ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 507, с. 26–28

МАТЕМАТИКА

УДК 517.987

О ЗАДАЧЕ КАНТОРОВИЧА С ПАРАМЕТРОМ

© 2022 г. В. И. Богачев[1,2,3,*], С. Н. Попова[4,2]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 01.06.2022 г.
После доработки 30.10.2022 г.
Принято к публикации 17.11.2022 г.

Изучается задача Канторовича оптимальной транспортировки мер на метрических пространствах в случае функций стоимости и маргинальных распределений, зависящих от параметра из метрического пространства. Показано, что расстояние Хаусдорфа между множествами вероятностных мер с заданными маргиналами оценивается через расстояния между маргиналами. В качестве следствия доказано, что стоимость оптимальной транспортировки непрерывна по параметру, если функция стоимости и маргинальные распределения непрерывны по этому параметру.

Ключевые слова: задача Канторовича, метрика Канторовича, оптимальный план, расстояние Хаусдорфа, непрерывность по параметру

DOI: 10.31857/S2686954322600380

Пусть μ и ν – борелевские вероятностные меры на полных сепарабельных метрических пространствах X и Y соответственно, $h \geq 0$ – непрерывная функция на $X \times Y$. Классическая задача Канторовича оптимальной транспортировки (см. [1–5]) заключается в минимизации интеграла

$$\int h d\sigma$$

по всем мерам σ из множества $\Pi(\mu, \nu)$, состоящего из борелевских вероятностных мер на $X \times Y$ с проекциями μ и ν на сомножители. Меры μ и ν называются маргинальными распределениями или маргиналами, а функция h называется функцией стоимости. Если существует мера в $\Pi(\mu, \nu)$ с конечным интегралом от h, то минимум достигается, а меры, на которых он достигается, называются оптимальными мерами или оптимальными планами Канторовича. Этот минимум называется оптимальной стоимостью и обозначается через $K_h(\mu, \nu)$.

Если функция стоимости h_t и маргинальные распределения μ_t и ν_t зависят от параметра t из метрического пространства T, то возникает вопрос о непрерывности относительно t оптимальной стоимости $K_{h_t}(\mu_t, \nu_t)$ и возможности выбрать оптимальный план в $\Pi(\mu_t, \nu_t)$ непрерывным по параметру. Кроме того, множество всех транспортных планов $\Pi(\mu_t, \nu_t)$ также зависит от параметра, поэтому можно изучать его непрерывность при наделении пространства множеств мер метрикой Хаусдорфа, порожденной подходящей метрикой на пространстве мер. Задачи Канторовича с параметром исследовались в работах [5–8]. В работе [9] было показано, что соответствие $(\mu, \nu) \mapsto \Pi(\mu, \nu)$ непрерывно. Более короткое доказательство было недавно дано в работе [10], где использовалась метрика Прохорова на пространстве мер. Наш первый результат дает значительно более простую явную оценку с метрикой Канторовича.

Напомним (см. [1, 11]), что слабая топология на пространстве $\mathcal{P}(X)$ борелевских вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве X метризуема посредством метрики Канторовича–Рубинштейна d_{KR}, заданной формулой

$$d_{KR}(\mu, \nu) = \sup\left\{\int f\, d(\mu - \nu) : f \in \mathrm{Lip}_1, |f| \leq 1\right\},$$

где Lip_1 – множество 1-липшицевых функций на пространстве X. Пространство $(\mathcal{P}(X), d_{KR})$ также полно и сепарабельно.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия*
[3] *Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия*
[4] *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*
**E-mail: vibogach@mail.ru*

Для ограниченного пространства X можно использовать метрику Канторовича

$$d_K(\mu,\nu) = \sup\Big\{\int f\,d(\mu-\nu) : f \in \mathrm{Lip}_1\Big\}.$$

Для всякого пространства, лежащего в шаре радиуса 1, верно равенство $d_K = d_{KR}$.

Заметим, что неограниченное метрическое пространство (X,d) можно наделить ограниченной метрикой $\varrho = \min(d,1)$, порождающей исходную топологию, хотя (X,ϱ) не обязано быть полным. Для новой метрики ϱ и соответствующих ей метрик Канторовича–Рубинштейна ϱ_{KR} и Канторовича ϱ_K (отличие от старых возникает из-за различия в классах липшицевых функций) имеем $\varrho_K = \varrho_{KR}$. Кроме того,

$$2^{-1}\varrho_K \le d_{KR} \le 2\varrho_K.$$

Для наших целей можно использовать ограниченную метрику ϱ и ассоциированную с ней метрику Канторовича.

