ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 507, с. 5–9

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983.28

ФУНКЦИИ ОТ ПАР НЕОГРАНИЧЕННЫХ НЕКОММУТИРУЮЩИХ САМОСОПРЯЖЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ

 А. Б. Александров[1,*], В. В. Пеллер[1,2,]**

Представлено академиком С.В. Кисляковым
Поступило 28.06.2022 г.
После доработки 14.07.2022 г.
Принято к публикации 21.09.2022 г.

Для пары (A, B) не обязательно ограниченных и не обязательно коммутирующих самосопряжённых операторов и для функции f на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ из неоднородного класса Бесова $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$ определяется функция $f(A, B)$ от этих операторов как плотно определённый оператор. Рассматривается задача оценок функций $f(A, B)$ при возмущениях пары (A, B). Устанавливается, что если $1 \le p \le 2$, (A_1, B_1) и (A_2, B_2) – пары не обязательно ограниченных и не обязательно коммутирующих самосопряжённых операторов таких, что операторы $A_1 - A_2$ и $B_1 - B_2$ входят в класс Шаттена–фон Неймана $\mathbf{S}_p$ при $p \in [1, 2]$ и $f \in B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$, то имеет место следующая оценка липшицева типа: $\|f(A_1, B_1) - f(A_2, B_2)\|_{\mathbf{S}_p} \le \text{const}\|f\|_{B^1_{\infty,1}} \max\{\|A_1 - A_2\|_{\mathbf{S}_p}, \|B_1 - B_2\|_{\mathbf{S}_p}\}$.

Ключевые слова: неограниченные самосопряжённые операторы, классы Шаттена–фон Неймана, классы Бесова, двойные операторные интегралы, тройные операторные интегралы, тензорные произведения Хогерупа, функции от пар некоммутирующих самосопряжённых операторов

DOI: 10.31857/S2686954322600446

1. ВВЕДЕНИЕ

Результаты этой заметки распространяют результаты работы [1] на случай пар неограниченных некоммутирующих самосопряжённых операторов. Напомним (см., например, [1]), что для пары (A, B) не обязательно ограниченных самосопряжённых операторов и для комплексно-значной функции f на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, являющейся мультипликатором Шура относительно произвольных борелевских спектральных мер, функция $f(A, B)$ от A и B определяется как двойной операторный интеграл

$$f(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x, y)\,dE_A(x)\,dE_B(y) \stackrel{\text{def}}{=} \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x, y)\,dE_A(x)\,I\,dE_B(y), \tag{1.1}$$

где I – единичный оператор, а E_A и E_B – спектральные меры операторов A и B. Тогда $f(A, B)$ – ограниченный оператор. Мы отсылаем читателя к работам [5, 6] и [7] по поводу определения и основных свойств двойных операторных интегралов.

Мы также отсылаем читателя к работам [10] и [2] по поводу определения мультипликаторов Шура по отношению к спектральным мерам. Напомним (см. [10] и [2]), что функция Φ является *мультипликаторм Шура по отношению к спектральным мерам* E_1 *и* E_2 в том и только в том случае, когда Φ входит в *тензорное произведение Хогерупа* $L^\infty(E_1) \otimes_{\rm h} L^\infty(E_2)$, т.е. Φ допускает представление вида

$$\Phi(x, y) = \sum_n \varphi_n(x)\psi_n(y), \tag{1.2}$$

где $\varphi_n \in L^\infty(E_1)$, $\psi_n \in L^\infty(E_2)$ и

$$\left(\left\|\sum_n |\varphi_n(x)|^2\right\|_{L^\infty(E_1)} \left\|\sum_n |\psi_n(x)|^2\right\|_{L^\infty(E_2)}\right)^{1/2} < \infty. \tag{1.3}$$

[1]*Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия*
[2]*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
**E-mail: aall54eexx@gmail.com*
***E-mail: peller@math.msu.edu*

Нормой функции Φ в $L^\infty(E_1)\otimes_{\mathrm h}L^\infty(E_2)$ является инфимум левой части (1.3) по всем представлениям вида (1.2). В этом случае

$$\iint_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}}\Phi(x,y)dE_1(x)QdE_2(y)=\sum_n\Big(\int\varphi_n dE_1\Big)Q\Big(\int\psi_n dE_2\Big),$$

причём ряд в правой части сходится в слабой операторной топологии и

$$\left\|\iint\Phi dE_1QdE_2\right\|\le\|\Phi\|_{L^\infty\otimes_{\mathrm h}L^\infty}\|Q\|$$

(см., например, [2]).

