ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 89–94

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:531.32

О ПОСТРОЕНИИ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СМЕСИ ВЯЗКИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

© 2022 г. А. А. Злотник[1,2,*]

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным
Поступило 12.05.2022 г.
После доработки 27.06.2022 г.
Принято к публикации 16.08.2022 г.

Выполняются регуляризация двух типов и агрегирование системы уравнений движения многоскоростной смеси вязких несжимаемых жидкостей и строятся новые многоскоростные и односкоростные системы. Для всех них выводятся эллиптические уравнения для давления и диссипативные уравнения баланса полной энергии смеси (суммы кинетической и потенциальной энергий смеси).

Ключевые слова: уравнения движения смеси вязких несжимаемых жидкостей, регуляризация, агрегирование, уравнение для давления, уравнение баланса полной энергии

DOI: 10.31857/S2686954322050204

Задачи динамики несжимаемых смесей имеют многочисленные и разнообразные научные и технические приложения, и для их описания разработаны различные системы уравнений движения несжимаемых смесей, см., в частности, [1, 2], в том числе с регуляризацией [3]. Регуляризованные квазигазодинамические (КГД) и квазигидродинамические (КГидД) системы уравнений вначале были построены для однокомпонентных газов и жидкостей [4–6], а для сжимаемых смесей они строились и применялись для численного решения в [5, 7–10] и др. работах, для несжимаемых смесей – недавно в [11].

В этом сообщении выполняются КГД и КГидД регуляризация и агрегирование [9] системы уравнений движения многоскоростной смеси вязких несжимаемых жидкостей из [2, 3] и последовательно строятся новые многоскоростные и односкоростные системы, причем последние – как со многими, так и общей регуляризующими скоростями. Для всех них выводятся уравнения баланса полной массы, эллиптические уравнения для давления и диссипативные уравнения баланса полной энергии смеси с учетом потенциального слагаемого внешних сил, причем это делается единообразно для регуляризаций обоих типов.

[1] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*

[2] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*

**E-mail: azlotnik@hse.ru*

Система уравнений движения многоскоростной смеси вязких несжимаемых жидкостей в [2, 3] состоит из уравнений баланса массы и импульса компонент

$$\partial_t(\rho_k\alpha_k) + \mathrm{div}(\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k) = 0,\quad 1 \le k \le K,\quad \langle\alpha_k\rangle := \alpha_1 + \ldots + \alpha_K = 1, \tag{1}$$

$$\partial_t(\rho_k\alpha_k u_k) + \mathrm{div}(\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k\otimes\mathbf{u}_k) + \alpha_k\nabla p = \mathrm{div}(\alpha_k\Pi_k^{NS}) + \alpha_k\mathbf{f}_k,\quad 1 \le k \le K. \tag{2}$$

В них основные искомые функции $0 < \alpha_k < 1$, $\mathbf{u}_k = (u_{k1},\ldots,u_{kn})$ – это объемные концентрации и скорости k-й компоненты смеси, а также общее давление p (определенное с точностью до аддитивной функции времени), зависящие от $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \Omega$, где Ω – область в $\mathbb{R}^n$, и $t \ge 0$, причем $K \ge 2$ и $n = 2,3$. Постоянные плотности компонент $\rho_k > 0$ и плотности внешних сил $\mathbf{f}_k(x,t)$ заданы, $1 \le k \le K$. Операторы div и $\nabla = (\partial_1,\ldots,\partial_n)$ берутся по x, а $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Символы $\otimes$ и $\cdot$ обозначают тензорное и скалярное произведения векторов, а дивергенция тензора берется по его первому индексу.

Тензор вязкости Навье–Стокса k-й компоненты смеси имеет стандартный вид

$$\Pi_k^{NS} = \mu_k\left[\nabla\mathbf{u}_k + (\nabla\mathbf{u}_k)^T - \frac{2}{3}(\mathrm{div}\mathbf{u}_k)\mathbb{I}\right] + \lambda_k(\mathrm{div}\mathbf{u}_k)\mathbb{I},\quad \nabla\mathbf{u}_k = \{\partial_i u_{kj}\}_{i,j=1}^n$$

с коэффициентами вязкости $\mu_k > 0$ и $\lambda_k \ge 0$. Здесь $\mathbb{I}$ – единичный тензор порядка n.

Деление первых уравнений (1) на ρ_k приводит к эквивалентным уравнениям баланса объемных концентраций

$$\partial_t\alpha_k + \operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u}_k) = 0, \quad 1 \le k \le K. \tag{3}$$

Так как $\langle\alpha_k\rangle = 1$, то применение к ним операции $\langle\cdot\rangle$ (т.е. суммирование по $1 \le k \le K$) дает важное уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}\langle\alpha_k\mathbf{u}_k\rangle = 0. \tag{4}$$

Введем плотность смеси $\rho := \langle\rho_k\alpha_k\rangle > 0$, являющуюся функцией $\alpha_1,\dots,\alpha_K$ (и поэтому (x,t)). Применение операции $\langle\cdot\rangle$ к первому уравнению (1) приводит к уравнению баланса полной массы

$$\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u} := \rho^{-1}\langle\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k\rangle, \tag{5}$$

по форме аналогичному соответствующему уравнению для сжимаемого газа, где $\mathbf{u}$ – средняя "массовая" (т.е. с учетом плотностей компонент) скорость смеси.

