ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 507, с. 66–70

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

СУБРИМАНОВА СФЕРА КАРТАНА

© 2022 г. Ю. Л. Сачков[1,*]

Представлено академиком РАН Р.В. Гамкрелидзе
Поступило 14.06.2022 г.
После доработки 31.08.2022 г.
Принято к публикации 13.09.2022 г.

Описана структура пересечения субримановой сферы на группе Картана с 3-мерным инвариантным многообразием основных симметрий.

Ключевые слова: группа Картана, субриманова геометрия, субриманова сфера

DOI: 10.31857/S2686954322600434

1. ГРУППА КАРТАНА

Алгебра Картана – это свободная нильпотентная алгебра $\mathfrak{g}$ с 2-мя образующими глубины 3. В ней существует базис $X_1,\ldots,X_5$, в котором ненулевые скобки имеют вид

$$[X_1,X_2]=X_3,\quad [X_1,X_3]=X_4,\quad [X_2,X_3]=X_5.$$

Алгебра Картана имеет градуировку

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^{(1)}\oplus\mathfrak{g}^{(2)}\oplus\mathfrak{g}^{(3)},$$

$$\mathfrak{g}^{(1)}=\operatorname{span}(X_1,X_2),\quad \mathfrak{g}^{(2)}=\mathbb{R}X_3,$$
$$\mathfrak{g}^{(3)}=\operatorname{span}(X_4,X_5),$$

$$[\mathfrak{g}^{(1)},\mathfrak{g}^{(i)}]=\mathfrak{g}^{(i+1)},\quad \mathfrak{g}^{(4)}=\{0\},$$

поэтому она является алгеброй Карно. Соответствующая связная односвязная группа Ли G называется группой Картана.

На пространстве $\mathbb{R}^5_{x,y,z,v,w}$ можно ввести закон умножения, превращающий это пространство в группу Картана: $G\cong\mathbb{R}^5_{x,y,z,v,w}$, см. [14] и статьи, цитированные в этой работе. В этой модели левоинвариантные поля, порождающие алгебру Картана, имеют вид

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{x^2+y^2}{2}\frac{\partial}{\partial w},$$
$$X_2=\frac{\partial}{\partial y}+\frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{x^2+y^2}{2}\frac{\partial}{\partial v}.$$

2. ПОСТАНОВКА СУБРИМАНОВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРУППЕ КАРТАНА

2.1. Геометрическая постановка

Пусть на евклидовой плоскости заданы точки $a_0,a_1\in\mathbb{R}^2$, соединенные кривой $\gamma_0\subset\mathbb{R}^2$. Пусть также заданы число $S\in\mathbb{R}$ и точка $c\in\mathbb{R}^2$. Требуется соединить точки a_0, a_1 кратчайшей кривой $\gamma\subset\mathbb{R}^2$ так, чтобы кривые γ_0 и γ ограничивали на плоскости область алгебраической площади S, с центром масс c.

2.2. Задача оптимального управления

Эту геометрическую задачу можно переформулировать [13] как задачу оптимального управления

$$\dot q=u_1X_1(q)+u_2X_2(q),\quad q=(x,y,z,v,w)\in G=\mathbb{R}^5, \tag{1}$$

$$q(0)=q_0,\quad q(t_1)=q_1, \tag{2}$$

$$l=\int_0^{t_1}\sqrt{u_1^2+u_2^2}\,dt\to\min. \tag{3}$$

Это субриманова задача для субримановой структуры на $\mathbb{R}^5$, заданной векторными полями X_1, X_2 как ортонормированным репером. Эта субриманова структура – единственная, с точностью до автоморфизма группы Картана, левоинвариантная субриманова структура с вектором роста $(2,3,5)$. Следовательно, можно считать, что $q_0=$ $=\mathrm{Id}=(0,\ldots,0)$.

[1] *Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук, Переславль-Залесский, Россия*
**E-mail: yusachkov@gmail.com*

3. ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧИ

Субриманова задача на группе Картана есть простейшая левоинвариантная задача со следующими свойствами:

• она имеет анормальные кратчайшие, касающиеся каждого вектора распределения,

• это следующая по сложности после задачи Дидоны задача на свободной группе Карно максимального роста (ее вектор роста равен (2, 3, 5)).

