$$

и

$$\bar{z}(t) = V(t)\bar{z}(0) + \int_0^t V(t,\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t V(t,\tau)\hat{B}(t)\bar{z}(\tau)d\tau + \int_0^t V(t,\tau)\hat{f}(\tau)d\tau.$$

Предполагая $1D$-экспоненциальную эргодичность, получаем $\|V(t,s)\|_{1D} \le Me^{-a(t-s)}$. Вводя обозначение $\hat{z}(t) = \bar{z}(t) - z(t)$, имеем в норме l_{1D} следующую оценку сверху:

$$\|\hat{z}(t)\| \le Me^{-at}\|\hat{z}(0)\| +$$
$$+\int_0^t Me^{-a(t-\tau)}\|\hat{B}(\tau)\|\|\bar{z}(\tau)\|d\tau + \int_0^t Me^{-a(t-\tau)}\|\hat{f}(\tau)\|d\tau. \tag{7}$$

Первое слагаемое, очевидно, стремится к нулю при $t \to \infty$. Для оценки второго и третьего слагаемых будем предполагать выполненными следующие условия:

(A) $\|\hat{B}(t)\|_{1D} \le \chi(t)$, где "возмущение" $\chi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, причем без ограничения общности можно предполагать, что функция χ непрерывна, ограничена и убывает монотонно;

(B) $\|\hat{f}(t)\|_{1D} \le \chi(t)$.

З а м е ч а н и е. Отметим, что при сделанном дополнительном предположении о монотонности возмущений сходимость интеграла от нормы возмущения по промежутку от нуля до бесконечности (этот случай изучался, например, в работах [5, 8]) является более сильным условием, чем стремление к нулю.

Положим для сокращения записи $\chi(0) = \varepsilon_0$. Отметим, что без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon_0 < a$, в противном случае можно взять начальный момент времени $t_0 > 0$.

Для оценки нормы решения возмущенного уравнения обозначим оператор Коши этого уравнения через $\bar{V}(t,s)$. Тогда в норме $1D$ имеют место неравенства

$$\|\bar{V}(t,s)\| \le Me^{-(a-\varepsilon_0)(t-s)}.$$

Далее, записывая решение уравнения (6) в виде

$$\bar{z}(t) = \bar{V}(t)\bar{z}(0) + \int_0^t \bar{V}(t,\tau)\bar{f}(\tau)d\tau,$$

и предполагая, что $\|f(t)\|_{1D} \le F$ (при некотором $0 < F < \infty$) почти при всех $t \ge 0$, получаем в норме $1D$ неравенство

$$\|\bar{z}(t)\| \le Me^{-(a-\varepsilon_0)t}\|\bar{z}(0)\| + \frac{M(F+\varepsilon_0)}{a-\varepsilon_0}. \tag{8}$$

Выберем произвольно $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ и момент времени t_* так, чтобы $\chi(t_*) = \varepsilon$. Поскольку

$$\int_0^t e^{-a(t-\tau)}\chi(\tau)d\tau \le e^{-a(t-t_*)}\frac{\varepsilon_0}{a} + \frac{\varepsilon}{a},$$

то из (7) и (8) следует искомая оценка:

$$\|\hat{z}(t)\| \le Me^{-at}\|\hat{z}(0)\| +$$
$$+M\left(e^{-a(t-t_*)}\frac{\varepsilon_0}{a} + \frac{\varepsilon}{a}\right)\left(1 + M\|\bar{z}(0)\| + \frac{M(F+\varepsilon_0)}{a-\varepsilon_0}\right). \tag{9}$$

Неравенство (9), с учетом произвольности ε, гарантирует стремление к нулю нормы возмущения при $t \to \infty$ и дает оценку скорости этого стремления.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. *Пусть марковская цепь $X(t)$ является $1D$-экспоненциально эргодичной в некотором подпространстве $l_{1D} \subset l_1$, а для возмущенной цепи $\bar{X}(t)$ норма возмущения стремится к нулю при $t \to \infty$ так, что выполнены условия* (*A*) *и* (*B*). *Тогда цепь $\bar{X}(t)$ слабо эргодична, имеет тот же предельный режим и справедлива оценка* (9).

