ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 9–15

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.3+517.956.4

О ПАРАБОЛИЧЕСКОМ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ 2-ГО ПОРЯДКА ВОЗМУЩЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ 1-ГО ПОРЯДКА

© 2022 г. А. А. Злотник[1,2,*], академик РАН Б. Н. Четверушкин[2,]**

Поступило 21.05.2022 г.
После доработки 14.06.2022 г.
Принято к публикации 18.08.2022 г.

Изучаются задачи Коши для симметричной гиперболической системы уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами и ее сингулярных возмущений – сильно параболической и гиперболической 2-го порядка систем уравнений с малым параметром $\tau > 0$ при вторых производных по x и t. Формулируются свойства решений всех трех систем и даются оценки разности решений исходной системы и систем с возмущениями порядка $O(\tau^{\alpha/2})$ при начальной функции $\mathbf{w}_0$ гладкости α в смысле $L^2(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha \le 2$. При $\alpha = 1/2$ охватывается широкий класс разрывных $\mathbf{w}_0$. Дается приложение к линеаризованным системе уравнений газовой динамики и параболической и гиперболической 2-го порядка квазигазодинамическим системам уравнений.

Ключевые слова: линейные системы уравнений в частных производных, малый параметр, оценки разности решений, квазигазодинамические системы уравнений

DOI: 10.31857/S2686954322050198

В данном сообщении изучаются задачи Коши для n-мерной симметричной гиперболической системы уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами и ее сингулярных возмущений – сильно параболической и гиперболической 2-го порядка систем уравнений с малым параметром $\tau > 0$ при вторых производных по x и t. Возмущения со вторыми производными по x имеют дивергентный вид и содержат матрицы с переменными коэффициентами. Подобные возмущения много лет применяются на практике при построении сеточных методов решения квазилинейной системы уравнений газовой динамики [1–3]. Существует много иных приложений анализа подобных возмущений, см. в том числе [4–6] и цитированную там литературу.

Формулируются результаты о слабых и сильных решениях исходной системы и систем с возмущениями, в том числе равномерные по τ оценки слабых решений последних систем. Они дополняют известные, и при их выводе используются в том числе методы из [6–10]. Для разностей $\mathbf{r}_\tau$ решений исходной системы и систем с возмущениями выводятся оценки порядка $O(\tau^{\alpha/2})$, $0 < \alpha \le 2$, в том числе в норме $C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$, при начальных данных $\mathbf{w}_0$ и свободном члене $\mathbf{f}$ из соответствующих пространств Соболева и Никольского гладкости порядка α по x (для $\mathbf{f}$ также порядка $\alpha/2$ по t для гиперболического возмущения). При $\alpha = 1/2$ охватывается широкий класс разрывных функций $\mathbf{w}_0$, что важно для приложений.

Приводятся также оценки производных любого порядка по x для решений всех рассматриваемых систем и разностей $\mathbf{r}_\tau$ порядка $O(\tau^{\alpha/2})$, $0 < \alpha \le 2$ в случае, когда коэффициенты систем не зависят от x.

Описывается приложение результатов к линеаризованным на постоянном решении системе уравнений газовой динамики и ее возмущениям – параболической и гиперболической 2-го порядка квазигазодинамическим (КГД) системам уравнений [11, 12].

Введем гильбертовы пространство Лебега $L^2(\mathbb{R}^n) = H^0(\mathbb{R}^n)$ и Соболева $H^1(\mathbb{R}^n)$, $H^2(\mathbb{R}^n)$ (все пространства считаем вещественными) со скалярными произведениями $(v,w)_{H^l(\mathbb{R}^n)} = \sum_{0\le k\le l} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^k v \cdot \nabla^k w dx$, $l = 0,1,2$. Здесь $\nabla = (\partial_1,\ldots\partial_n)$, а $\nabla^2 = \{\partial_i\partial_j\}_{i,j=1}^n$ –

[1] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
[2] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: azlotnik@hse.ru*
***E-mail: office@keldysh.ru*

матрица вторых производных по x, $n \geq 1$, и символ $\cdot$ обозначает скалярное произведение векторов или матриц (если не указано иное).

Будем использовать пространство Соболева $H^1(\Pi_T)$, $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0,T)$ – слой, и обозначим через $L^{2,q}(\Pi_T)$ и $W_{2,q}^{l,0}(\Pi_T)$, $W_{2,q}^{l,1}(\Pi_T)$ с $1 \leq q \leq \infty$, $l = 1$, 2 анизотропные пространства Лебега и Соболева с нормами $\|v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} = \left\|\|v(x,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(0,T)}$ и

$$\|v\|_{W_{2,q}^{1,0}(\Pi_T)} = \|\{v, \nabla v\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \equiv \|v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} + \|\nabla v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)},$$

$$\|v\|_{W_{2,q}^{2,0}(\Pi_T)} = \|\{v, \nabla v, \nabla^2 v\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)},$$
$$\|v\|_{W_{2,q}^{l,1}(\Pi_T)} = \|v\|_{W_{2,q}^{l,0}(\Pi_T)} + \|\partial_t v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}.$$