Эта задача – единственная свободная нильпотентная субриманова задача глубины 3 с интегрируемым по Лиувиллю нормальным гамильтоновым полем принципа максимума Понтрягина (неинтегрируемыми по Лиувиллю являются свободные нильпотентные задачи глубины 3, ранга более 2 [4], а также глубины более 3, ранга не менее 2 [1]).

Распределение $\Delta = \mathrm{span}(X_1, X_2)$ имеет 14-мерную алгебру инфинитезимальных симметрий – особую алгебру $\mathfrak{g}_2$, этот факт восходит к знаменитой "пятимерной" работе Эли Картана [5].

Наконец, субриманова задача на группе Картана доставляет нильпотентную аппроксимацию любой задачи с вектором роста (2, 3, 5), в частности:

• задачи о качении двух твердых тел друг по другу без прокручивания и проскальзывания [9, 10],

• машины с двумя прицепами [11],

• задачи о движении электрического заряда в плоскости под действием магнитного поля [12].

Любой из этих причин достаточно для детального исследования субримановой задачи на группе Картана.

4. РАНЕЕ ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Напомним некоторые из результатов, полученных в предыдущих работах [13–16].

• Анормальные траектории (соответствующие анормальному случаю $\nu = 0$ принципа максимума Понтрягина [2, 3]):

– однопараметрические подгруппы $e^{\pm t(u_1 X_1 + u_2 X_2)}$, $u_i \equiv \mathrm{const}$,

– проецируются на плоскость (x, y) в прямые,

– поэтому оптимальны,

– нестрого анормальны, т.е. одновременно являются нормальными.

• Нормальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе принципа максимума Понтрягина с гамильтонианом $H(\lambda) = (\langle\lambda, X_1\rangle^2 + \langle\lambda, X_2\rangle^2)/2$:

$$\dot\theta = c, \quad \dot c = -\alpha\sin(\theta+\beta), \quad \dot\alpha = \dot\beta = 0,$$
$$\dot q = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2. \tag{4}$$

• В фазовом цилиндре уравнения маятника (4) введены координаты (φ, k), в которых это уравнение выпрямляется:

$$\dot\varphi = \sqrt{\alpha}, \quad \dot k = 0.$$

• Получена параметризация геодезических экспоненциальным отображением:

$$\mathrm{Exp}\colon C\times\mathbb{R}_+ \to G, \quad \mathrm{Exp}(\lambda, t) = \pi\circ e^{t\vec H}(\lambda) = q(t),$$
$$C = \mathfrak{g}^* \cap H^{-1}(1/2).$$

• Описана группа симметрий экспоненциального отображения

$$\mathrm{Sym} = \mathrm{SO}(2)\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,$$
$$\mathrm{SO}(2) = \{e^{tX_0} \mid t\in\mathbb{R}\},$$
$$X_0 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial v} + v\frac{\partial}{\partial w},$$
$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 = \{\varepsilon^i \mid i = 1,\ldots,4\},$$

дискретная подгруппа $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ порождена отражениями ε^1, ε^2 маятника в осях θ, c:

$$\varepsilon^1\colon (x,y,z,v,w)\mapsto (x,y,-z,v-xz,w-yz),$$
$$\varepsilon^2\colon (x,y,z,v,w)\mapsto (x,-y,z,-v+xz,w-yz).$$

• Явно описано время разреза $t_{\mathrm{cut}}\colon C\to(0,+\infty]$.

5. СУБРИМАНОВЫ РАССТОЯНИЕ И СФЕРЫ

Напомним основные определения и свойства субримановой метрики и сфер.

Субриманово расстояние (*метрика Карно-Каратеодори*) определяется следующим образом:

$$d(q_0, q_1) = \\ = \inf\left\{\int_0^{t_1}\sqrt{u_1^2+u_2^2}\,dt \mid \text{управление } (u_1,u_2)(t) \text{ переводит } q_0 \text{ в } q_1\right\}.$$