Стоит отметить, что, взяв d в качестве функции стоимости на $X\times X$, получаем формулу двойственности Канторовича $d_K(\mu,\nu) = K_d(\mu,\nu)$.

Пусть (X,d_X) и (Y,d_Y) — метрические пространства. Пространство $X\times Y$ наделим метрикой

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2).$$

Эта метрика порождает соответствующие метрики Канторовича–Рубинштейна и Канторовича на пространстве $\mathcal{P}(X\times Y)$ вероятностных мер на произведении $X\times Y$.

Напомним, что расстояние Хаусдорфа между ограниченными замкнутыми подмножествами A и B метрического пространства (M,d) определяется формулой

$$H(A,B) = \max\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(y,A)\}.$$

Это расстояние будет рассматриваться для подмножеств пространства вероятностных мер $\mathcal{P}(X\times Y)$ с метрикой Канторовича–Рубинштейна d_{KR} (порожденной метрикой на $X\times Y$, введенной выше) или с метрикой Канторовича d_K, если X и Y ограничены, что дает соответствующие расстояния Хаусдорфа H_{KR} и H_K. Как объяснено выше, можно иметь дело с последним случаем и считать, что X и Y ограничены.

Теорема 1. *Пусть* $\mu_1,\mu_2 \in \mathcal{P}(X)$, $\nu_1,\nu_2 \in \mathcal{P}(Y)$. *Тогда для каждой меры* $\sigma_1 \in \Pi(\mu_1,\nu_1)$ *существует такая мера* $\sigma_2 \in \Pi(\mu_2,\nu_2)$, *что*

$$d_K(\sigma_1,\sigma_2) \le d_K(\mu_1,\mu_2) + d_K(\nu_1,\nu_2). \quad (1)$$

Значит, для соответствующей метрики Хаусдорфа имеем

$$H(\Pi(\mu_1,\nu_1),\Pi(\mu_2,\nu_2)) \le d_K(\mu_1,\mu_2) + d_K(\nu_1,\nu_2). \quad (2)$$

Теорема 2. *Предположим, что меры* $\mu_n \in \mathcal{P}(X)$ *слабо сходятся к мере* $\mu \in \mathcal{P}(X)$, *меры* $\nu_n \in \mathcal{P}(Y)$ *слабо сходятся к мере* $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, *а равномерно ограниченные непрерывные функции* $h_n : X\times Y \to [0,+\infty)$ *сходятся к функции* $h : X\times Y \to [0,+\infty)$ *равномерно на компактных множествах. Тогда*

$$K_h(\mu,\nu) = \lim_{n\to\infty} K_{h_n}(\mu_n,\nu_n).$$

Доказательство сводится к случаю общей функции стоимости h, более того, достаточно рассмотреть случай функции h, удовлетворяющей условию Липшица с некоторой постоянной L. В этом случае имеем следующую явную оценку:

$$|K_h(\mu,\nu) - K_h(\mu_n,\nu_n)| \le L d_K(\mu,\mu_n) + L d_K(\nu,\nu_n).$$

В самом деле, пусть $\sigma \in \Pi(\mu,\nu)$ — оптимальная мера. По предыдущей теореме имеется такая мера $\pi \in \Pi(\mu_n,\nu_n)$, что

$$d_K(\sigma,\pi) \le d_K(\mu,\mu_n) + d_K(\nu,\nu_n).$$

Поскольку h является L-липшицевой, имеем

$$\int h\,d\pi - \int h\,d\sigma \le L(d_K(\mu,\mu_n) + d_K(\nu,\nu_n)).$$

Следовательно,

$$K_h(\mu_n,\nu_n) \le K_h(\mu,\nu) + L(d_K(\mu,\mu_n) + d_K(\nu,\nu_n)).$$

Меняя местами пары (μ,ν) и (μ_n,ν_n), получаем оценку

$$K_h(\mu,\nu) \le K_h(\mu_n,\nu_n) + L(d_K(\mu,\mu_n) + d_K(\nu,\nu_n)).$$

Пусть T — метрическое пространство.

