ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 507, с. 15–21

МАТЕМАТИКА

УДК 517.535, 517.547

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ГЕЛЬДЕРОВЫХ ОБЛАСТЯХ

© 2022 г. А. Д. Баранов[1,*], И. Р. Каюмов[2,]**

Представлено академиком С.В. Кисляковым
Поступило 19.07.2022 г.
После доработки 07.09.2022 г.
Принято к публикации 16.09.2022 г.

Доказано, что двойной интеграл от модуля производной ограниченной рациональной функции степени n в гельдеровой области на плоскости ограничен числом порядка $\sqrt{\log n}$. Полученное неравенство усиливает классический результат Е.П. Долженко (1966), а также недавние результаты авторов. Построены примеры, показывающие влияние длины границы на поведение двойных интегралов от модулей производных ограниченных рациональных функций.

Ключевые слова: рациональная функция, пространство Харди, неравенство Харди–Литлвуда, гельдерова область

DOI: 10.31857/S2686954322600471

1. ВВЕДЕНИЕ

С.Н. Мергелян [1] построил пример ограниченной и аналитической в круге $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ функции f такой, что

$$I(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)| dA(z) = \infty,$$

где $dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy$, $z = x + iy$. Несколько позже У. Рудин [2] доказал существование бесконечного произведения Бляшке B такого, что $I(B) = \infty$ и, более того, $\int_0^1 |B'(re^{i\theta})| dr = \infty$ для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$. Аналогичный, но более явный пример был построен Дж. Пиранянoм [3].

Возникает естественный вопрос: что будет в случае, если функция f является рациональной. Очевидно, что в этом случае интеграл $I(f)$ будет ограничен некоторой величиной, зависящей от n. Оценке этой величины для достаточно широкого класса областей на плоскости была посвящена статья Е.П. Долженко [4]. В этой статье показано, что при определенных условиях регулярности границ (существование кривизны, удовлетворяющей условию Гельдера) конечносвязной области G имеют место следующие неравенства для рациональных функций R степени не выше n с полюсами вне $\overline{G}$ [4, Теорема 2.2]: если $1 < p \le 2$, то

$$\int_G |R'(w)|^p dA(w) \le C n^{p-1} \|R\|^p_{H^\infty(G)}; \tag{1}$$

если мы дополнительно предположим, что область G ограничена, то

$$\int_G |R'(w)| dA(w) \le C \ln(n+1) \|R\|_{H^\infty(G)}. \tag{2}$$

Здесь константа C зависит только от области G и от p, $H^\infty(G)$ обозначает множество всех функций, ограниченных и аналитических в G, а $\|f\|_{H^\infty(G)} = \sup_{w\in G} |f(w)|$.

В дальнейшем интегральные неравенства для производных рациональных функций (преимущественно в круге) изучались в работах А.А. Пекарского [5], В.И. Данченко [6, 7], и многих других авторов (см., например, [8, 9]). Короткое доказательство неравенств Долженко в случае круга с заменой H^∞-нормы на более слабую $BMOA$-норму можно найти в [9].

Уже простейший пример круга $\mathbb{D}$ и функции $R(z) = z^n$ показывает точность неравенства (1). В то же время условия на регулярность области можно существенно ослабить. Авторами настоящей

[1] *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
[2] *Казанский федеральный университет, Казань, Россия*
**E-mail: anton.d.baranov@gmail.com*
***E-mail: ikayumov@kpfu.ru*

статьи в [10] было показано, что неравенство (1) остается справедливым для всех многосвязных областей класса Джона и для всех гельдеровых областей (см. определения в § 2). В частности, (1) выполнено, если область G односвязна, а конформное отображение φ единичного круга $\mathbb{D}$ на область G удовлетворяет условию $\varphi' \in H^s(\mathbb{D})$, где $s > 1$, а $H^s(\mathbb{D})$ обозначает пространство Харди в круге. Тем самым, мы вплотную приближаемся к условию спрямляемости границы $\varphi' \in H^1(\mathbb{D})$.