Субриманова сфера радиуса R с центром q_0 есть

$$S_R(q_0) = \{q\in G \mid d(q_0,q) = R\}.$$

В силу инвариантности метрики относительно левых сдвигов на группе Картана $L_q\colon q' \mapsto qq'$,

$$d(qq_0, qq_1) = d(q_0, q_1),$$
$$L_q(S_R(q_0)) = S_R(qq_0).$$

В силу того, что группа Картана есть группа Карно, левоинвариантная субриманова структура согласована с *дилатациями*:

$$\delta_\beta\colon (x,y,z,v,w)\mapsto(\beta x, \beta y, \beta^2 z, \beta^3 v, \beta^3 w), \quad \beta > 0,$$

$$d(\mathrm{Id}, \delta_\beta(q)) = \beta d(\mathrm{Id}, q),$$

$$\delta_\beta(S_R(\mathrm{Id})) = S_{\beta R}(\mathrm{Id}).$$

Поэтому достаточно исследовать единичную сферу

$$S = S_1(\mathrm{Id}) = \{q \in G \mid d(q, \mathrm{Id}) = 1\}.$$

Единичная сфера S параметризуется экспоненциальным отображением:

$$S = \{\mathrm{Exp}(\lambda, 1) \mid \lambda \in C, t_{\mathrm{cut}}(\lambda) \geq 1\}.$$

Субриманова структура и сфера инвариантны относительно группы симметрий $\mathrm{Sym} = SO(2) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

$$g(S) = S, \quad g \in \mathrm{Sym}.$$

Основной объект этой работы – сечение сферы трехмерным инвариантным многообразием основных симметрий $\varepsilon^1, \varepsilon^2$:

$$\widetilde{S} = \{q \in S \mid \varepsilon^1(q) = \varepsilon^2(q) = q\} = S \cap \{z = V = 0\},$$

$$V(q) = xv + yw - z(x^2 + y^2)/2,$$

а также его фактор по группе вращений

$$\widehat{S} = \widetilde{S}/SO(2).$$

Мы ограничиваемся описанием лишь сечения $\widetilde{S}$, так как полная сфера S не допускает столь подробного исследования ввиду сложности ее параметризации: функция $t_{\mathrm{cut}}(\lambda)$, задающая время разреза на группе Картана, в общем случае есть корень уравнения в эллиптических функциях, см. [14, 16].

6. СТРУКТУРА ФАКТОРА $\widehat{S}$

На рис. 1 изображен фактор сечения сферы $\widehat{S}$ на группе Картана в координатах

$$a = \frac{r^2 - \sigma^2}{\sqrt{r^2 + \sigma^2}}, \quad b = \frac{2r\sigma}{\sqrt{r^2 + \sigma^2}},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sigma = \rho - \frac{r^3}{6}, \quad \rho = \sqrt{v^2 + w^2}.$$

Кривая $\widehat{S}$ параметризуется параметром $k \in [0,1]$. Имеется стратификация

$$\widehat{S} = \left(\sqcup_{i=1}^3 \gamma_i\right) \sqcup \{A, C_0, C_1\}, \tag{5}$$

$A = e^{\cos\theta X_1 + \sin\theta X_2}$ есть точка на анормальной траектории, $k = 0$, C_0 есть точка на периодической эйлеровой эластике восьмерке (см. рис. 8 [13]),

$$x = y = 0, \quad k = k_0 \approx 0.9, \tag{6}$$

$$C_1\colon p_z(k) = p_V(k), \quad k = k_1 \approx 0.8,$$

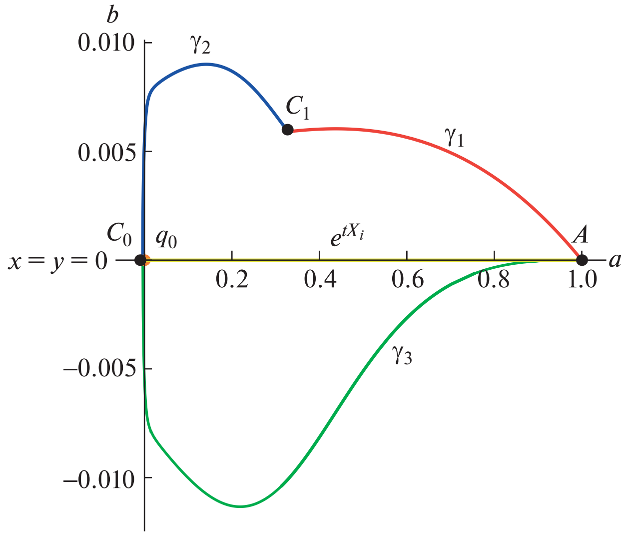

Рис. 1. Фактор сечения сферы $\widehat{S}$ на группе Картана.

$$\begin{aligned} &\gamma_1\colon k \in (0, k_1), \\ &\gamma_2\colon k \in (k_1, k_0), \\ &\gamma_3\colon k \in (k_0, 1). \end{aligned} \tag{7}$$

Определение чисел $k_0, k_1 \in (0,1)$, а также функций $p_z, p_V\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ приведено в работе [14].