Применение операции $\left\langle\dfrac{1}{\rho_k}\cdot\right\rangle$ к уравнению (2) дает уравнение

$$\partial_t\langle\alpha_k\mathbf{u}_k\rangle + \operatorname{div}\langle\alpha_k\mathbf{u}_k\otimes\mathbf{u}_k\rangle + \left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\right\rangle\nabla p = \\ = \operatorname{div}\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\Pi_k^{NS}\right\rangle + \left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\mathbf{f}_k\right\rangle.$$

Применение div к нему с учетом уравнения (4) приводит к уравнению для p

$$\operatorname{div}\left(\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\right\rangle\nabla p - \mathbf{P}\right) = 0, \\ \mathbf{P} := \operatorname{div}\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\Pi_k^{NS}\right\rangle - \operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u}_k\otimes\mathbf{u}_k) + \left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\mathbf{f}_k\right\rangle. \tag{6}$$

Оно равномерно эллиптическое в Ω (с параметром t), поскольку

$$0 < \frac{1}{\rho_{\max}} \le \left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\right\rangle \le \frac{1}{\rho_{\min}}, \quad \text{с} \quad \rho_{\min} := \min_{1\le k\le K}\rho_k, \\ \rho_{\max} := \max_{1\le k\le K}\rho_k.$$

Первоначальную регуляризацию первых уравнений (1) и уравнений (2) выполним, применив предложенный в [12] формализм, посредством следующих замен в них

$$\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k \to \rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k + \tau\partial_t(\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k), \\ \rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k\otimes\mathbf{u}_k \to \rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k\otimes\mathbf{u}_k + \tau\partial_t(\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k\otimes u_k), \\ \alpha_k(\nabla p - \mathbf{f}_k) \to (\alpha_k + \tau\partial_t\alpha_k)(\nabla p - \mathbf{f}_k),$$

где $\tau > 0$ – малый параметр (он может зависеть от искомых функций); при этом здесь функция p замене не подвергается. Воспользуемся формулой

$$\partial_t(\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k\otimes\mathbf{u}_k) = \partial_t(\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k)\otimes\mathbf{u}_k + \rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k\otimes\partial_t\mathbf{u}_k = \\ = \partial_t(\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k)\otimes\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k\otimes[\partial_t(\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k) - \rho_k(\partial_t\alpha_k)\mathbf{u}_k].$$

Далее имеем $\partial_t\alpha_k = -\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u}_k)$ согласно уравнению (3). Запишем также приближенно

$$\partial_t(\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k) \approx -[\operatorname{div}(\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k\otimes\mathbf{u}_k) + \alpha_k(\nabla p - \mathbf{f}_k)]$$

согласно уравнению (2), опустив в нем слагаемое $\operatorname{div}(\alpha_k\Pi_k^{NS})$ (считая вязкость малой).

Эта процедура приводит к регуляризованной КГД типа системе уравнений многоскоростной смеси вязких несжимаемых жидкостей вида

$$\partial_t\alpha_k + \operatorname{div}[\alpha_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}^{(k)})] = 0, \\ 1 \le k \le K, \quad \langle\alpha_k\rangle = 1,$$

$$\partial_t(\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k) + \operatorname{div}[\rho_k\alpha_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}^{(k)})\otimes\mathbf{u}_k] + \\ + [\alpha_k - \tau\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u}_k)](\nabla p - \mathbf{f}_k) = \\ = \operatorname{div}(\alpha_k\Pi_k^{NS} + \mathbf{u}_k\otimes\rho_k\alpha_k\mathbf{w}_0^{(k)}), \quad 1 \le k \le K. \tag{7}$$

В них основные искомые функции те же, а возникшие регуляризующие скорости таковы

$$\mathbf{w}^{(k)} \equiv \mathbf{w}_1^{(k)} = \\ = \frac{\tau}{\rho_k\alpha_k}[\operatorname{div}(\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k\otimes\mathbf{u}_k) + \alpha_k(\nabla p - \mathbf{f}_k)] = \\ = \tau\left[\frac{1}{\alpha_k}\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u}_k\otimes\mathbf{u}_k) + \frac{1}{\rho_k}(\nabla p - \mathbf{f}_k)\right] = \\ = \frac{\tau}{\alpha_k}\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_0^{(k)}, \tag{8}$$

$$\mathbf{w}_0^{(k)} = \tau\left[(\mathbf{u}_k\cdot\nabla)\mathbf{u}_k + \frac{1}{\rho_k}(\nabla p - \mathbf{f}_k)\right]. \tag{9}$$