Пусть $V_2(\Pi_T)$ – пространство функций $v \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$ с $\nabla v \in L^2(\Pi_T)$ [8, 9], а $C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$ состоит из непрерывных функций v: $[0,T] \to L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\|v\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} = \max\limits_{0\leq t\leq T}\|v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Введем произведения $(\mathbf{v},\mathbf{w})_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}dx$, $(\mathbf{v},\mathbf{w})_{\Pi_T} = \int_{\Pi_T}\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}dxdt$ для вектор-функций $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ таких, что $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ или $L^1(\Pi_T)$ соответственно. Ниже все векторы и вектор-функции считаем столбцами, а операторы ∇^l, ∂_t^l, $l = 1, 2$ применяются к вектор- и матрицам-функциям поэлементно. Если не указано противное, то лебеговы нормы вектор-функций $\mathbf{v}$, $\nabla\mathbf{v}$ и квадратных матриц-функций A вводятся как нормы в этих пространствах от евклидовых норм $|\mathbf{v}|$, $(|\partial_1\mathbf{v}|^2 + \ldots + |\partial_n\mathbf{v}|^2)^{1/2}$ и спектральной нормы $\|A\|$. Далее, лебеговы нормы $\nabla^2\mathbf{v}$ и ∇A, $\nabla^2 A$ понимаются как суммы норм соответствующих частных производных $\mathbf{v}$ и A. Для составных прямоугольных матриц-функций и их производных суммируются соответствующие нормы составляющих квадратных матриц.

Введем задачу Коши для симметричной гиперболической системы 1-го порядка

$$\mathcal{H}\mathbf{w} := \partial_t\mathbf{w} + B_i\partial_i\mathbf{w} + C\mathbf{w} = \mathbf{f} \text{ в } \Pi_T,\quad \mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0 \text{ в } \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{w}(x,t)$, $\mathbf{f}(x,t)$: $\Pi_T \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w}_0(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – искомая и заданные вектор-функции, а $B_i(x, t) = B_i^T(x,t)$, $i = \overline{1,n}$, $C(x,t)$ – коэффициенты-матрицы-функции порядка m. Предполагается суммирование по повторяющимся индексам i, $j = \overline{1,n}$.

Пусть выполнены условия

$$\mathbf{B}, \operatorname{div}\mathbf{B}, C \in L^\infty(\Pi_T),\quad \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T),\quad \mathbf{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

где $\mathbf{B} = (B_1,\ldots,B_n)$ – составная матрица старших коэффициентов размеров $m \times mn$ и $\operatorname{div}\mathbf{B} := \partial_i B_i$. Здесь и ниже принадлежность матриц- и вектор-функций какому-либо пространству означает, что всех их элементы принадлежат этому пространству. Для упрощения условия на коэффициенты и их производные формулируются в основном в терминах $L^\infty(\Pi_T)$.

Слабым решением задачи Коши (1) назовем функцию $\mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(\mathbf{w}, \mathcal{H}^*\boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} = \ell(\mathbf{w}_0, \mathbf{f}; \boldsymbol{\varphi}) := (\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)_{\mathbb{R}^n} + (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T}$$
$$\forall\boldsymbol{\varphi} \in W_{2,1}^{1,1}(\Pi_T),\quad \boldsymbol{\varphi}|_{t=T} = 0.$$

Здесь и ниже $\mathcal{H}^*\boldsymbol{\varphi} = -\partial_t\boldsymbol{\varphi} - B_i\partial_i\boldsymbol{\varphi} - (\operatorname{div}\mathbf{B} - C^T)\boldsymbol{\varphi}$ определяет сопряженный по Лагранжу к $\mathcal{H}$ оператор, а $\boldsymbol{\varphi}(x,t)$: $\Pi_T \to \mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{\varphi}_0 := \boldsymbol{\varphi}|_{t=0}$.

Сильным решением этой задачи Коши назовем функцию $\mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, имеющую $\nabla\mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, $\partial_t\mathbf{w} \in L^{2,1}(\Pi_T)$ и удовлетворяющую уравнению в (1) в $L^{2,1}(\Pi_T)$ и начальному условию $\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0$ в $C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$.

Ниже используются условия типа $\|\mathbf{B}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leq N$, где $N \geq 1$ – параметр, и для краткости в них всегда автоматически подразумевается, что $\mathbf{B} \in L^\infty(\Pi_T)$. Возникают постоянные $C(N,T) \geq 0$, $C_1(N,T) \geq 0$, ..., неубывающие по N, T, причем разные постоянные могут обозначаться одинаково. Пусть I_m – единичная матрица порядка m.

Т е о р е м а 1. *1. а) Пусть выполнены условия* (2) *и* $0.5\operatorname{div}\mathbf{B} - C \leq c_0 I_m$ *почти всюду* (*п.в.*) *в* Π_T *с постоянной* $c_0 \geq 0$ (*например*, $c_0 = \|0.5\operatorname{div}\mathbf{B} - C\|_{L^\infty(\Pi_T)}$). *Тогда существует слабое решение* $\mathbf{w}$ *задачи Коши* (1) *и для него верна оценка*

$$\|\mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} \leq e^{c_0 T}(\|\mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}).$$

б) *Более того, если* $\nabla\mathbf{B} \in L^\infty(\Pi_T)$, $\lim_{\xi\to 0}\int_0^T\|\Delta_\xi C\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}dt = 0$, *где* $\Delta_\xi C(x,t) := C(x+\xi,t) - C(x,t)$, *то слабое решение единственно. Оно также обладает свойством* $\mathbf{w} \in C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$ *и поэтому в указанной оценке* $\|\mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} = \|\mathbf{w}\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}$.