В этой заметке мы определим функции $f(A,B)$ от неограниченных некоммутирующих операторов для некоторых функций f, которые не входят в тензорное произведение Хогерупа пространств ограниченных функций. В этом случае $f(A,B)$ оказывается плотно определённым неограниченным оператором.

В работе [1] для пар (A_1,B_1) и (A_2,B_2) некоммутирующих ограниченных самосопряжённых операторов A и B и для функций f *однородного* класса Бесова $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$ определены операторы $f(A_1,B_1)$ и $f(A_2,B_2)$ и получена следующая оценка липшицева типа в классах Шаттена–фон Неймана $\mathbf{S}_p$ при $1\le p\le 2$:

$$\|f(A_1,B_1)-f(A_2,B_2)\|_{\mathbf{S}_p}\le$$
$$\le\mathrm{const}\|f\|_{B^1_{\infty,1}}\max\{\|A_1-B_1\|_{\mathbf{S}_p},\|A_2-B_2\|_{\mathbf{S}_p}\}.$$

В той же работе [1] показано, что такое же неравенство неверно при $p>2$ и неверно в операторной норме.

Напомним также, что в случае функций одного самосопряжённого оператора такие оценки липшицева типа верны при $1\le p\le\infty$, см. [10] и [11].

Основная цель этой заметки – установить это неравенство для пар неограниченных некоммутирующих самосопряжённых операторов для функций f из *однородного* пространства Бесова $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$. Мы отсылаем читателя к работе [9] по поводу определения и основных свойств пространств Бесова.

Как и в случае ограниченных некоммутирующих операторов, ключевую роль играют тройные операторные интегралы. Мы отсылаем читателя к работам [1] и [3] по поводу тройных операторных интегралов.

2. ТРОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ХОГЕРУПА И ХОГЕРУПО-ПОДОБНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Тройные операторные интегралы – это выражения вида

$$\int_{\mathscr{X}_1}\int_{\mathscr{X}_2}\int_{\mathscr{X}_3}\Psi(x_1,x_2,x_3)dE_1(x_1)TdE_2(x_2)RdE_3(x_3),\qquad(2.1)$$

где Ψ – ограниченная измеримая функция на $\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2\times\mathscr{X}_3$; E_1, E_2 и E_3 – спектральные меры в гильбертовом пространстве, а T и R – ограниченные линейные операторы. Такие операторные интегралы можно определить при некоторых предположениях на Ψ, T и R.

В работе [12] интегралы вида (2.1) определены для произвольных ограниченных операторов T и R и для функций Ψ из интегрального проектированного тензорного произведения $L^\infty(E_1)\otimes_{\mathrm i}L^\infty(E_2)\otimes_{\mathrm i}L^\infty(E_3)$. При этом справедливо следующее неравенство:

$$\left\|\iiint\Psi\, dE_1T\,dE_2)RdE_3\right\|_{\mathbf{S}_r}\le\|\Psi\|_{L^\infty\otimes_{\mathrm i}L^\infty\otimes_{\mathrm i}L^\infty}\|T\|_{\mathbf{S}_p}\|R\|_{\mathbf{S}_q},$$
$$T\in\mathbf{S}_p,\quad R\in\mathbf{S}_q,$$
$$\frac1r=\frac1p+\frac1q\quad\text{при условии}\quad\frac1p+\frac1q\le1.$$