Хорошо известное КГидД типа упрощение построенной регуляризованной системы уравнений выполняется посредством замены в ней $\mathbf{w}^{(k)}$ на $\mathbf{w}_0^{(k)}$ и отбрасывания слагаемого $\tau\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u}_k)$ слева в уравнении баланса импульса (7). Положив $\ell = 1$ для первой системы и $\ell = 0$ для второй, обе системы можно записать единообразно с параметром ℓ

$$\partial_t\alpha_k + \operatorname{div}[\alpha_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})] = 0, \\ 1 \le k \le K, \quad \langle\alpha_k\rangle = 1, \tag{10}$$

$$\partial_t(\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k) + \operatorname{div}[\rho_k\alpha_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})\otimes\mathbf{u}_k] + \\ + [\alpha_k - \ell\tau\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u}_k)](\nabla p - \mathbf{f}_k) = \\ = \mathbf{div}(\alpha_k\Pi_k^{NS} + \mathbf{u}_k\otimes\rho_k\alpha_k\mathbf{w}_0^{(k)}), \quad 1 \le k \le K. \tag{11}$$

Применение операций $\langle\cdot\rangle$ и $\langle\rho_k\cdot\rangle$ к первым уравнениям (10) приводит к уравнению неразрывности и уравнению баланса полной массы

$$\operatorname{div}\langle\alpha_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})\rangle = 0. \tag{12}$$

$$\partial_t\rho + \mathrm{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_{\ell *})] = 0, \tag{13}$$

$$\mathbf{w}_{\ell *} := \frac{1}{\rho}\langle\rho_k\alpha_k\mathbf{w}_\ell^{(k)}\rangle = \tau\frac{1}{\rho}[\ell\mathrm{div}\langle\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k\rangle + (1-\ell)\langle\rho_k\alpha_k(\mathbf{u}_k\cdot\nabla)\mathbf{u}_k\rangle + \nabla p - \langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle],$$

где по-прежнему $\mathbf{u} = \rho^{-1}\langle\rho_k\alpha_k\mathbf{u}_k\rangle$, а $\mathbf{w}_{\ell *}$ – средняя "массовая" регуляризующая скорость смеси. Средняя регуляризующая скорость смеси такова

$$\langle\alpha_k\mathbf{w}_\ell^{(k)}\rangle = \tau\left[\ell\mathrm{div}\langle\alpha_k\mathbf{u}_k\otimes\mathbf{u}_k\rangle + (1-\ell)\langle\alpha_k(\mathbf{u}_k\cdot\nabla)\mathbf{u}_k\rangle + \left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\right\rangle\nabla p - \left\langle\frac{\alpha_k\mathbf{f}_k}{\rho_k}\right\rangle\right],$$

и уравнение (12) можно переписать как важное эллиптическое уравнение для p

$$\mathrm{div}\left(\tau\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\right\rangle\nabla p - \mathbf{P}_\tau\right) = 0,$$

$$\mathbf{P}_\tau := \langle\alpha_k\mathbf{u}_k\rangle - \tau[\ell\mathrm{div}\langle\alpha_k\mathbf{u}_k\otimes\mathbf{u}_k\rangle + (1-\ell)\langle\alpha_k(\mathbf{u}_k\cdot\nabla)\mathbf{u}_k\rangle] + \tau\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\mathbf{f}_k\right\rangle. \tag{14}$$

При $\ell = 1$ и $\tau = \mathrm{const}$ после деления на τ оно отличается от уравнения (6) только заменой в $\mathbf{P}$ первого слагаемого намного более простым $\tau^{-1}\langle\alpha_k\mathbf{u}_k\rangle$ без вторых производных по x. При этом, например, краевое условие $\langle\alpha_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})_\mathbf{n}\rangle = g$ на $\partial\Omega$ эквивалентно краевому условию $\left(\tau\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\right\rangle\nabla p - \mathbf{P}_\tau\right)_\mathbf{n} = -g$ на $\partial\Omega$, где $\mathbf{n}$ означает взятие нормальной компоненты. Ниже для других регуляризованных систем ситуация с краевым условием аналогичная.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\mathbf{f}_k = \nabla F_k + \mathbf{h}_k$, *где* $F_k = F_k(x)$. *Для системы уравнений* (10), (11) *и* (8), (9) *при* $\ell = 0,1$ *верно уравнение баланса полной энергии смеси* $\mathscr{E} = \langle\mathscr{E}_k\rangle$, *где* $\mathscr{E}_k = 0.5\rho_k\alpha_k|\mathbf{u}_k|^2 - \alpha_k F_k$ – *полная энергия k-й компоненты*:

$$\partial_t\mathscr{E} + \mathrm{div}\langle(\mathscr{E}_k + \alpha_k p)(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)}) - \alpha_k[\Pi_k^{NS}\mathbf{u}_k + \rho_k(\mathbf{w}_0^{(k)}\cdot\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k]\rangle + \mathscr{P}^{NS} + \mathscr{P}^\tau = \langle\alpha_k\mathbf{h}_k\cdot(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})\rangle \tag{15}$$

с диссипацией $\mathscr{P}^{NS} + \mathscr{P}^\tau \geq 0$, *где*

$$\mathscr{P}^{NS} := \left\langle\alpha_k\left[\frac{\mu_k}{2}|\nabla\mathbf{u}_k + (\nabla\mathbf{u}_k)^T|^2 + \left(\lambda_k - \frac{2}{3}\mu_k\right)(\mathrm{div}\mathbf{u}_k)^2\right]\right\rangle \geq 0,$$

$$\mathscr{P}^\tau := \frac{1}{\tau}\langle\rho_k\alpha_k|\mathbf{w}_0^{(k)}|^2\rangle \geq 0.$$