На рис. 1:

• надпись e^{tX_i} над горизонтальным отрезком, соединяющим точки q_0 и A, обозначает анормальные траектории, соединяющие начальную точку $q_0 = \mathrm{Id}$ с точками сферы, проецирующимися в точку A,

• надпись $x = y = 0$ справа от точки C_0 обозначает точки периодических эластик-восьмерок,

• точка C_0 имеет координаты $(a, b) = (0, b_0)$, где $b_0 \approx -0.004$.

В последующих теоремах для краткости допускается некоторая вольность обозначений: точки множества $\widehat{S}$ рассматриваются иногда как окружности в G, а иногда как точки в G.

7. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ТОЧЕК ФАКТОРА $\widehat{S}$

Напомним вкратце некоторые необходимые понятия субримановой геометрии, подробнее см. [2, 3].

В рассматриваемой задаче анормальные траектории, выходящие из точки $q_0 = \mathrm{Id}$, суть однопараметрические подгруппы, касающиеся распределения; при этом они являются субримановыми кратчайшими, т.е. реализуют минимум функционала длины (3) между любыми своими точками.

Первая сопряженная точка к q_0 на геодезической есть точка, в которой геодезическая теряет свою локальную оптимальность.

Точка Максвелла на геодезической есть точка, в которую приходят более одной геодезической одинаковой длины, начинающихся в q_0.

Точка разреза на геодезической есть точка, в которой геодезическая теряет свою (глобальную) оптимальность.

Теорема 1.

(1) *A есть точка на анормальной кратчайшей*,

(2) *C_i суть сопряженные точки к q_0, точки Максвелла, точки разреза*,

(3) *$q \in \gamma_i$ суть точки Максвелла, точки разреза, не сопряженные точки к q_0*.

8. КРАТНОСТЬ ТОЧЕК ФАКТОРА $\widehat{S}$

Кратностью точки $q \in G$ называется мощность

$$\mu(q) = \mathrm{card}\{\text{кратчайшие, соединяющие Id и } q\}.$$

Теорема 2.

(1) $\mu(A) = 1$,

(2) $\mu(C_i) = \mathfrak{c}$ (*континуум* $\cong S^1$),

(3) $q \in \gamma_i \Rightarrow \mu(q) = 2$.

9. РЕГУЛЯРНОСТЬ $\widehat{S}$ И $\widetilde{S}$

Теорема 3.

(1) *кривые γ_i аналитичны и регулярны*,

(2) *A, C_i суть особые точки, в них $\widehat{S}$ негладкая, но липшицева*,

(3) *замыкания*

(3.1) $\overline{\gamma}_1 = \gamma_1 \cup \{A, C_0\}$,

(3.2) $\overline{\gamma}_2 = \gamma_2 \cup \{C_0, C_1\}$,

(3.3) $\overline{\gamma}_3 = \gamma_1 \cup \{C_0, A\}$,

суть гладкие кривые класса C^∞.

Теорема 4. *$\widetilde{S}$ есть липшицево многообразие, аналитически диффеоморфное $\widehat{S} \times S^1$ и билипшицево эквивалентное (потому гомеоморфное) тору $\mathbb{T}^2$.*

10. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФАКТОРА $\widehat{S}$

Множество называется *аналитическим* , если в некоторой окрестности каждой своей точки оно задается конечной системой вещественно-аналитических уравнений. Множество называется *полуаналитическим* [6], если в некоторой окрестности каждой своей точки оно задается конечной системой вещественно-аналитических уравнений и неравенств. Множество называется *субаналитическим* [7], если его можно получить из полуаналитических множеств путем конечнократного применения операций объединения, пересечения и взятия образа собственного аналитического отображения. На двумерной плоскости понятия полуаналитических и субаналитических множеств совпадают.

Теорема 5.