2. *Пусть* $\|\{\mathbf{B}, C, \nabla\mathbf{B}, \nabla C\}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leq N$ *и* $\mathbf{f}$, $\nabla\mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$. *Тогда слабое решение* $\mathbf{w}$ *является сильным решением*, *оно единственно и для него верна оценка*

$$\|\nabla \mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \|\partial_t \mathbf{w}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} \le$$
$$\le C_1(N,T)(\|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{1,0}_{2,1}(\Pi_T)}).$$

Если также $\mathbf{f} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ *при некотором* $1 \le q \le \infty$, *то* $\partial_t \mathbf{w} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ *и*

$$\|\partial_t \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \le C_2(N,T)(\|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} +$$
$$+ \|\mathbf{f}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} + \|\nabla \mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}).$$

3. а) *Пусть дополнительно* $\|\{\nabla^2 \mathbf{B}, \nabla^2 C\}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \le N$ и $\nabla^2 \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$. *Тогда для сильного решения* $\mathbf{w}$ *существуют* $\nabla^2 \mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, $\partial_t \nabla \mathbf{w} \in L^{2,1}(\Pi_T)$ *и*

$$\|\nabla^2 \mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \|\partial_t \nabla \mathbf{w}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} \le$$
$$\le C_3(N,T)(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)}).$$

б) *Если также* $\|\{\partial_t \mathbf{B}, \partial_t C\}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \le N$ *и* $\mathbf{f}$, $\nabla \mathbf{f}, \partial_t \mathbf{f} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ *при некотором* $1 \le q \le \infty$, *то дополнительно существует* $\partial_t^2 \mathbf{w} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ *и*

$$\|\partial_t^2 \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \le C_4(N,T)(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} +$$
$$+ \|\mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)} + \|\{\mathbf{f}, \nabla \mathbf{f}, \partial_t \mathbf{f}\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}).$$

Введем теперь задачу Коши для параболической системы уравнений 2-го порядка – возмущения системы в (1) с малым параметром $0 < \tau \le \bar{\tau}$ при вторых производных по x:

$$\mathcal{P}_\tau \mathbf{y} := \mathcal{H}\mathbf{y} - \tau \partial_i (A_{ij} \partial_j \mathbf{y}) = \mathbf{f}_\tau + \tau \partial_i \mathbf{g}_{i\tau} \quad \text{в} \quad \Pi_T,$$
$$\mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{0\tau} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{y}(x,t)$, $\mathbf{f}_\tau(x,t)$, $\mathbf{g}_{i\tau}(x,t)$: $\Pi_T \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_{0\tau}(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – искомая и заданные вектор-функции, $A_{ij} \in L^\infty(\Pi_T)$ – коэффициенты-матрицы-функции порядка m, а $i, j = \overline{1,n}$.

Следуя [9, гл. V, § 1], будем предполагать, что выполнено условие

$$\nu \|\nabla \mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \mu \|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le (A_{ij} \partial_j \mathbf{v}, \partial_i \mathbf{v})_{\mathbb{R}^n}$$
$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{п.в. в} \quad (0,T) \tag{4}$$

с некоторыми постоянными $\nu > 0$ и $\mu \ge 0$. Оно шире, чем алгебраическое условие $\nu|\mathbf{w}|^2 \le (A(x,t)\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}$ для всех $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{mn}$ п.в. в Π_T с блочной матрицей $A := \{A_{ij}\}_{i,j=1}^n$.

Пусть выполнены условия

$$B_i, C, A_{ij} \in L^\infty(\Pi_T), \quad i, j = \overline{1,n},$$
$$\mathbf{f}_\tau \in L^{2,1}(\Pi_T), \quad \mathbf{y}_{0\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n) \tag{5}$$

и $\mathbf{g}_\tau := (\mathbf{g}_{1\tau}, \ldots, \mathbf{g}_{n\tau}) \in L^2(\Pi_T)$. *Слабым решением* задачи Коши (3) назовем функцию $\mathbf{y} \in V_2(\Pi_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-(\mathbf{y}, \partial_t \varphi)_{\Pi_T} + (B_i \partial_i \mathbf{y} + C\mathbf{y}, \varphi)_{\Pi_T} + \tau (A_{ij} \partial_j \mathbf{y}, \partial_i \varphi)_{\Pi_T} =$$
$$= \ell(\mathbf{y}_{0\tau}, \mathbf{f}_\tau; \varphi) - \tau (\mathbf{g}_{i\tau}, \partial_i \varphi)_{\Pi_T}$$

для любой $\varphi \in H^1(\Pi_T)$, $\varphi|_{t=T} = 0$. Положим $\bar{c}_0 = c_0 + \bar{\tau}\mu$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия* (4), (5), $\operatorname{div} \mathbf{B} \in L^\infty(\Pi_T)$, $0.5 \operatorname{div} \mathbf{B} - C \le c_0 I_m$ *п.в. в* Π_T *и* $\mathbf{g}_\tau \in L^2(\Pi_T)$. *Тогда существует единственное слабое решение* $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ *задачи Коши* (3), *причем* $\mathbf{y}_\tau \in C(0,T; L^2(\mathbb{R}^n))$ *и верна его энергетическая оценка*

$$\max\{\|\mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \sqrt{\nu\tau}\|\nabla \mathbf{y}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}\} \le$$
$$\le e^{\bar{c}_0 T}(\|\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \sqrt{\nu^{-1}\tau}\|\mathbf{g}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}).$$

Введем также задачу Коши для гиперболической системы уравнений 2-го порядка – возмущения исходной системы в (1) с параметром $0 < \tau \le \bar{\tau}$ при старших производных

$$\mathcal{H}_\tau \mathbf{y} := \tau \partial_t^2 \mathbf{y} + \mathcal{H}\mathbf{y} - \tau \partial_i (A_{ij} \partial_j \mathbf{y}) = \mathbf{f}_\tau \quad \text{в} \quad \Pi_T,$$
$$\mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{0\tau}, \quad \partial_t \mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{1\tau} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где $\mathbf{y}(x,t)$, $\mathbf{f}_\tau(x,t)$: $\Pi_T \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_{0\tau}(x)$, $\mathbf{y}_{1\tau}(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – искомая и заданные функции.