В самом деле, пусть $1 \leq k \leq K$. В силу первого уравнения (10) имеем

$$-\partial_t(\alpha_k F_k) = \{\mathrm{div}[\alpha_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})]\}F_k = \mathrm{div}[\alpha_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})F_k] - \alpha_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})\cdot\nabla F_k. \tag{16}$$

Уравнение баланса импульса (11) умножим скалярно на $\mathbf{u}_k$. Воспользуемся формулой

$$[\partial_t(r\mathbf{v})]\cdot\mathbf{v} + \mathrm{div}(r\mathbf{y}\otimes\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = \partial_t(0.5r|\mathbf{v}|^2) + \mathrm{div}(0.5r|\mathbf{v}|^2\mathbf{y}) + 0.5[\partial_t r + \mathrm{div}(r\mathbf{y})]|\mathbf{v}|^2, \tag{17}$$

где r – скалярная функция, а $\mathbf{v}$, $\mathbf{y}$ – вектор-функции со значениями в $\mathbb{R}^n$. Тогда с помощью первого уравнения (10), умноженного на ρ_k (т.е. уравнения баланса массы k-й компоненты), получим

$$0.5\partial_t(\rho_k\alpha_k|\mathbf{u}_k|^2) + 0.5\mathrm{div}[\rho_k\alpha_k|\mathbf{u}_k|^2(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})] + [\alpha_k\mathbf{u}_k - \ell\tau\mathrm{div}(\alpha_k\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k]\cdot(\nabla p - \mathbf{f}_k) = \mathrm{div}(\alpha_k\Pi_k^{NS})\cdot\mathbf{u}_k + \mathrm{div}(\mathbf{u}_k\otimes\rho_k\alpha_k\mathbf{w}_0^{(k)})\cdot\mathbf{u}_k. \tag{18}$$

Сложим равенства (16) и (18). Выполним преобразования с учетом определения $\mathbf{w}_0^{(k)}$:

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}_k\otimes\rho_k\alpha_k\mathbf{w}_0^{(k)})\cdot\mathbf{u}_k = \mathrm{div}[\rho_k\alpha_k(\mathbf{w}_0^{(k)}\cdot\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k] - \rho_k\alpha_k\mathbf{w}_0^{(k)}\cdot(\mathbf{u}_k\cdot\nabla)\mathbf{u}_k = \mathrm{div}[\rho_k\alpha_k(\mathbf{w}_0^{(k)}\cdot\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k] - \tau^{-1}\rho_k\alpha_k|\mathbf{w}_0^{(k)}|^2 + \alpha_k\mathbf{w}_0^{(k)}\cdot(\nabla p - \mathbf{f}_k), \tag{19}$$

при $\ell = 1$ учтем, что $\alpha_k\mathbf{w}_0^{(k)} + \tau\mathrm{div}(\alpha_k\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k = \alpha_k\mathbf{w}_1^{(k)}$ в слагаемом с $\nabla p - \mathbf{f}_k$ и получим

$$\partial_t(0.5\rho_k\alpha_k|\mathbf{u}_k|^2 - \alpha_k F_k) + \mathrm{div}[(0.5\rho_k\alpha_k|\mathbf{u}_k|^2 - \alpha_k F_k)(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)}) - \rho_k\alpha_k(\mathbf{w}_0^{(k)}\cdot\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k] + (\alpha_k\mathbf{u}_k - \alpha_k\mathbf{w}_\ell^{(k)})\cdot(\nabla p - \mathbf{h}_k) + \tau^{-1}\rho_k\alpha_k|\mathbf{w}_0^{(k)}|^2 = \mathrm{div}(\alpha_k\Pi_k^{NS})\cdot\mathbf{u}_k.$$

Применим к результату операцию $\langle\cdot\rangle$, воспользуемся также формулами

$$(\alpha_k\mathbf{u}_k - \alpha_k\mathbf{w}_\ell^{(k)})\cdot\nabla p = \mathrm{div}[p\alpha_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})] - p\mathrm{div}[\alpha_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})],$$

$$\mathrm{div}(\alpha_k\Pi_k^{NS})\cdot\mathbf{u}_k = \mathrm{div}(\alpha_k\Pi_k^{NS}\mathbf{u}_k) - \alpha_k\Pi_k^{NS} : \nabla\mathbf{u}_k = \mathrm{div}(\alpha_k\Pi_k^{NS}\mathbf{u}_k) - \alpha_k\left[\frac{\mu_k}{2}|\nabla\mathbf{u}_k + (\nabla\mathbf{u}_k)^T|^2 + \left(\lambda_k - \frac{2}{3}\mu_k\right)(\mathrm{div}\mathbf{u}_k)^2\right], \tag{20}$$

где : означает скалярное произведение тензоров, и с учетом уравнения (12) выведем (15).