- *Множество $\widehat{S}\setminus\{A\}$ полуаналитично, потому субаналитично.*
- *В окрестности точки A кривая γ_3 есть график гладкой неаналитической функции.*
- *Поэтому множество $\widehat{S}$ несубаналитично.*
- *Следовательно, сфера S несубаналитична.*

11. Exp–log КАТЕГОРИЯ

Функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принадлежит exp–log *категории* [18], если она представляется в виде конечной композиции субаналитических функций, экспонент и логарифмов. Множество принадлежит exp–log категории, если в некоторой окрестности любой своей точки оно является графиком отображения, компоненты которого – функции из exp–log категории.

Теорема 6. *В окрестности точки A кривая γ_3 есть график функции из* exp–log *категории. Поэтому множество $\widehat{S}$ принадлежит* exp–log *категории.*

12. СТРАТИФИКАЦИЯ УИТНИ

Напомним следующие фундаментальные факты, относящиеся к *стратификации Уитни* [17]:

- если множество субаналитично, то оно является стратифицированным пространством Уитни [7],
- если множество принадлежит exp–log категории, то оно является стратифицированным пространством Уитни [8].

Теорема 7. *Разбиение* (5) *есть стратификация Уитни.*

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, https://rscf.ru/project/22-11-00140/.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания по изложению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Локуциевский Л.В., Сачков Ю.Л.* Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 5. С. 74–119.
2. *Agrachev A.A., Sachkov Yu.L.* Control Theory from the Geometric Viewpoint. Springer-Verlag, Berlin. 2004.
3. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge Univ. Press, 2019.
4. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S.* Integrability and Nonintegrability of Sub-Riemannian Geodesic Flows on Carnot Groups, Regular and Chaotic Dynamics. 2016. V. 21. № 6. P. 759–774.
5. *Cartan E.* Lès systemes de Pfaff a cinque variables et lès equations aux derivees partielles du second ordre // Ann. Sci. Ècole Normale. 1910. V. 27. № 3. P. 109–192.
6. *Łojasiewicz S.* Ansembles semi-analitiques, Inst. Hautes Ètudes Sci., Bures-sur-Yvette, 1964.
7. *Hironaka H.* Subanalytic sets, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Tokyo, Kinokuniya, 1973. P. 453–493.
8. *Ta Lê Loi.* Verdier and strict Thom stratifications in o-minimal structures // Illinois J. Math. 1998. V. 42. Is. 2. P. 347–356.
9. *Li Z., Canny J.*, Motion of two rigid bodies with rolling constraint // IEEE Trans. on Robotics and Automation. 1990. V. 1. № 6. P. 62–72.
10. *Marigo A., Bicchi A.* Rolling bodies with regular surface: the holonomic case, in book: “Differential geometry and control: Summer Research Institute on Differential Geometry and Control”, publ. Univ. Colorado, Boulder, G. Ferreyra et al. Eds., 1999. P. 241–256.
11. *Laumond J.P.* Nonholonomic motion planning for mobile robots // Preprint No. 98211. Toulouse, France: LAAS-CNRS, 1998.
12. *Anzaldo-Menezes A., Monroy-Pérez F.* Charges in magnetic fields and sub-Riemannian geodesics// Contemporary trends in nonlinear geometric control theory and its applications. Singapore: World Scientific, 2002. P. 183–202.
13. *Сачков Ю.Л.* Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны. Мат. Сборник. 2003. V. 194 (9). P. 63–90.
14. *Сачков Ю.Л.* Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны. Мат. Сборник. 2006. Т. 197. № 6. С. 111–160.
15. *Sachkov Yu.L.* Conjugate time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group // Journal of Dynamical and Control Systems. 2021. V. 27. P. 709–751.
16. *Ardentov A., Hakavuori E.* Cut time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group // ESAIM:COCV. 2022. V. 28. P. 12.
17. *Горески М., Макферсон Р.* Стратифицированная теория Морса, М.: Мир, 1991.
18. *Van Den Dries L., Macintyre A., Marker D.* The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation // Ann. of Math. 1994. V. 140. № 2. P. 183–205.

SUB-RIEMANNIAN CARTAN SPHERE

Yu. L. Sachkov[a]

[a] *Ailamazyan Program Systems Institute, Russian Academy of Sciences, Pereslavl-Zalessky, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS R.V. Gamkrelidze

The structure of intersection of the sub-Riemannian sphere on the Cartan group with a 3-dimensional invariant manifold of main symmetries is described.

Keywords: Cartan group, sub-Riemannian geometry, sub-Riemannian sphere