Пусть выполнены условия (5) и $\mathbf{y}_{1\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Слабым решением* задачи Коши (6) назовем функцию $\mathbf{y} \in W^{1,1}_{2,\infty}(\Pi_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\tau(\partial_t \mathbf{y}, \partial_t \varphi)_{\Pi_T} + (\mathcal{H}\mathbf{y}, \varphi)_{\Pi_T} + \tau (A_{ij} \partial_j \mathbf{y}, \partial_i \varphi)_{\Pi_T} =$$
$$= \ell(\mathbf{y}_{1\tau}, \mathbf{f}_\tau; \varphi)$$

для любой $\varphi \in W^{1,1}_{2,1}(\Pi_T)$, $\varphi|_{t=T} = 0$ и начальному условию $\mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{0\tau}$ в $C(0,T; L^2(\mathbb{R}^n))$.

Ниже потребуется следующее условие преобладания матрицы A старших коэффициентов системы 2-го порядка над матрицей $\mathbf{B}$ старших коэффициентов системы 1-го порядка

$$\|\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le (1 - \delta)^2 [(A_{ij} \partial_j \mathbf{v}, \partial_i \mathbf{v})_{\mathbb{R}^n} + \mu_1 \|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}]$$
$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^n) \tag{7}$$

с некоторыми $0 \le \delta < 1$, $\mu_1 \ge 0$, где $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} := B_i \partial_i \mathbf{v}$. Оно шире, чем более простое алгебраическое условие $|\mathbf{B}(x,t) \cdot \mathbf{w}|^2 \le (1 - \delta)^2 (A_{ij}(x,t)\mathbf{w}_j) \cdot \mathbf{w}_i$ при всех $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^m$ п.в. в Π_T, с тем же δ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{w} := B_i \mathbf{w}_i$. Подобные условия известны, см. в том числе [4].

Введем также условие $A \le c_A I_{mn}$ п.в. в Π_T, т.е.

$$(A(x,t)\mathbf{w})\cdot\mathbf{w} \le c_A|\mathbf{w}|^2 \quad \forall \mathbf{w}\in\mathbb{R}^{mn} \text{ п.в. в } \Pi_T \quad (8)$$

с некоторым $c_A > 0$, например, $c_A = n\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)}$, где $\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)} := \max_{i,j=\overline{1,n}}\|A_{ij}\|_{L^\infty(\Pi_T)}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (4), (5), (7), (8) *и* $\operatorname{div}\mathbf{B}, \partial_t A_{ij} \in L^\infty(\Pi_T)$, $A_{ij} = A_{ji}^T$, $i,j=\overline{1,n}$, $0.5\operatorname{div}\mathbf{B} - C \le c_0 I_m$ *п.в. в* Π_T, $\mathbf{y}_{0\tau}\in H^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{y}_{1\tau}\in L^2(\mathbb{R}^n)$ *и* $8\bar{\tau}^2\mu \le 1$. *Тогда существует единственное слабое решение* $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ *задачи Коши* (6) *и верна оценка*

$$\nu_0 \max\{\|\mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \tau\|\{\nabla\mathbf{y}_\tau, \partial_t\mathbf{y}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)}, \sqrt{\delta\tau}\|\{\partial_t\mathbf{y}_\tau, \nabla\mathbf{y}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)}\} \le e^{\bar{c}_1 T}(\|\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \tau\sqrt{2c_A}\|\nabla\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\tau\|\mathbf{y}_{1\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 9\|\mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}),$$

где $\nu_0 = \min\{\sqrt{\nu/2}, \sqrt{1/6}\}$, $\bar{c}_1 = \max\{4[c_0 + \bar{\tau}(\delta\mu + (1-\delta)\mu_1) + \sqrt{3/2}\|C\|_{L^\infty(\Pi_T)}], (2\nu)^{-1}c_{A1}\}$, *а* $c_{A1} \ge 0$ *таково, что* $\partial_t A \le c_{A1} I_{mn}$ *п.в. в* Π_T (*например*, $c_{A1} = n\|\partial_t A\|_{L^\infty(\Pi_T)}$, *ср. с* (8)).

Выведем оценки разности решений задач Коши для системы уравнений 1-го порядка и ее возмущений. Введем банаховы пространства, построенные с помощью $K_{\alpha,\infty}$-метода вещественной интерполяции банаховых пространств, $0 < \alpha < 1$ (см., например, [13], гл. 3)

$$\mathcal{H}^\alpha := (L^2(\mathbb{R}^n), H^1(\mathbb{R}^n))_{\alpha,\infty}, \quad \mathcal{H}^1 = H^1(\mathbb{R}^n),$$
$$\mathcal{H}^{1+\alpha} := (H^1(\mathbb{R}^n), H^2(\mathbb{R}^n))_{\alpha,\infty},$$
$$\mathcal{W}_{2,1}^{\alpha,0} := (L^{2,1}(\Pi_T), W_{2,1}^{1,0}(\Pi_T))_{\alpha,\infty},$$
$$\mathcal{W}_{2,1}^{1+\alpha,0} := (W_{2,1}^{1,0}(\Pi_T), W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T))_{\alpha,\infty}.$$