С л е д с т в и е 1. *Пусть при выполнении условий Теоремы* 1 *интенсивности исходной цепи $X(t)$ являются* 1-*периодическими. Тогда предельный режим возмущенной цепи $\bar{X}(t)$ также* 1-*периодичен.*

Следствие 2. *Пусть при выполнении условий Теоремы 1 интенсивности исходной цепи $X(t)$ являются пропорциональными, т.е. все $q_{ij}(t) = \vartheta(t) q_{ij}$. Тогда и невозмущенная цепь $X(t)$ и возмущенная цепь $\bar{X}(t)$ сильно эргодичны и имеют одинаковые стационарные распределения.*

4. ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК ДЛЯ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

При анализе моделей систем массового обслуживания для получения конкретных значений, входящих в оценку (9), основную роль играет неравенство (4). Здесь сравнительно простым и весьма удобным методом является метод, основанный на логарифмической норме линейной операторной функции (см. [6, 9, 10]). Если матрица линейной системы $K(t) = (k_{i,j}(t))$ является существенно неотрицательной (т.е. неотрицательны все ее внедиагональные элементы), то ее логарифмическая норма $\gamma(K(t))$ вычисляется по формуле $\gamma(K(t)) = \sup_j \sum_i k_{i,j}(t)$. При этом для соответствующего оператора Коши справедлива оценка $\|V(t,s)\| \le e^{\int_s^t \gamma(K(\tau))d\tau}$.

Если же матрица $K(t)$ не является существенно неотрицательной, то чаще всего действовать приходится следующим образом. Рассмотрим матрицу вида

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \cdots & d_1 & \cdots \\ 0 & d_2 & d_2 & \cdots & d_2 & \cdots \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & d_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{11}$$

и соответствующую (3) однородную систему

$$\frac{d}{dt} z(t) = B(t) z(t). \tag{12}$$

Полагая $w(t) = Dz(t)$, приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt} w(t) = B^*(t) w(t), \tag{13}$$

где $B^*(t) = DB(t)D^{-1}$, в отличие от $B(t)$, для широкого класса моделей систем массового обслуживания уже можно сделать существенно неотрицательной за счет подбора отделенной от нуля "весовой" последовательности $\{d_i, i \ge 1\}$ (что гарантирует выполнение условия $l_{1D} \subset l_1$). Отметим, что если $B^*(t)$ может быть сделана существенно неотрицательной, то дальше основная сложность оказывается связанной с выбором такой "весовой" последовательности, что дает точные оценки скорости сходимости (см. [10]). Заметим, что именно точные оценки скорости сходимости соответствуют наиболее точным оценкам устойчивости [22].

Опишем теперь соответствующие построения для некоторых классических моделей.

Начнем с модели Эрланга, описывающей систему с потерями $M_t/M_t/N/N$, см. [1, 2, 5, 7, 10]. В этом случае число требований $X(t)$ в системе описывается процессом рождения и гибели с конечным числом состояний, т.е. интенсивности переходов имеют вид: $q_{ij}(t) = 0$ при всех $t \ge 0$, если $|i-j| > 1$, а $q_{i,i+1}(t) = \lambda(t)$ и $q_{i+1,i}(t) = i\mu(t)$, $i = 0, \ldots, N-1$. Как известно, для слабой эргодичности процесса $X(t)$ необходимо и достаточно, чтобы $\int_0^\infty (\lambda(t) + \mu(t))\,dt = +\infty$. Рассмотрим для определенности случай существенной интенсивности обслуживания. Матрица преобразования в этом случае конечна. Положим $d_i = 1$, $i \ge 1$. Тогда соответствующая логарифмическая норма оказывается равной $-\mu(t)$ и, значит, $\|V(t,s)\|_{1D} \le e^{-\int_s^t \mu(\tau)d\tau}$. Если, в частности, интенсивность обслуживания $\mu(t)$ является 1-периодической функцией времени, то фигурирующие в оценке (4) параметры оцениваются следующим образом: $a = \int_0^1 \mu(t)\,dt$; $M \le e^a$.