Однако оказалось, что неравенство (2) для случая $p = 1$ можно существенно улучшить. В статье [10] авторами показано, что точный порядок роста интеграла $\int_G |R'(w)|dA(w)$ с ростом n равен $\sqrt{\log(n+1)}$. Однако это неравенство было доказано при более сильных условиях регулярности области, а именно $\varphi' \in H^2(\mathbb{D})$. В настоящей работе, используя более тонкую технику, нам удалось освободиться от лишних условий и доказать оценку для значительно более широкого класса областей.

Теорема 1. *Пусть G — ограниченная односвязная гельдерова область со спрямляемой границей. Тогда найдется такая константа $C > 0$, зависящая от области G, что для любой рациональной функции R степени не выше n выполнено*

$$\int_G |R'(w)|dA(w) \le C\sqrt{\ln(n+1)}\|R\|_{H^\infty(G)}. \qquad (3)$$

Поскольку любая конечносвязная область класса Джона представима как объединение конечного числа односвязных гельдеровых областей, мы можем распространить оценки и на этот класс областей.

Следствие 1. *Пусть G — ограниченная конечносвязная область класса Джона со спрямляемой границей. Тогда найдется такая константа $C > 0$, зависящая от области G, что для любой рациональной функции R степени не выше n выполнено* (3).

Неравенство (3) уже является точным по порядку даже в случае круга, при этом в качестве R можно взять произведение Бляшке степени n. Доказательство точности этого неравенства, приведенное в [10], основано на тонких результатах Н.Г. Макарова [11] и Р.势势 势 Бануэлоса и Ч.Н. Мура [12] о граничном поведении функций из пространства Блоха.

Второй главный результат статьи относится к важному частному случаю, когда область G является кольцом. Для $r > 1$ и $0 < l < r$ рассмотрим кольцо $K_{l,r} = \{z : r - l < |z| < r\}$ радиуса r и ширины l. Поставленная задача интересна с точки зрения исследования влияния параметров кольца на оценку интеграла. Оказалось, что при при фиксированной ширине l и малых r имеет место логарифмическая зависимость от n, а зависимость от r линейна. Однако с ростом r зависимость от радиуса исчезает.

Теорема 2. *Найдется такая константа $C > 0$, что для любых l, r, удовлетворяющих условиям $r \ge 1$ и $0 < l \le r/2$, и для всякой рациональной функции R степени n, для которой $\|R\|_{H^\infty(K_{l,r})} \le 1$, выполнено*

$$\int_{K_{l,r}} |R'(w)|dA(w) \le \begin{cases} Cr\left(1+\sqrt{\log\dfrac{nl}{r}}\right), & r \le nl, \\ Cnl, & r \ge nl. \end{cases} \qquad (4)$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Напомним, что односвязная область G называется гельдеровой с показателем $\alpha \in (0,1]$, если конформное отображение φ круга $\mathbb{D}$ на область G лежит в классе Гельдера с показателем α в $\overline{\mathbb{D}}$. Хорошо известно, что область G гельдерова с показателем α тогда и только тогда, когда

$$|\varphi'(z)| \le \frac{C}{(1-|z|)^{1-\alpha}}, \quad z \in \mathbb{D}, \qquad (5)$$

для некоторого $C > 0$ (см., например, [13, стр. 74]. В частности, область G будет гельдеровой (с показателем $1 - 1/p$), если $\varphi' \in H^p$ для некоторого $p > 1$, в то время как условие $\varphi' \in H^1$ описывает области со спрямляемой границей.

Конечносвязная область G называется *областью класса Джона*, если существует константа $C > 0$ такая, что любые две точки $a, b \in G$ могут быть соединены кривой γ в G так, что для любого $w \in \gamma$ имеет место неравенство

$$\min(\operatorname{diam}\gamma(a,w), \operatorname{diam}\gamma(w,b)) \le C\operatorname{dist}(w, \partial G). \qquad (6)$$

Здесь $\gamma(a,w)$ и $\gamma(w,b)$ — части кривой γ, на которые ее разбивает точка w. Данное определение имеет много различных эквивалентных формулировок [14, 15]. В частности, условие (6) исключает наличие у области внутренних нулевых углов.