Теорема 4. 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *пп.* 1, 2 *с* $q = 1$ *и теоремы 2 на матрицы-коэффициенты и* $\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)} \le N$. *Для разности* $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ *решений задач Коши* (1) *и* (3) *верна оценка*

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla\mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \le C(N,T)[\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \sqrt{\tau}(\|\mathbf{g}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} + \|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{1,0}(\Pi_T)})].$$

Здесь и ниже $C(N,T)$ *не зависит от* τ. *В частности, при* $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}_\tau = 0$, $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ *имеем*

$$\left.\begin{aligned}&\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla\mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \le C(N,T)\sqrt{\tau}(\|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{1,0}(\Pi_T)}),\\ &\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \le C(N,T)\tau^{\alpha/2}(\|\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{W}_{2,1}^{\alpha,0}}),\\ &0 < \alpha < 1.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

2. *Пусть выполнены также условия теоремы* 1, *п. 3а на матрицы-коэффициенты*, $\|\operatorname{div}A_{\cdot j}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \le N$, $j = \overline{1,n}$ *для* $\operatorname{div}A_{\cdot j} := \partial_i A_{ij}$ *и снова* $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}_\tau = 0$, $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$. *Для* $\mathbf{r}_\tau$ *верны также оценки*

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla\mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \le C(N,T)\tau(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T)}),$$
$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla\mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \le C(N,T)\tau^{\alpha/2}(\|\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{W}_{2,1}^{\alpha,0}}),$$
$$1 < \alpha < 2.$$

Введем усреднение по Стеклову $(\bar{\sigma}^{(\tau)}v)(x) := \frac{1}{\tau^n}\int_{(-\tau/2,\tau/2)^n} v(x+\xi)d\xi$ по x с шагом $\tau > 0$ и интерполяционные пространства $\mathcal{W}_{2,1}^{2\alpha,\alpha} := (L^{2,1}(\Pi_T), W_{2,1}^{2,1}(\Pi_T))_{\alpha,\infty}$, $0 < \alpha \le 1$.

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *с* $q = 1$ *и теоремы* 3 *на матрицы-коэффициенты, а также* $\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)} \le N$, $\|\operatorname{div}A_{\cdot j}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \le N$, $j = \overline{1,n}$. *Для разности* $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ *решений задач Коши* (1) *и* (6) *верна оценка*

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \tau\|\{\nabla\mathbf{r}_\tau, \partial_t\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \sqrt{\delta\tau}\|\{\nabla\mathbf{r}_\tau, \partial_t\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)} \le C(N,T)[\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \tau(\|\nabla\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{y}_{1\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,1}(\Pi_T)})].$$

При $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{y}_{1\tau} = 0$, *а также* $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ *либо* $\mathbf{y}_{0\tau} = \bar{\sigma}^{(\tau)}\mathbf{w}_0$, *верны соответственно оценки*

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \tau\|\{\nabla\mathbf{r}_\tau, \partial_t\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \sqrt{\delta\tau}\|\{\nabla\mathbf{r}_\tau, \partial_t\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)} \le C_2(N,T)\tau(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,1}(\Pi_T)}), \quad (10)$$

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \le C(N,T)\tau^{\alpha/2}(\|\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{W}_{2,1}^{\alpha,\alpha/2}}),$$
$$0 < \alpha \le 2.$$

В оценках теорем 4 и 5 автоматически предполагается, что данные $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{y}_{0\tau}$, $\mathbf{y}_{1\tau}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}_\tau$, $\mathbf{g}_\tau$ принадлежат тем пространствам, в нормах которых они стоят. Оценки теоремы 5 родственны полученным в иных условиях и другим методом в [4].

При $0 < \alpha < 2$, $\alpha \ne 1$ пространство $\mathcal{H}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством Никольского $H_2^\alpha(\mathbb{R}^n)$ (с точностью до эквивалентности норм) [13], раздел 6.2, [15]. Верны включения $H_{2,1}^{\alpha,0}(\Pi_T) \subset \mathcal{W}_{2,1}^{\alpha,0}$, $H_{2,1}^{\alpha,\alpha/2}(\Pi_T) \subset \mathcal{W}_{2,1}^{\alpha,\alpha/2}$, $0 < \alpha < 2$, $\alpha \ne 1$, и $WH_{2,1}^{1,1/2}(\Pi_T) :=$

$:= \{v \in H_{2,1}^{0,1/2}(\Pi_T), \quad \nabla v \in L^{2,1}(\Pi_T)\} \subset \mathcal{W}_{2,1}^{1,1/2}$ (случай $\alpha = 1$).

Пространство $H_2^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ содержит $BV(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, где $BV(\mathbb{R}^n)$ – пространство функций ограниченной вариации на $\mathbb{R}^n$ (см., например, [14, гл. 37, 38]). Аналогично, пространство $H_{2,1}^{1/2,1/4}(\Pi_T)$ заведомо содержит пространство $BV(\Pi_T) \cap L^\infty(\Pi_T)$. Это обеспечивает оценку $O(\tau^{1/4})$ в (9) и (10) при $\alpha = 1/2$ для широкого класса разрывных функций $\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{f}$.

Ниже ограничимся случаем, когда матрицы $\mathbf{B}, C, A \in L^\infty(0,T)$ не зависят от x и $-C \le c_0 I_m$ п.в. на $(0,T)$. Это ограничение позволяет уточнить и заметно упростить формулировку результатов (которые вытекают из предыдущих теорем), хотя принципиальным оно не является. Введем производную по Соболеву любого порядка $\partial^{\mathbf{k}} = \partial_1^{k_1} \ldots \partial_n^{k_n}$ по x, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$, $|\mathbf{k}|_1 = k_1 + \ldots + k_n$.