Рассмотрим теперь нестационарную модель обслуживания с неограниченным числом мест ожидания и S серверами $M_t/M_t/S$, (см., например, [12, 16]) с интенсивностями поступления требований $\lambda_k(t) = \lambda(t)$ и обслуживания $\mu_k(t) = \mu(t)\min(k, S)$. Как известно (см. [16]), процесс, описывающий число требований $X(t)$ в системе, является слабо эргодичным, если найдется $d > 1$ такое, что $\int_0^\infty (S\mu(t) - d\lambda(t))\,dt = +\infty$. Пусть $S = 2$ (этот случай, в отличие от случая $S = 1$, является более сложным; см., например, [9]). Положим в (11) $d_i = d^{i-1}$, $i \ge 1$, где $d \in (1,2]$, получаем для логарифмической нормы $\gamma(B^*(t))$ оценку $\gamma(B^*(t)) \le \left(1 - \frac{1}{d}\right)(2\mu(t) - d\lambda(t))$. В случае 1-периодических интенсивностей оценка (4) выполнена при $a = \left(1 - \frac{1}{d}\right)\int_0^1 (2\mu(t) - d\lambda(t))\,dt$, и соответствующем значении M.

Интересно отметить, что такая же "весовая" последовательность $\{d_i = d^{i-1}, i \ge 1\}$ позволяет исследовать совершенно другую модель системы с неординарным входящим потоком, управляющим размером очереди (см., например, [15, 17, 23]). Несмотря на сложную структуру инфинитезимальной матрицы интенсивностей, имеющей вид

$$Q(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & \lambda(t)b_1 & \lambda(t)b_2 & \cdots \\ \mu(t) & -\left(\lambda(t)\sum_{i=2}^{\infty} b_i + \mu(t)\right) & \lambda(t)b_2 & \cdots \\ 0 & \mu(t) & -\left(\lambda(t)\sum_{i=3}^{\infty} b_i + \mu(t)\right) & \cdots \\ 0 & 0 & \mu(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

при экспоненциальном убывании вероятностей b_i поступления группы требований размера i (т.е. при $b_i \le Cq^i$) слабая эргодичность гарантируется с оценкой логарифмической нормы $\gamma(B^*(t)) \le \left(1 - \frac{1}{d}\right)\mu(t)$ для $d \in \left(1, \frac{1}{q}\right)$. Тогда при 1-периодической интенсивности обслуживания оценка (4) выполнена при $a = \left(1 - \frac{1}{d}\right)\int_0^1 \mu(t)\,dt$ и соответствующем значении M.

Отметим, что с помощью аналогичных преобразований (с существенно более сложным выбором весовой последовательности) и метода логарифмической нормы удается получить явные оценки скорости сходимости, а следовательно, и оценки в случае исчезающих возмущений для других классов марковских нестационарных систем обслуживания, в том числе для моделей типа $M_t^x/M_t^x/1$ (см. [7, 20]), систем обслуживания с катастрофами (см. [9]), систем с поглощением в нуле (см. [13]), систем с групповым поступлением и обслуживанием требований и управлением, зависящим от состояния (см. [9, 14]).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке проекта № 075-15-2020-799 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gnedenko D.B.* On a Generalization of Erlang Formulae // Zastosow. Mat. 1971. V. 12. P. 239–242.
2. *Gnedenko B., Soloviev A.* On the conditions of the existence of final probabilities for a Markov process // Math. Operationsforsh. Statist. 1973. P. 379–390.
3. *Liu J., Pare P.E., Nedic A., Tang C.Y., Beck C.L., Basar T.* Analysis and control of a continuous-time bi-virus model // IEEE Transactions on Automatic Control. 2019. V. 64. № 12. P. 4891–4906.
4. *Pare P.E., Liu J., Beck C.L., Nedic A., Basar T.* Multi-competitive viruses over time-varying networks with mutations and human awareness // Automatica. 2021. V. 123. Art. ID 109330.
5. *Zeifman A.I., Isaacson D.L.* On strong ergodicity for nonhomogeneous continuous-time Markov chains // Stochastic processes and their applications. 1994. V. 50. № 2. P. 263–273.
6. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
7. *Zeifman A., Korolev V., Satin Y.* Two approaches to the construction of perturbation bounds for continuous-time Markov chains // Mathematics. 2020. V. 8. № 2. Art. ID 253.
8. *Abramov V., Liptser R.* On existence of limiting distribution for time-nonhomogeneous countable Markov process // Queueing Syst. 2004. V. 46. № 3. P. 353–361.
9. *Zeifman A., Satin Y., Kovalev I., Razumchik R., Korolev V.* Facilitating numerical solutions of inhomogeneous continuous time Markov chains using ergodicity bounds obtained with logarithmic norm method. Mathematics 2021. V. 9(1). P. 42. https://doi.org/10.3390/math9010042
10. *Ван Доорн Э., Зейфман А.И., Панфилова Т.Л.* “Оценки и асимптотика скорости сходимости для процессов рождения и гибели”, Теория вероятн. и ее примен. 2009. Т. 54. С. 1.
11. *Fricker C., Robert P., Tibi D.* On the rates of convergence of Erlang’s model. J. Appl. Probab. 1999. V. 36. P. 1167–1184.
12. *Агаларов Я.М.* Оптимальное пороговое управление доступом в системе $M/M/s$ с неоднородными приборами и общим накопителем // Информатика и ее применения. 2021. Т. 15. № 1. С. 57–64.
13. *Caswell H.* Perturbation analysis of continuous-time absorbing Markov chains // Numerical Linear Algebra with Applications. 2011. V. 18. № 6. P. 901–917.
14. *Chen A., Wu X., Zhang J.* Markovian bulk-arrival and bulk-service queues with general state-dependent control. Queueing Syst. 2020. V. 95. P. 331–378. https://doi.org/10.1007/s11134-020-09660-0