Теорема сохраняет силу при $\tau = 0$, когда следует обнулить $\mathbf{w}_\ell^{(k)}$, $\mathbf{w}_0^{(k)}$ и $\mathscr{P}^\tau$, и тогда она относится к исходной системе уравнений (1), (2).

Перейдем к агрегированным регуляризованным системам уравнений односкоростной вязкой несжимаемой смеси. Для этого аналогично [9, раздел 2] применим операцию $\langle\cdot\rangle$ к уравнению баланса импульса (11), в результате и остальных уравнениях (10) и (8), (9) положим $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}$, $1 \le k \le K$ и выведем следующую систему с параметром $\ell = 0,1$

$$\partial_t\alpha_k + \operatorname{div}[\alpha_k(\mathbf{u} - \mathbf{w}_{\ell k})] = 0, \quad 1 \le k \le K, \quad \langle\alpha_k\rangle = 1, \tag{21}$$

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\ell) \otimes \mathbf{u}] + (1 - \ell\tau\operatorname{div}\mathbf{u})\nabla p = \operatorname{div}(\Pi^{NS} + \mathbf{u} \otimes \rho\mathbf{w}_0) + \langle[\alpha_k - \ell\tau\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u})]\mathbf{f}_k\rangle. \tag{22}$$

Основными искомыми функциями теперь являются $\alpha_1,\ldots,\alpha_K,\mathbf{u},p$. Снова $\rho = \langle\rho_k\alpha_k\rangle$.

Возникший средний тензор вязкости Навье–Стокса имеет стандартный вид

$$\Pi^{NS} = \mu[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T - \frac{2}{3}(\operatorname{div}u)\mathbb{I}] + \lambda(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbb{I}, \quad \mu = \langle\mu_k\alpha_k\rangle, \quad \lambda = \langle\lambda_k\alpha_k\rangle,$$

где средние коэффициенты вязкости μ и λ являются функциями $\alpha_1,\ldots,\alpha_K$ (и поэтому (x,t)), даже если μ_k (или λ_k) – постоянные, не все равные друг другу.

Регуляризующие скорости $\mathbf{w}_1^{(k)}$ и $\mathbf{w}_0^{(k)}$ при $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}$, $1 \le k \le K$ переходят в следующие

$$\mathbf{w}_{1k} = \frac{\tau}{\rho_k\alpha_k}[\operatorname{div}(\rho_k\alpha_k\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \alpha_k(\nabla p - \mathbf{f}_k)] = \tau\left[\frac{1}{\alpha_k}\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho_k}(\nabla p - \mathbf{f}_k)\right] = \frac{\tau}{\alpha_k}\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{w}_{0k}, \tag{23}$$

$$\mathbf{w}_{0k} = \tau\left[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho_k}(\nabla p - \mathbf{f}_k)\right]. \tag{24}$$

Средние “массовые” регуляризующие скорости, возникшие в уравнении (22), таковы

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\rho}\langle\rho_k\alpha_k\mathbf{w}_{1k}\rangle = \frac{\tau}{\rho}[\operatorname{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle] = \frac{\tau}{\rho}\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{w}_0, \tag{25}$$

$$\mathbf{w}_0 = \frac{1}{\rho}\langle\rho_k\alpha_k\mathbf{w}_{0k}\rangle = \tau\left[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}(\nabla p - \langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle)\right]. \tag{26}$$

Выписанная система уравнений при $\ell = 0$ формально возникает из той же системы при $\ell = 1$, если упростить $\mathbf{w}_{1k}$ до $\mathbf{w}_{0k}$, $\mathbf{w}_1$ до $\mathbf{w}_0$ и отбросить $\tau\operatorname{div}\mathbf{u}$ и $\tau\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u})$ в (22).

Применение операций $\langle\cdot\rangle$ и $\langle\rho_k\cdot\rangle$ к первым уравнениям (21) приводит к уравнениям неразрывности и баланса полной массы вида

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} - \langle\alpha_k\mathbf{w}_{\ell k}\rangle) = 0, \tag{27}$$

$$\partial_t\rho + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\ell)] = 0. \tag{28}$$

Из формул (23), (24) вытекает выражение для средней регуляризующей скорости

$$\langle\alpha_k\mathbf{w}_{\ell k}\rangle = \tau\left[\ell\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (1 - \ell)(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\right\rangle\nabla p - \left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\mathbf{f}_k\right\rangle\right]. \tag{29}$$

Поэтому уравнение неразрывности (27) эквивалентно уравнению для p вида (14) с

$$\mathbf{P}_\tau = \mathbf{u} - \tau[\ell\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (1 - \ell)(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] + \tau\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\mathbf{f}_k\right\rangle.$$

Уравнение (28) и последнее уравнение для p аналогичны (13) и (14) и формально получаются из них при $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}$, $1 \le k \le K$.