Т е о р е м а 6. *Пусть* $\mathbf{k}$ с $|\mathbf{k}|_1 \ge 1$ *и* $1 \le q \le \infty$ *любые*.

1. а) *Пусть* $\mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Тогда для слабого решения* $\mathbf{w}$ *задачи Коши* (1) *верна оценка*

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \le e^{c_0 T}(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}). \quad (11)$$

Подробнее говоря, *оценка* (11) *означает*, *что если дополнительно* $\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, *то существует* $\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w} \in C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$ *и верна указанная оценка. Для краткости формулировок все оценки в данной теореме и теоремах* 7, 8 *ниже понимаются аналогичным образом*.

б) *Пусть* $m = 1, 2$. *Если* $\mathbf{f}, \nabla^m \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in H^m(\mathbb{R}^n)$, то *для сильного решения* $\mathbf{w}$ *задачи Коши* (1) *верны оценки*

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\nabla^m\mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} \le c e^{c_0 T}(\|\partial^{\mathbf{k}}\nabla^m\mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}}\nabla^m\mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}).$$

Если также $\|\{\mathbf{B}, C\}\|_{L^\infty(0,T)} \le N$, *то при* $m = 1, 2$ *соответственно верны оценки*

$$\|\partial_t\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \le$$
$$\le cNe^{c_0 T}T^{1/q}(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{1,0}(\Pi_T)}) + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)},$$

$$\|\partial_t\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \le$$
$$\le cNe^{c_0 T}T^{1/q}(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T)}) + \|\partial^{\mathbf{k}}\nabla\mathbf{f}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}.$$

Если $m = 2$ *и дополнительно* $\|\{\partial_t\mathbf{B}, \partial_t C\}\|_{L^\infty(0,T)} \le N$, $\partial_t\mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, *то верна оценка*

$$\|\partial_t^2\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \le$$
$$\le cN^2e^{c_0 T}T^{1/q}(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T)}) +$$
$$+ cN\|\partial^{\mathbf{k}}\{\mathbf{f}, \nabla\mathbf{f}, \partial_t\mathbf{f}\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}.$$

2. *Пусть выполнены условия* (4) *с* $\mu = 0$, $\mathbf{f}_\tau \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{g}_\tau \in L^2(\Pi_T)$, $\mathbf{y}_{0\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Тогда для слабого решения* $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ *задачи Коши* (3) *верна оценка*

$$\max\{\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \sqrt{\nu\tau}\|\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}\} \le$$
$$\le e^{c_0 T}(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \sqrt{\nu^{-1}\tau}\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{g}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}).$$

3. *Пусть выполнены условия* (4) *с* $\mu = 0$, (7) *с* $\mu_1 = 0$, (8) *и* $\partial_t A_{ij} \in L^\infty(0,T)$, $A_{ij} = A_{ji}^T$, $i, j = \overline{1,n}$, *а также* $\mathbf{f}_\tau \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{y}_{0\tau} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{y}_{1\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Тогда для слабого решения* $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ *задачи Коши* (6) *верна оценка*

$$\nu_1\max\{\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \tau\|\partial^{\mathbf{k}}\{\nabla\mathbf{y}_\tau, \partial_t\mathbf{y}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)},$$
$$\sqrt{\delta\tau}\|\partial^{\mathbf{k}}\{\partial_t\mathbf{y}_\tau, \nabla\mathbf{y}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)}\} \le e^{c_1 T}(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} +$$
$$+ \tau\sqrt{2c_A}\|\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\tau\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_{1\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\sqrt{2}\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}),$$

где $\nu_1 = \min\{\sqrt{2\nu}, 1/\sqrt{2}\}$, $c_1 = \max\{2(c_0 + \sqrt{2}\|C\|_{L^\infty(0,T)}),$ $(2\nu)^{-1}c_{A1}\}$, *а* $c_{A1} \ge 0$ *прежнее*.

Оценки последней теоремы верны и при $|\mathbf{k}|_1 = 0$, когда $\partial^{\mathbf{k}}v = v$.

Перейдем к оценкам производных разностей решений рассматриваемых систем. При $|\mathbf{k}|_1 = 0$ это будут те же оценки, что и выше, но с уточненными постоянными.

Т е о р е м а 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 6, *пп.* 1, 2, *кроме условий на* $\partial_t\mathbf{f}$ *и* $\partial_t\mathbf{B}$, $\partial_t C$, *и* $\|A\|_{L^\infty(0,T)} \le N$. *Пусть для краткости* $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}_\tau = 0$, $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ и $|\mathbf{k}|_1 \ge 0$. *Тогда для разности* $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ *решений задач Коши* (1) *и* (3) *верны оценки*

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \le$$
$$\le cNe^{2c_0 T}\sqrt{T\tau}(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T)}),$$

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \le$$
$$\le cNe^{2c_0 T}T\tau(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T)}),$$

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \le$$
$$\le cN^\alpha e^{(1+\alpha)c_0 T}(T\tau)^{\alpha/2}(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{\mathcal{W}_{2,1}^{\alpha,0}}),$$
$$0 < \alpha < 1,$$

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \le$$
$$\le cNe^{2c_0T}(T\tau)^{\alpha/2}(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{\mathcal{W}^{\alpha,0}_{2,1}}),\ 1 < \alpha < 2.$$