15. *Zeifman A.I., Razumchik R.V., Satin Y.A., Kovalev I.A.* Ergodicity bounds for the Markovian queue with time-varying transition intensities, batch arrivals and one queue skipping policy. Applied Mathematics and Computation. 2021. V. 395, 125846.
16. *Zeifman A.I.* Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes. Stochastic processes and their applications. 1995. V. 59 (1). P. 157–173.
17. *Marin A., Rossi S.* A queueing model that works only on the biggest jobs. In European Workshop on Performance Engineering. Springer, Cham, 2019. P. 118–132.
18. *Веретенников А.Ю., Веретенникова М.А.* О скорости сходимости для однородных цепей Маркова. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. V. 490 (1). P. 16–19.
19. *Heidergott B., Leahu H., Löpker A., Pflug G.* Perturbation analysis of inhomogeneous finite Markov chains. Advances in Applied Probability. 2016. V. 48. № 1. P. 255–273.
20. *Nelson R., Towsley D., Tantawi A.N.* Performance analysis of parallel processing systems. IEEE Transactions on software engineering. 1988. V. 14 (4). P. 532–540.
21. *Mitrophanov A.Y.* Sensitivity and convergence of uniformly ergodic Markov chains. Journal of Applied Probability. 2005. V. 42 (4). P. 1003–1014.
22. *Mitrophanov A.Y.* Connection between the rate of convergence to stationarity and stability to perturbations for stochastic and deterministic systems. In Proceedings of the 38th International Conference Dynamics Days Europe (DDE 2018), Loughborough, UK, 2018. P. 3–7.
23. *Матюшенко С.И., Разумчик Р.В.* Стационарные характеристики системы Geo/G/1 с неординарным входящим потоком, управляющим размером очереди, Информ. и ее примен. 2020. Т. 14:4. С. 25–32.

LIMITING CHARACTERISTICS OF QUEUEING SYSTEMS WITH VANISHING PERTURBATIONS

A. I. Zeifman[a,b,c], V. Y. Korolev[a,d,e], R. V. Razumchik[a], Y. A. Satin[c], and I. A. Kovalev[c,d]

[a] *Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[b] *Vologda State University, Vologda, Vologda region, Russian Federation*
[c] *Vologda science center, Vologda, Russian Federation*
[d] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, MSU, Moscow, Russian Federation*
[e] *Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Sokolov

We consider inhomogeneous continuous-time Markov chains with vanishing perturbations. It is proved that under some natural conditions limiting regimes of the initial and perturbed chains coincide. We obtain explicit estimates, which allow construction of the limiting regime of the perturbed chain, and show how these results may be useful in the analysis of several known classes of queuing systems.

Keywords: queuing systems, perturbations, vanishing perturbations