Для сравнения укажем, что процедура агрегирования в применении к исходным уравнениям (3) и (2) приводит к следующей системе уравнений

$$\partial_t\alpha_k + \operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u}) = 0, \quad 1 \le k \le K, \quad \langle\alpha_k\rangle = 1, \tag{30}$$

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div}\Pi_0^{NS} + \langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle, \quad \Pi_0^{NS} = \mu[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]. \tag{31}$$

Она же возникает из системы (21), (22) при $\tau = 0$ (в том числе обнулении $\mathbf{w}_{\ell k}$, $\mathbf{w}_\ell$, $\mathbf{w}_0$). Для нее уравнение неразрывности (самого стандартного вида) и уравнения для ρ и p таковы

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \quad \operatorname{div}(\rho^{-1}\nabla p) = \operatorname{div}[\rho^{-1}\operatorname{div}\Pi_0^{NS} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \rho^{-1}\langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle]. \tag{32}$$

Выше в выражении для Π_0^{NS} уже учтено уравнение $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. Уравнение для p получается использованием в уравнении (31) вытекающей из второго уравнения (32) формулы $\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho[\partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}]$ и применения $\operatorname{div}(\rho^{-1}\cdot)$ к результату.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{f}_k = \rho_k\nabla G + \mathbf{h}_k$, *где* $G = G(x)$. *Для системы уравнений* (21)–(26) *при* $\ell = 0,1$ *верно уравнение баланса полной энергии смеси* $\overline{\mathscr{E}} = 0.5\rho|\mathbf{u}|^2 - \rho G$:

$$\partial_t\overline{\mathscr{E}} + \operatorname{div}[\overline{\mathscr{E}}(\mathbf{u}-\mathbf{w}_\ell) + p(\mathbf{u}-\langle\alpha_k\mathbf{w}_{\ell k}\rangle) - \Pi^{NS}\mathbf{u} - \rho(\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}] + \overline{\mathscr{P}}^{NS} + \overline{\mathscr{P}}^{\tau} = \langle\alpha_k\mathbf{h}_k\rangle\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{w}_0) - \ell\tau\langle\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u})\mathbf{h}_k\rangle\cdot\mathbf{u} + \tau\left(\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\mathbf{h}_k\right\rangle - \frac{1}{\rho}\langle\alpha_k\mathbf{h}_k\rangle\right)\cdot\nabla p \quad (33)$$

с диссипацией $\overline{\mathscr{P}}^{NS} + \overline{\mathscr{P}}^{\tau} \ge 0$, *где*

$$\overline{\mathscr{P}}^{NS} := \frac{\mu}{2}|\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T|^2 + \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 \ge 0,$$

$$\overline{\mathscr{P}}^{\tau} := \frac{1}{\tau}\rho|\mathbf{w}_0|^2 + \tau\left(\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\right\rangle - \frac{1}{\rho}\right)|\nabla p|^2 \ge 0.$$

Действительно, в силу уравнения баланса полной массы (28) имеем

$$-\partial_t(\rho G) = \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u}-\mathbf{w}_\ell)G] - \rho(\mathbf{u}-\mathbf{w}_\ell)\cdot\nabla G.$$

Уравнение баланса импульса (22) умножим скалярно на $\mathbf{u}$ и с помощью формулы (17) и уравнения (28) для ρ выведем

$$0.5\partial_t(\rho|\mathbf{u}|^2) + 0.5\operatorname{div}[\rho|\mathbf{u}|^2(\mathbf{u}-\mathbf{w}_\ell)] + (1-\ell\tau\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u}\cdot\nabla p = \operatorname{div}\Pi^{NS}\cdot\mathbf{u} + \operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\rho\mathbf{w}_0)\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot(\langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle - \ell\tau\langle\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u})\mathbf{f}_k\rangle).$$

Сложим последние два равенства, выполним преобразования типа (19)

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\rho\mathbf{w}_0)\cdot\mathbf{u} = \operatorname{div}[\rho(\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}] - \rho\mathbf{w}_0\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \operatorname{div}[\rho(\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}] - \tau^{-1}\rho|\mathbf{w}_0|^2 + \mathbf{w}_0\cdot(\nabla p - \langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle)$$

с учетом определения $\mathbf{w}_0$, см. (26), и выведем

$$\partial_t\overline{\mathscr{E}} + \operatorname{div}[\overline{\mathscr{E}}(\mathbf{u}-\mathbf{w}_\ell) - \rho(\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}] + [\mathbf{u} - \ell\tau(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{w}_0]\cdot\nabla p + \tau^{-1}\rho|\mathbf{w}_0|^2 = \operatorname{div}\Pi^{NS}\cdot\mathbf{u} + (\mathbf{u}-\mathbf{w}_0)\cdot\langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle - \ell\mathbf{u}\cdot\tau\langle\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u})\mathbf{f}_k\rangle - \rho(\mathbf{u}-\mathbf{w}_\ell)\cdot\nabla G. \quad (34)$$

Преобразуем слагаемое с ∇p. Заметим сначала, что в силу формул (26) и (29) имеем

$$\langle\alpha_k\mathbf{w}_{\ell k}\rangle - \ell\tau(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{w}_0 = \tau\left(\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\right\rangle - \frac{1}{\rho}\right)\nabla p - \tau\left(\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\mathbf{f}_k\right\rangle - \frac{1}{\rho}\langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle\right) = \tau\left(\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\right\rangle - \frac{1}{\rho}\right)\nabla p - \tau\left(\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\mathbf{h}_k\right\rangle - \frac{1}{\rho}\langle\alpha_k\mathbf{h}_k\rangle\right).$$