Теорема 8. *Пусть выполнены все условия теоремы* 6, *п.* 1 *с* $q = 1$ *и п.* 3, *а также* $\|A\|_{L^\infty(0,T)} \le N$. *Пусть* $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{y}_{1\tau} = 0$ *и* $|\mathbf{k}|_1 \ge 0$. *Тогда для разности* $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ *решений задач Коши* (1) *и* (6) *при* $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ *либо* $\mathbf{y}_{0\tau} = \overline{\sigma}^{(\tau)}\mathbf{w}_0$ *верны соответственно оценки*

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \tau\|\{\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau, \partial_t\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} +$$
$$+ \sqrt{\delta\tau}\|\{\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau, \partial_t\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)} \le$$
$$\le cN^2e^{(c_0+c_1)T}(T+1)\tau(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{W^{2,1}_{2,1}(\Pi_T)}),$$

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \le$$
$$\le cN^\alpha e^{(\alpha c_0/2+c_1)T}[(T+1)\tau]^{\alpha/2}(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{\mathcal{W}^{\alpha,\alpha/2}_{2,1}}),$$
$$0 < \alpha \le 2.$$

Каждую из оценок в теоремах 6–8 можно просуммировать по всем $\mathbf{k}$ с $|\mathbf{k}|_1 = p$, что приводит к аналогичным оценкам с заменой $\partial^{\mathbf{k}}$ на ∇^p с любым $p \ge 1$. В частности, из таких оценок $\mathbf{r}_\tau$ при $p > n/2$ в силу теоремы вложения следуют оценки в норме $\sup_{\overline{\Pi}_T}|\mathbf{r}_\tau(x,t)|$.

Обратимся к линеаризованным на постоянном решении КГД системам уравнений. Запишем их относительно нормированного (безразмерного) вектора малых возмущений $\tilde{\mathbf{z}}(x,t) := (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varepsilon})(x,t)$ плотности, скорости и удельной внутренней энергии газа, где $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n)$, $n = 1, 2, 3$. Они представляют собой систему дифференциальных уравнений $\ell + 1$-го порядка по t и 2-го порядка по x с постоянными коэффициентами, где $\ell = 0$ для параболической и $\ell = 1$ для гиперболической КГД систем. В симметризованной матричной форме задача Коши для них примет вид

$$\ell\tau\partial_t^2\tilde{\mathbf{z}} + \partial_t\tilde{\mathbf{z}} + c_*B^{(i)}\partial_i\tilde{\mathbf{z}} - \tau c_*^2A^{(ij)}\partial_i\partial_j\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_\tau \quad \text{в} \quad \Pi_T, \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{z}}_{0\tau}, \quad \partial_t\tilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{z}}_{1\tau} \quad (\text{при} \ \ \ell = 1) \ \ \text{в} \ \ \mathbb{R}^n, \quad (13)$$

где $B^{(i)}$ и $A^{(ij)}$ – постоянные симметричные матрицы конвективных и вязких слагаемых порядка $m = n + 2$, $A^{(ij)} = A^{(ji)}$, ср. с [11, 12], $c_* > 0$ – фоновая скорость звука, $\tau > 0$ – параметр релаксации. Эти матрицы выписаны явно в [12] (в $A^{(kk)}$ в блоках $(1,1)$, $(3,3)$ у $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\gamma_*}$ следует убрать $\sqrt{\cdot}$). Свободный член $\mathbf{f}_\tau$ дописан формально для общности анализа.

При $\tau = 0$ эта задача переходит в задачу Коши для линеаризованной системы уравнений газовой динамики 1-го порядка

$$\partial_t\mathbf{w} + c_*B^{(i)}\partial_i\mathbf{w} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Pi_T, \quad \mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n. \quad (14)$$

Для $\tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varepsilon})$, $\mathbf{z} = (\rho, \mathbf{u}, \varepsilon) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ введем билинейную форму

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \frac{1}{\gamma}(\nabla\tilde{\rho}, \nabla\rho)_{\mathbb{R}^n} + (\mathbf{M}\nabla\tilde{\rho}, \mathbf{M}\nabla\rho)_{\mathbb{R}^n} +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{\gamma}}((\mathbf{M}\nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \nabla\rho)_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}}(\nabla\tilde{\varepsilon}, \nabla\rho)_{\mathbb{R}^n} +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{\gamma}}(\mathbf{M}\nabla\tilde{\rho}, \operatorname{div}\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + \hat{\alpha}_s(\nabla\tilde{\mathbf{u}}, \nabla\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} +$$
$$+ (\hat{a}_0 + 1)(\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}, \operatorname{div}\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + ((\mathbf{M}\nabla)\tilde{\mathbf{u}}, (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}}(\mathbf{M}\nabla\tilde{\varepsilon}, \operatorname{div}\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}}(\nabla\tilde{\rho}, \nabla\varepsilon)_{\mathbb{R}^n} +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}}((\mathbf{M}\nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \nabla\varepsilon)_{\mathbb{R}^n} + \left(\hat{\alpha}_P + \frac{1}{\gamma_*}\right)(\nabla\tilde{\varepsilon}, \nabla\varepsilon)_{\mathbb{R}^n} +$$
$$+ (\mathbf{M}\nabla\tilde{\varepsilon}, \mathbf{M}\nabla\varepsilon)_{\mathbb{R}^n}.$$

Здесь $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_n)$ – нормированная на c_* фоновая скорость и поэтому $M = |\mathbf{M}|$ – фоновое число Маха, $\mathbf{M}\nabla = \mathbf{M} \cdot \nabla$, $\gamma_* = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$, $\hat{a}_0 = \frac{1}{3}\hat{\alpha}_s + \hat{\alpha}_{1s} \ge 0$, причем $\gamma > 1$ – показатель адиабаты в уравнении состояния газа, $\hat{\alpha}_s \ge 0$, $\hat{\alpha}_{1s} \ge 0$, $\hat{\alpha}_P \ge 0$ – постоянные КГД-параметры в искусственных коэффициентах вязкости и теплопроводности. Формально эта форма получается умножением $-A^{(ij)}\partial_i\partial_j\tilde{\mathbf{z}}$ на $\mathbf{z}$, интегрированием по $\mathbb{R}^n$ и по частям.