Следствие 1. *Предположим, что отображения*

$$t \mapsto \mu_t, \quad T \to \mathcal{P}(X) \quad \text{и} \quad t \mapsto \nu_t, \quad T \to \mathcal{P}(Y)$$

непрерывны и $(t,x,y) \mapsto h_t(x,y)$, $T\times X\times Y \to [0,+\infty)$ — *ограниченная непрерывная функция. Тогда функция* $t \mapsto K_{h_t}(\mu_t,\nu_t)$ *непрерывна.*

Возникает вопрос, существует ли оптимальный план, непрерывно зависящий от параметра t. Можно показать посредством примеров, что такой выбор не всегда возможен. Однако имеются приближенные оптимальные планы, непрерывные по t. Для заданного $\varepsilon > 0$ мера $\sigma \in \Pi(\mu,\nu)$ будет называться ε-оптимальной для функции стоимости h, если

$$\int h\,d\sigma \le K_h(\mu,\nu) + \varepsilon.$$

Теорема 3. *В ситуации предыдущего следствия можно выбрать* ε*-оптимальные меры* $\sigma_t^\varepsilon \in \Pi(\mu_t,\nu_t)$ *для функций стоимости* h_t *так, что они будут непрерывны по* t *в слабой топологии для каждого фиксированного* $\varepsilon > 0$.

Если для каждого t имеется единственный оптимальный план σ_t, то он непрерывен по t.

Рассмотрим нелинейный функционал стоимости вида

$$J_H(\sigma) = \int\limits_{X\times Y} H(x,y,\sigma)\sigma(dxdy),$$

где H — ограниченная непрерывная функция на $X\times Y\times\mathcal{P}(X\times Y)$. Функционалы такого типа были недавно изучены в работах [12—15].

Предположим, что H зависит от параметра $t\in T$ и функция

$$(t,x,y,\sigma)\mapsto H_t(x,y,\sigma)$$

ограничена и непрерывна на $T\times X\times Y\times\mathcal{P}(X\times Y)$.

Теорема 4. *Предположим, что* $t\mapsto\mu_t$ *и* $t\mapsto\nu_t$ — *непрерывные отображения со значениями в* $\mathcal{P}(X)$ *и* $\mathcal{P}(Y)$ *соответственно. Тогда функция*

$$t\mapsto \min_{\sigma\in\Pi(\mu_t,\nu_t)}\int\limits_{X\times Y} H_t(x,y,\sigma)\sigma(dxdy)$$

непрерывна.

Доказательства представленных результатов будут даны в подробной статье.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование поддержано грантом РНФ 22-11-00015.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogachev V.I.* Weak convergence of measures, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2018.
2. *Богачев В.И., Колесников А.В.* // Успехи матем. наук. 2012. Т. 67. № 5. С. 3—110.
3. *Rachev S.T., Rüschendorf L.* Mass transportation problems, V. I, II, Springer, New York, 1998.
4. *Santambrogio F.* Optimal transport для applied mathematicians, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.
5. *Villani C.* Optimal transport, old and new, Springer, New York, 2009.
6. *Малофеев И.И.* // Докл. Акад. наук. 2016. Т. 470. № 1. С. 13—17.
7. *Bogachev V.I., Malofeev I.I.* // J. Math. Anal. Appl. 2020. V. 486. № 1. P. 1—30.
8. *Богачев В.И., Доледенок А.Н., Малофеев И.И.* // Матем. заметки. 2021. Т. 110. № 6. С. 149—153.
9. *Bergin J.* // Econom. Theory. 1999. V. 13. № 2. P. 471—481.
10. *Ghossoub M., Saunders D.* // Econom. Theory Bull. 2021. V. 9. № 1. P. 113—117.
11. *Bogachev V.I.* Measure theory, V. 1, 2, Springer, Berlin, 2007.
12. *Gozlan N., Roberto C., Samson P.-M., Tetali P.* // J. Funct. Anal. 2017. V. 273. № 11. P. 3327—3405.
13. *Alibert J.-J., Bouchitté G., Champion T.* // European J. Appl. Math. 2019. V. 30. № 6. P. 1229—1263.
14. *Backhoff-Veraguas J., Beiglböck M., Pammer G.* // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 2019. V. 58, Paper no. 203. P. 1—28.
15. *Backhoff-Veraguas J., Pammer G.* // Bernoulli. 2022. V. 28. № 1. P. 370—394.

ON KANTOROVICH PROBLEMS WITH A PARAMETER

V. I. Bogachev[a,b,c] **and S. N. Popova**[d,b]

[a] *Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

[c] *Saint-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russian Federation*

[d] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician V.V. Kozlov

In this note, we study the Kantorovich problem of optimal transportation of measures on metric spaces in the case where the cost function and marginal distributions depend on a parameter from a metric space. It is shown that the Hausdorff distance between the sets of probability measures with given marginals can be estimated by the distances between the marginals. As a corollary, it is proved that the cost of optimal transportation is continuous with respect to the parameter if the cost function and marginal distributions are continuous in this parameter.

Keywords: Kantorovich problem, Kantorovich metric, optimal plan, Hausdorff distance, continuity with respect to a parameter