Последняя формула позволяет записать

$$[\mathbf{u} - \ell\tau(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{w}_0]\cdot\nabla p = (\mathbf{u} - \langle\alpha_k\mathbf{w}_{\ell k}\rangle)\cdot\nabla p + \tau\left(\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\right\rangle - \frac{1}{\rho}\right)|\nabla p|^2 - \tau\left(\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\mathbf{h}_k\right\rangle - \frac{1}{\rho}\langle\alpha_k\mathbf{h}_k\rangle\right)\cdot\nabla p,$$

и далее в силу уравнения неразрывности (27) имеем также

$$(\mathbf{u} - \langle\alpha_k\mathbf{w}_{\ell k}\rangle)\cdot\nabla p = \operatorname{div}[p(\mathbf{u} - \langle\alpha_k\mathbf{w}_{\ell k}\rangle)] - p\operatorname{div}(\mathbf{u} - \langle\alpha_k\mathbf{w}_{\ell k}\rangle) = \operatorname{div}[p(\mathbf{u} - \langle\alpha_k\mathbf{w}_{\ell k}\rangle)].$$

Наконец, воспользуемся формулами

$$\operatorname{div}\Pi^{NS}\cdot\mathbf{u} = \operatorname{div}(\Pi^{NS}\mathbf{u}) - \left[\frac{\mu}{2}|\nabla u + \nabla u^T|^2 + \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)(\operatorname{div}u)^2\right], \quad (35)$$

$$[(\mathbf{u}-\mathbf{w}_0)\cdot\langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle - \ell\mathbf{u}\cdot\tau\langle\operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u})\mathbf{f}_k\rangle]|_{\mathbf{f}_k=\rho_k\nabla G} = [\rho(\mathbf{u}-\mathbf{w}_0) - \ell\tau\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\mathbf{u}]\cdot\nabla G = \rho(\mathbf{u}-\mathbf{w}_\ell)\cdot\nabla G$$

и выведем уравнение баланса полной энергии (33). В нем $\overline{\mathscr{P}}^{\tau} \ge 0$ в силу неравенства Коши

$$1 = \langle\alpha_k\rangle^2 = \left\langle\sqrt{\rho_k\alpha_k}\sqrt{\frac{\alpha_k}{\rho_k}}\right\rangle^2 \le \langle\rho_k\alpha_k\rangle\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\right\rangle = \rho\left\langle\frac{\alpha_k}{\rho_k}\right\rangle.$$

Уравнение (33) сохраняет силу и при $\tau = 0$, в том числе при обнулении $\mathbf{w}_{\ell k}$, $\mathbf{w}_\ell$, $\mathbf{w}_0$ и $\overline{\mathscr{P}}^{\tau}$, и тогда оно относится к системе уравнений (30), (31).

Рассмотрим также семейство систем уравнений с общей регуляризующей скоростью

$$\partial_t\alpha_k + \operatorname{div}[\alpha_k(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{w}})] = 0, \quad 1 \le k \le K, \quad \langle\alpha_k\rangle = 1, \quad (36)$$

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{w}})\otimes\mathbf{u}] + (1 - \tau\rho^{-1}\langle\rho_k d_k\rangle)\nabla p = \operatorname{div}(\Pi^{NS} + \mathbf{u}\otimes\rho\mathbf{w}_0) + \langle(\alpha_k - \tau d_k)\mathbf{f}_k\rangle, \quad (37)$$

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_0 + \tau\rho^{-1}\langle\rho_k d_k\rangle\mathbf{u}, \quad (38)$$

где $\mathbf{w}_0$ дается формулой (26), а $d_1,\ldots,d_K$ – произвольные функции (их размерность должна быть сек$^{-1}$). При $d_1 = \ldots = d_K = 0$ система принимает самый простой вид

$$\partial_t\alpha_k + \operatorname{div}[\alpha_k(\mathbf{u}-\mathbf{w}_0)] = 0, \quad 1 \le k \le K, \quad \langle\alpha_k\rangle = 1,$$

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u}-\mathbf{w}_0)\otimes\mathbf{u}] + \nabla p = \operatorname{div}(\Pi^{NS} + \mathbf{u}\otimes\rho\mathbf{w}_0) + \langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle.$$

При $d_k = \operatorname{div}(\alpha_k\mathbf{u})$ имеем $\rho^{-1}\langle\rho_k d_k\rangle = \rho^{-1}\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})$ и $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_1$, см. (25). При $d_k = \rho\operatorname{div}\left(\frac{\alpha_k}{\rho_k}\mathbf{u}\right)$ имеем $\rho^{-1}\langle\rho_k d_k\rangle = \operatorname{div}\mathbf{u}$ и $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_0 + \tau(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u} = \tau\operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \rho^{-1}(\nabla p - \langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle)$.