Затем в работе [8] тройные операторные интегралы были определены для функций Ψ из *тензорного произведения Хогерупа* $L^\infty(E_1)\otimes_{\mathrm h}L^\infty(E_2)\otimes_{\mathrm h}L^\infty(E_3)$. Мы отсылаем читателя к работе [3] по поводу определения и основных свойств таких тензорных произведений Хогерупа. Отметим здесь, что для функций Ψ из $L^\infty(E_1)\otimes_{\mathrm h}L^\infty(E_2)\otimes_{\mathrm h}L^\infty(E_3)$ имеют место оценки

$$\left\|\iiint\Psi\, dE_1T\,dE_2RdE_3\right\|\le\|\Psi\|_{L^\infty\otimes_{\mathrm h}L^\infty\otimes_{\mathrm h}L^\infty}\|T\|\cdot\|R\|$$

в случае ограниченных операторов T и R и

$$\left\|\iiint\Psi\, dE_1T\,dE_2RdE_3\right\|_{\mathbf{S}_r}\le\|\Psi\|_{L^\infty\otimes_{\mathrm h}L^\infty\otimes_{\mathrm h}L^\infty}\|T\|_{\mathbf{S}_p}\|R\|_{\mathbf{S}_q}$$

в случае, когда $T\in\mathbf{S}_p$, $R\in\mathbf{S}_q$, $1/r=1/p+1/q$ и $p,q\in[2,\infty]$.

Оказалось, однако, что для липшицевых оценок функций от пар некоммутирующих операторов нам нужны тройные операторные интегралы, подынтегральные функции которых входят в так называемые хогерупо-образные тензорные произведения первого вида $L^\infty(E_1)\otimes_{\mathrm h}L^\infty(E_2)\otimes^{\mathrm h}L^\infty(E_3)$ и второго вида $L^\infty(E_1)\otimes^{\mathrm h}L^\infty(E_2)\otimes_{\mathrm h}L^\infty(E_3)$. Такие тензорные произведения были введены в [1] и изучены более подробно в [3].

В работах [1] и [3] показано, что если $\Psi\in L^\infty(E_1)\otimes_{\mathrm h}L^\infty(E_2)\otimes^{\mathrm h}L^\infty(E_3)$, $1\le p\le2$, $T\in\mathbf{S}_p$, а R – ограниченный линейный оператор, то можно определить тройной операторный интеграл вида (2.1) и при этом имеет место оценка

$$\left\|\iiint \Psi\, dE_1 T\, dE_2 R\, dE_3\right\|_{\mathbf{S}_p} \le \|\Psi\|_{L^\infty\otimes_{\rm h} L^\infty\otimes^{\rm h} L^\infty}\|T\|_{\mathbf{S}_p}\|R\|, \quad 1 \le p \le 2.$$

А если же $\Psi \in L^\infty(E_1) \otimes^{\rm h} L^\infty(E_2) \otimes_{\rm h} L^\infty(E_3)$, $1 \le p \le 2$, T – ограниченный линейный оператор, а $R \in \mathbf{S}_p$, то

$$\left\|\iiint \Psi\, dE_1 T\, dE_2 R\, dE_3\right\|_{\mathbf{S}_p} \le \|\Psi\|_{L^\infty\otimes^{\rm h} L^\infty\otimes_{\rm h} L^\infty}\|T\| \cdot \|R\|_{\mathbf{S}_p}.$$

Кроме того,

$$\|W\|_{\mathbf{S}_p} \le \|\Psi\|_{L^\infty\otimes^{\rm h} L^\infty\otimes_{\rm h} L^\infty}\|T\| \cdot \|R\|_{\mathbf{S}_p}. \tag{2.2}$$

Заметим, что в работе [1] были получены более общие оценки в классах Шаттена–фон Неймана для тройных операторных интегралов, подыинтегральная функция которых входит в хогерупо-образные тензорные произведения пространств L^∞. Позже в работе [3] оценки работы [1] были распространены на ещё более общий случай.