Следующий результат родственен полученным недавно в [12, 16]. Пусть $\mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{z} = B^{(i)}\partial_i\mathbf{z}$.

Лемма 1. *Верны свойства симметричности* $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}})$ *и неотрицательной определенности*

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \hat{\alpha}_s\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{R}^n} + \hat{a}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{R}^n} +$$
$$+ \hat{\alpha}_P\|\nabla\varepsilon\|^2_{\mathbb{R}^n} + \|\mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{z}\|^2_{\mathbb{R}^n} \ge \|\mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{z}\|^2_{\mathbb{R}^n},$$
$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \ge \max\{\delta_0\|\nabla\rho\|^2_{\mathbb{R}^n}, \hat{\alpha}_s\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{R}^n} +$$
$$\hat{a}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{R}^n} + \hat{\alpha}_P\|\nabla\varepsilon\|^2_{\mathbb{R}^n}\} \ge \delta_1\|\nabla\mathbf{z}\|^2_{\mathbb{R}^n}$$

для любых $\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, *с* $\delta_0 := \frac{1}{3\gamma}\min\left\{1, \frac{\hat{\alpha}_s}{M^2}, \gamma_*\hat{\alpha}_P\right\}$, $\delta_1 := \frac{1}{2}\min\{\delta_0, \hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_P\}$.

Все предыдущие теоремы применимы к задачам Коши для системы уравнений газовой динамики (14) и КГД систем (12), (13) в силу леммы 1. Это непосредственно приводит к заключительному результату.

Теорема 9. 1. *Для задачи Коши для линеаризованной системы уравнений газовой динамики* (14) *верны теоремы* 1 *и* 6, *п.* 1 *с* $c_0 = 0$.

2. *Пусть* $\hat{\alpha}_s > 0$, $\hat{\alpha}_P > 0$. *Для задач Коши для линеаризованных КГД систем* (12), (13) *верны свойства* (4) *с* $\nu = c_*^2\delta_1$, $\mu = 0$ *и* (5) *с* $\delta = \mu_1 = 0$, *и поэтому верны теоремы* 2 *и* 6, *п.* 2 *с* $\overline{c}_0 = c_0 = 0$ *при* $\ell = 0$ *либо теоремы* 3 *и* 6, *п.* 3 *с* $\overline{c}_1 = c_1 = 0$ *при* $\ell = 1$.

Для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{z}}$ *решений задач Коши для линеаризованных системы уравнений газовой динамики* (14) *и КГД систем* (12), (13) *верны оценки теорем* 4 *и* 7 *с* $c_0 = 0$ *при* $\ell = 0$ *либо теорем* 5 *и* 8 *с* $c_0 = c_1 = 0$ *при* $\ell = 1$.

Указанное равенство постоянных c_k, $\overline{c}_k$ нулю важно, т.к. означает ограниченность или степенной (вместо экспоненциального) рост по T постоянных в соответствующих оценках.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 22-11-00126.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
2. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
3. *Четверушкин Б.Н.* // Матем. моделирование. 2018. Т. 30. № 2. С. 81–98.
4. *Fattorini H.* // J. Diff. Equat. 1987. V. 70. P. 1–41.
5. *De Jager E.M., Furu J.* The theory of singular perturbations. Amsterdam: Elsevier, 1996.
6. *Эванс Л.К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Т. Рожковская, 2003.
7. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
9. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
10. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
11. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
12. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* // Дифф. уравнения. 2020. Т. 56. № 7. С. 936–947.
13. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
14. *Tartar L.* An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces. Berlin: Springer, 2007.
15. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
16. *Злотник А.А., Федченко А.С.* // ДАН. Матем., информ., процессы управл. 2021. Т. 501. № 1. С. 31–37.

ON PARABOLIC AND HYPERBOLIC 2ND ORDER PERTURBATIONS OF A SYMMETRIC HYPERBOLIC 1ST ORDER SYSTEM

A. A. Zlotnik[a,b] and Academician of the RAS B. N. Chetverushkin[b]

[a] *Higher School of Economics University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Federal Research Center Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

We study the Cauchy problems for a symmetric hyperbolic system of equations of the 1st order with variable coefficients and its singular perturbations which are strongly parabolic and 2nd order hyperbolic systems of equations with a small parameter $\tau > 0$ in front of the second derivatives with respect to x and t. The properties of the solutions of all three systems are formulated, and estimates of the order $O(\tau^{\alpha/2})$ are given for the difference between solutions of the original system and systems with perturbations, for an initial function $\mathbf{w}_0$ of smoothness α in the sense of $L^2(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha \le 2$. For $\alpha = 1/2$, a broad class of discontinuous $\mathbf{w}_0$ is covered. We give an application to the linearized system of gas dynamics equations and parabolic and 2nd order hyperbolic quasi-gasdynamic systems of equations.

Keywords: linear systems of partial differential equations, small parameter, estimates for the difference of solutions, quasi-gasdynamic systems of equations