Применение операций $\langle\cdot\rangle$ и $\langle\rho_k\cdot\rangle$ к первым уравнениям (36) с учетом (38) и (26) приводит к уравнениям неразрывности и баланса полной массы и затем уравнению для p

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{w}}) = 0, \quad (39)$$

$$\partial_t\rho + \mathrm{div}[\rho(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}})] = 0, \quad (40)$$

$$\mathrm{div}(\tau\rho^{-1}\nabla p) =$$
$$= \mathrm{div}\{\mathbf{u} - \tau[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \rho^{-1}\langle\rho_k d_k\rangle\mathbf{u} - \rho^{-1}\langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle]\}.$$

В первых двух уравнениях теперь стоит одна и та же регуляризующая скорость $\tilde{\mathbf{w}}$ в отличие от предыдущих систем.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{f}_k = \rho_k\nabla G + \mathbf{h}_k$, *где* $G = G(x)$. *Для системы уравнений* (36)–(38) *и* (26) *верно уравнение баланса полной энергии смеси*

$$\partial_t\overline{\mathscr{E}} + \mathrm{div}[(\overline{\mathscr{E}} + p)(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}) - \Pi^{NS}\mathbf{u} - \rho(\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}] +$$
$$+ \overline{\mathscr{P}}^{NS} + \tilde{\mathscr{P}}^{\tau} = \langle\alpha_k\mathbf{h}_k\rangle\cdot(\mathbf{u} - \mathbf{w}_0) - \tau\langle d_k\mathbf{h}_k\rangle\cdot\mathbf{u}$$

с $\tilde{\mathscr{P}}^{\tau} = \tau^{-1}\rho|\mathbf{w}_0|^2 \geq 0$ *и диссипацией* $\overline{\mathscr{P}}^{NS} + \tilde{\mathscr{P}}^{\tau} \geq 0$.

Схема вывода указанного уравнения прежняя. В силу уравнений (40) и (37) для последней системы уравнений равенство типа (34) приобретает вид

$$\partial_t\overline{\mathscr{E}} + \mathrm{div}[\overline{\mathscr{E}}(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}) - \rho(\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}] +$$
$$+ [\mathbf{u} - \tau\rho^{-1}\langle\rho_k d_k\rangle\mathbf{u} - \mathbf{w}_0]\cdot\nabla p + \tau^{-1}\rho|\mathbf{w}_0|^2 =$$
$$= \mathrm{div}\Pi^{NS}\cdot\mathbf{u} + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_0)\cdot\langle\alpha_k\mathbf{f}_k\rangle -$$
$$- \mathbf{u}\cdot\tau\langle d_k\mathbf{f}_k\rangle - \rho(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}})\cdot\nabla G.$$

Далее с помощью уравнений (38) и (39) имеем

$$[\mathbf{u} - \tau\rho^{-1}\langle\rho_k d_k\rangle\mathbf{u} - \mathbf{w}_0]\cdot\nabla p =$$
$$= (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}})\cdot\nabla p = \mathrm{div}[p(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}})],$$

$$[(\mathbf{u} - \mathbf{w}_0)\cdot\langle\alpha_k f_k\rangle - \mathbf{u}\cdot\tau\langle d_k\mathbf{f}_k\rangle]|_{\mathbf{f}_k = \rho_k\nabla G} = \rho(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}})\cdot\nabla G.$$

Эти формулы вместе с (35) завершают вывод.

Отметим, что в данном кратком сообщении исходное уравнение (2) было взято не в самом общем виде (в том числе опущены обменные слагаемые). Более общие варианты планируется рассмотреть в дальнейшем.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 22-11-00126.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
2. *Ishii M., Hibiki T.* Thermo-fluid dynamics of two-phase flow. 2nd ed. N.Y.: Springer, 2011.
3. *Vreman A.W.* // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. P. 1639–1651.
4. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
5. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
6. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.–Ижевск: РХД, 2009.
7. *Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* // ДАН. 2014. Т. 459. № 4. С. 395–399.
8. *Балашов В.А., Савенков Е.Б.* // Прикл. мех. техн. физ. 2018. Т. 59. № 3. С. 57–68.
9. *Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Шильников Е.В.* // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. № 11. С. 1899–1914.
10. *Balashov V., Zlotnik A.* // J. Sci. Comput. 2021. V. 86. Article 33. P. 1–29.
11. *Иванов А.В., Крапошин М.В., Елизарова Т.Г.* // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 61. С. 1–27.
12. *Злотник А.А.* // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 65–79.

ON THE CONSTRUCTION OF REGULARIZED EQUATIONS OF MOTION FOR A MIXTURE OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUIDS

A. A. Zlotnik[a,b]

[a] *Higher School of Economics University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Federal Research Center Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

A regularization of two types and aggregation are performed for the system of equations of motion for a multi-velocity mixture of viscous incompressible fluids, and new multi-velocity and single-velocity systems are constructed. For all of them, elliptic equations for the pressure and dissipative equations for the balance of the total energy of the mixture (the sum of its kinetic and potential energies) are derived.

Keywords: equations of motion for a mixture of viscous incompressible fluids, regularization, aggregation, pressure equation, total energy balance equation