Отметим, что таким же образом можно определить хогерупо-образные тензорные произведения $\mathscr{B}^\infty \otimes_{\rm h} \mathscr{B}^\infty \otimes^{\rm h} \mathscr{B}^\infty$ и $\mathscr{B}^\infty \otimes^{\rm h} \mathscr{B}^\infty \otimes_{\rm h} \mathscr{B}^\infty$, где $\mathscr{B}^\infty$ – пространство ограниченных борелевских функций на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь непрерывно дифференцируемую функцию f на $\mathbb{R}^2$ и определим разделённые разности $\mathfrak{D}^{[1]}f$ и $\mathfrak{D}^{[2]}f$ равенствами

$$(\mathfrak{D}^{[1]}f)(x_1,x_2,y) \stackrel{\rm def}{=} \frac{f(x_1,y)-f(x_2,y)}{x_1-x_2}, \quad x_1 \ne x_2$$

и

$$(\mathfrak{D}^{[2]}f)(x,y_1,y_2) \stackrel{\rm def}{=} \frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2}, \quad y_1 \ne y_2.$$

В случае, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$, в определениях функций $\mathfrak{D}^{[1]}f$ и $\mathfrak{D}^{[2]}f$ нужно заменить разделённые разности соответствующими частными производными.

Определим класс $\mathscr{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$ при $\sigma > 0$ следующим образом:

$$\mathscr{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2) \stackrel{\rm def}{=}$$
$$\stackrel{\rm def}{=} \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^2) : \operatorname{supp}\mathscr{F}f \subset \{t \in \mathbb{R}^2 : \|t\|_2 \le \sigma\}\};$$

здесь мы используем обозначение $\mathscr{F}$ для преобразования Фурье.

В работе [1] было установлено, что при $\sigma > 0$ и $f \in \mathscr{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$ имеют место оценки

$$\|\mathfrak{D}^{[1]}f\|_{\mathscr{B}^\infty\otimes_{\rm h}\mathscr{B}^\infty\otimes^{\rm h}\mathscr{B}^\infty} \le \text{const}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \tag{2.3}$$

$$\|\mathfrak{D}^{[2]}f\|_{\mathscr{B}^\infty\otimes^{\rm h}\mathscr{B}^\infty\otimes_{\rm h}\mathscr{B}^\infty} \le \text{const}\,\sigma\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{2.4}$$

Отсюда вытекает, что если функция f входит в однородный класс Бесова $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$, то $\mathfrak{D}^{[1]}f \in \mathscr{B}^\infty \otimes_{\rm h} \mathscr{B}^\infty \otimes^{\rm h} \mathscr{B}^\infty$ и $\mathfrak{D}^{[2]}f \in \mathscr{B}^\infty \otimes^{\rm h} \mathscr{B}^\infty \otimes_{\rm h} \mathscr{B}^\infty$, при этом

$$\|\mathfrak{D}^{[1]}f\|_{\mathscr{B}^\infty\otimes_{\rm h}\mathscr{B}^\infty\otimes^{\rm h}\mathscr{B}^\infty} \le \text{const}\|f\|_{B^1_{\infty,1}},$$

$$\|\mathfrak{D}^{[2]}f\|_{\mathscr{B}^\infty\otimes^{\rm h}\mathscr{B}^\infty\otimes_{\rm h}\mathscr{B}^\infty} \le \text{const}\|f\|_{B^1_{\infty,1}}.$$

Основным результатом работы [1] является следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Пусть* $1 \le p \le 2$, $f \in B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$, *а* (A_1, B_1) *и* (A_2, B_2) – *пары ограниченных некоммутирующих самосопряжённых операторов таких, что* $A_2 - A_1 \in \mathbf{S}_p$ *и* $B_2 - B_1 \in \mathbf{S}_p$. *Тогда*

$$f(A_1,B_1) - f(A_2,B_2) = \iiint \frac{f(x_1,y)-f(x_2,y)}{x_1-x_2} \times$$
$$\times\, dE_{A_1}(x_1)(A_1-A_2)dE_{A_2}(x_2)dE_{B_1}(y) +$$
$$+ \iiint \frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2} \times$$
$$\times\, dE_{A_2}(x)dE_{B_1}(y_1)(B_1-B_2)dE_{B_2}(y_2).$$

Более того, имеет место оценка

$$\|f(A_1,B_1) - f(A_2,B_2)\|_{\mathbf{S}_p} \le$$
$$\le \text{const}\|f\|_{B^1_{\infty,1}} \max\{\|A_1 - A_2\|_{\mathbf{S}_p}, \|B_1 - B_2\|_{\mathbf{S}_p}\}.$$

Основная цель этой заметки состоит в том, чтобы установить такое же неравенство в случае неограниченных некоммутирующих пар операторов при условии, что функция f входит в неоднородный класс Бесова $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$.

3. ФУНКЦИИ ОТ ПАР НЕОГРАНИЧЕННЫХ НЕКОММУТИРУЮЩИХ САМОСОПРЯЖЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Напомним, что мы определили функции от необязательно коммутирующих самосопряжённых операторов формулой (1.1) в случае, когда функция f входит в тензорное произведения Хогерупа $\mathscr{B}^\infty \otimes_{\rm h} \mathscr{B}^\infty$. Причём имеет место оценка

$$\|f(A,B)\| \le \|f\|_{\mathscr{B}^\infty\otimes_{\rm h}\mathscr{B}^\infty}, \quad f \in \mathscr{B}^\infty \otimes_{\rm h} \mathscr{B}^\infty.$$

Пусть f – функция двух переменных, а $f_\sharp$ – функция, определённая равенством $f_\sharp(s,t) \stackrel{\rm def}{=}$ $\stackrel{\rm def}{=} (1-{\rm i}t)^{-1}f(s,t)$. Предположим, что $f_\sharp \in \mathscr{B}^\infty \otimes_{\rm h} \mathscr{B}^\infty$. Определим оператор $f(A,B)$ равенством

$$f(A,B) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f_\sharp(A,B)(I-\mathrm{i}B) = \\ = \left(\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_\sharp(s,t)dE_A(s)dE_B(t)\right)(I-\mathrm{i}B).$$

Тогда $f(A,B)$ — плотно определённый оператор, область определения которого совпадает с областью определения $D(B)$ оператора B. Он не обязательно ограничен, но оператор $f(A,B)(I-\mathrm{i}B)^{-1}$ ограничен.

Заметим, что если $f \in \mathscr{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\sigma > 0$, то $f_\sharp \in \mathscr{B}^\infty \otimes_{\mathrm{h}} \mathscr{B}^\infty$. Это было установлено в следствии 7.3 работы [4] для функций f из $(\mathscr{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2))_+$, т.е. для функций f из $\mathscr{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$, преобразование Фурье которых сосредоточено на $[0,\infty)\times[0,\infty)$. Очевидно, что это же верно и при $f \in \mathscr{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\sigma > 0$. Таким образом, если $f \in \mathscr{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$, то оператор $f_\sharp(A,B)$ ограничен, в то время как $f(A,B)$ — не обязательно ограниченный плотно определённый оператор с областью определения $D(B)$. При этом

$$\|f_\sharp\|_{\mathscr{B}^\infty \otimes_{\mathrm{h}} \mathscr{B}^\infty} \le \mathrm{const}(1+\sigma)\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2\infty})}.$$

Это можно проверить так же, как и в следствии 7.3 работы [4].

Теорема 3.1. *Пусть* $f \in Б_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$. *Тогда* $f_\sharp \in \mathscr{B}^\infty \otimes_{\mathrm{h}} \mathscr{B}^\infty$ *и* $\|f_\sharp\|_{\mathscr{B}^\infty \otimes_{\mathrm{h}} \mathscr{B}^\infty} \le \mathrm{const}\|f\|_{Б_{\infty,1}^1}$.

4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ РАЗНОСТЕЙ И ОЦЕНКИ ЛИПШИЦЕВА ТИПА

В этом разделе мы сформулируем основной результат заметки. Мы получим формулу для операторной разности в виде тройных операторных интегралов и получим оценку липшицева типа в норме $\mathbf{S}_p$ при $p \in [1,2]$. Мы будем иметь дело с парами не обязательно ограниченных и не обязательно коммутирующих самосопряжённых операторов.

Теорема 4.1. *Пусть* $f \in \mathscr{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$, *а* A_1, A_2 *и* B — *самосопряжённые операторы такие, что* $A_1 - A_2 \in \mathbf{S}_2$. *Тогда*

$$f(A_1,B) - f(A_2,B) = \iiint \frac{f(x_1,y)-f(x_2,y)}{x_1-x_2} dE_{A_1}(x_1)\times \\ \times(A_1-A_2)dE_{A_2}(x_2)dE_B(y)$$

и тем самым

$$\|f(A_1,B)-f(A_2,B)\|_{\mathbf{S}_p} \le \mathrm{const}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\|A_1-A_2\|_{\mathbf{S}_p}.$$

Напомним, что $\mathfrak{D}^{[1]}f \in \mathscr{B}^\infty \otimes_{\mathrm{h}} \mathscr{B}^\infty \otimes^{\mathrm{h}} \mathscr{B}^\infty$ (см. (2.3)), и, стало быть, тройной операторный интеграл в правой части равенства определён.

Следствие 4.2. *Пусть* $f \in Б_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$ *и* $1 \le p \le 2$. *Предположим, что* A_1, A_2 *и* B — *самосопряжённые операторы такие, что* $A_2 - A_1 \in \mathbf{S}_p$. *Тогда имеет место неравенство*:

$$\|f(A_1,B)-f(A_2,B)\|_{\mathbf{S}_p} \le \mathrm{const}\|f\|_{Б_{\infty,1}^1}\|A_1-A_2\|_{\mathbf{S}_p}.$$

Теорема 4.3. *Пусть* $f \in \mathscr{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$. *Предположим, что* A, B_1 *и* B_2 — *самосопряжённые операторы такие, что* $B_2 - B_1 \in \mathbf{S}_2$. *Тогда имеет место следующее равенство*:

$$f(A,B_1) - f(A,B_2) = \iiint \frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2}\times \\ \times dE_A(x)dE_{B_1}(y_1)(B_1-B_2)dE_{B_2}(y_2).$$

Опять же $\mathfrak{D}^{[2]}f \in \mathscr{B}^\infty \otimes^{\mathrm{h}} \mathscr{B}^\infty \otimes_{\mathrm{h}} \mathscr{B}^\infty$ (см. (2.4)), и, стало быть, тройной операторный интеграл в правой части равенства определён.

Следствие 4.4. *Пусть* $f \in \mathscr{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$ *при* $p \in [1,2]$. *Предположим, что* A, B_1 *и* B_2 — *самосопряжённые операторы такие, что* $B_2 - B_1 \in \mathbf{S}_p$. *Тогда*

$$\|f(A,B_1)-f(A,B_2)\|_{\mathbf{S}_p} \le \mathrm{const}\sigma\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\|B_1-B_2\|_{\mathbf{S}_p}.$$

Теорема 4.5. *Пусть* $f \in Б_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$ *при* $p \in [1,2]$. *Предположим, что* A_1, A_2, B_1 *и* B_2 — *самосопряжённые операторы такие, что* $A_2 - A_1 \in \mathbf{S}_p$ *и* $B_2 - B_1 \in \mathbf{S}_p$. *Тогда*

$$\|f(A_1,B_1)-f(A_2,B_2)\|_{\mathbf{S}_p} \le \\ \le \mathrm{const}\|f\|_{Б_{\infty,1}^1}\max\{\|A_1-A_2\|_{\mathbf{S}_p},\|B_1-B_2\|_{\mathbf{S}_p}\}.$$

Теорема 4.6. *Пусть* $f \in Б_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$. *Предположим, что* A_1, A_2, B_1 *и* B_2 — *самосопряжённые операторы такие, что* $A_1 - A_2 \in \mathbf{S}_2$ *и* $B_1 - B_2 \in \mathbf{S}_2$. *Тогда имеет место тождество*

$$f(A_1,B_1) - f(A_2,B_2) = \\ = \iiint \frac{f(x_1,y)-f(x_2,y)}{x_1-x_2}\times \\ \times dE_{A_1}(x_1)(A_1-A_2)dE_{A_2}(x_2)dE_{B_1}(y) + \\ + \iiint \frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2}\times \\ \times dE_{A_2}(x)dE_{B_1}(y_1)(B_1-B_2)dE_{B_2}(y_2).$$

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования в § 2 выполнены за счёт гранта Российского научного фонда № 18-11-00053. Исследования в § 3 выполнены за счет гранта Российского научного фонда № 20-61-46016. Остальные результаты финансированы грантом Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, выполненных под руководством ведущих учёных, соглашение 075-15-2021-602.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aleksandrov A.B., Nazarov F.L., Peller V.V.* Functions of noncommuting self-adjoint operators under perturbation and estimates of triple operator integrals // Adv. Math. 2016. V. 295. P. 1–52.
2. *Aleksandrov A.B., Peller V.V.* Operator Lipschitz functions // Uspekhi Matem. Nauk. 2016. V. 71. № 4. P. 3–106.
3. *Aleksandrov A.B., Peller V.V.* Multiple operator integrals, Haagerup and Haagerup-like tensor products, and operator ideals // Bulletin London Math. Soc. 2016. V. 49. P. 463–479.
4. *Aleksandrov A.B., Peller V.V.* Functions of perturbed commuting dissipative operators // Math. Nachr., to appear
5. *Birman M.S., Solomyak M.Z.* Double Stieltjes operator integrals // Problems of Math. Phys., Leningrad. Univ. 1966. V. 1. P. 33–67 (Russian).
6. *Birman M.S., Solomyak M.Z.* Double Stieltjes operator integrals. II, Problems of Math. Phys., Leningrad. Univ. 1967. V. 2. P. 26–60 (Russian).
7. *Birman M.S., Solomyak M.Z.* Double Stieltjes operator integrals. III, Problems of Math. Phys., Leningrad. Univ. 1973. V. 6. P. 27–53 (Russian).
8. *Juschenko K., Todorov I.G., Turowska L.* Multidimensional operator multipliers // Trans. Amer. Math. Soc. 2009. V. 361. P. 4683–4720.
9. *Peetre J.* New thoughts on Besov spaces, Duke Univ. Press., Durham, NC, 1976.
10. *Peller V.V.* Hankel operators in the theory of perturbations of unitary and self-adjoint operators, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 1985. V. 19. № 2. P. 37–51 (Russian).
11. *Peller V.V.* Hankel operators in the perturbation theory of unbounded self-adjoint operators, Analysis and partial differential equations, 529–544, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 122, Marcel Dekker, New York, 1990.
12. *Peller V.V.* Multiple operator integrals in perturbation theory // Bull. Math. Sci. 2016. V. 6. P. 15–88.

FUNCTIONS OF PERTURBED PAIRS OF NONCOMMUTING UNBOUNDED SELF-ADJOINT OPERATORS

A. B. Aleksandrov[a] and V. V. Peller[a,b]

[a] *St. Petersburg Departmen of Steklov Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia*

[b] *St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

For a pair (A, B) of not necessarily bounded and not necessarily commuting self-adjoint operators and for a function f on the Euclidean space $\mathbb{R}$ that belongs to the inhomogeneous Besov class $Б^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$, we define the function $f(A, B)$ of such operators as a densely defined operator. We consider the problem of estimating the functions $f(A, B)$ under perturbations of the pair (A, B). It turns out that if $1 \le p \le 2$, (A_1, B_1) and (A_2, B_2) are pairs of not necessarily bounded and not necessarily commuting self-adjoint operators such that both $A_1 - A_2$ and $B_1 - B_2$ belong to the Schatten–von Neumann class $\mathbf{S}_p$ with $p \in [1,2]$ and $f \in Б^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$, then the following Lipschitz type estimate holds: $\|f(A_1, B_1) - f(A_2, B_2)\|_{\mathbf{S}_p} \le \text{const}\|f\|_{Б^1_{\infty,1}} \max\{\|A_1 - A_2\|_{\mathbf{S}_p}, \|B_1 - B_2\|_{\mathbf{S}_p}\}$.

Keywords: unbounded self-adjoint operators, Schatten–von Neumann classes, Besov classes, double operator integrals, triple operator integrals, Haagerup tensor products, functions of pairs of noncommuting self-adjoint operators