Для области G, ограниченной жордановой кривой, имеется эквивалентное определение [15, стр. 103]: G является областью класса Джона тогда и только тогда, когда для любых точек $a, b \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}$ найдется соединяющая их кривая $\gamma \subset \mathbb{C}\backslash\overline{G}$ такая, что $\operatorname{diam}\gamma \le K|a-b|$ для некоторой абсолютной константы K (в геометрической теории функций области с таким свойством называют *линейно связными*; следует отметить, что в общей топологии этот термин имеет другой смысл). Известно, что односвязная область класса Джона является гельдеровой (см. [15, стр. 96–100]).

Перед тем, как приступить к доказательству теоремы 1, для удобства читателей сформулируем классическую теорему Литтлвуда—Пэли (см., например, [16, стр. 332]).

Теорема Литтлвуда—Пэли. *Существует константа $C > 0$ такая, что для любой функции $g \in H^1$ имеет место неравенство*

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (1-r)|g'(re^{it})|^2 dr\right)^{1/2} dt \le C\|g\|_{H^1}.$$

В дальнейшем мы пишем $X \lesssim Y$, если найдется числовая константа $C > 0$ (возможно, зависящая от области G) такая, что $X \le CY$ для всех допустимых значений переменных.

Доказательство теоремы 1. Пусть φ — конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на G. Тогда

$$\int_G |R'(w)|dA(w) = \int_{\mathbb{D}} |R'(\varphi(z))| \times |\varphi'(z)|^2 dA(z).$$

Пусть K — некоторая константа, значение которой будет выбрано позже. Оценим интеграл

$$\int_{|z|<1-1/n^K} |R'(\varphi(z))| \times |\varphi'(z)|^2 dA(z).$$

Отметим, что $R'(\varphi(z)) \cdot (\varphi'(z))^2 = (R(\varphi(z))\varphi'(z))' - R(\varphi(z))\varphi''(z)$. Положим $g(z) = R(\varphi(z))\varphi'(z)$. Тогда $g \in H^1$ и $\|g\|_{H^1} \le \|R\|_{H^\infty(G)}\|\varphi'\|_{H^1}$. Имеем

$$\int_{|z|<1-1/n^K} |g'(z)|dA(z) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{1-1/n^K} |g'(re^{it})|rdr\right)dt \le$$

$$\le \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{1-1/n^K} (1-r)|g'(re^{it})|^2 dr\right)^{1/2}\left(\int_0^{1-1/n^K} \frac{r^2 dr}{1-r}\right)^{1/2} dt \le$$

$$\le \sqrt{K\log n}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{1-1/n^K} (1-r)|g'(re^{it})|^2 dr\right)^{1/2} dt \lesssim$$

$$\lesssim \sqrt{\log n}\|g\|_{H^1} \lesssim \sqrt{\log n}\|\varphi'\|_{H^1}\|R\|_{H^\infty(G)}.$$

Предпоследнее неравенство вытекает из вышеупомянутой теоремы Литтлвуда—Пэли.

Аналогичным образом легко оценить $R(\varphi(z))\varphi''(z)$. Для этого достаточно применить предыдущие оценки к функции $g = \varphi'$. Итак, мы получили оценку

$$\int_{|z|<1-1/n^K} |R'(\varphi(z))| \cdot |\varphi'(z)|^2 dA(z) \le \sqrt{\log n}\|\varphi'\|_{H^1} \times \|R\|_{H^\infty(G)}. \tag{7}$$

Заметим, что она справедлива для любой области со спрямляемой границей, и мы не пользовались условием Гельдера.

Теперь оценим соответствующий интеграл в кольце $\{1 - 1/n^K < |z| < 1\}$. По неравенству Коши—Буняковского—Шварца

$$\int_{|z|>1-1/n^K} |R'(\varphi(z))| \cdot |\varphi'(z)|^2 dA(z) \le$$

$$\le \left(\int_{|z|>1-1/n^K} |R'(\varphi(z))|^2|\varphi'(z)|^2 dA(z)\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int_{|z|>1-1/n^K} |\varphi'(z)|^2 dA(z)\right)^{1/2}.$$

Поскольку $R'(\varphi(z))\varphi'(z) = (R \circ \varphi)'(z)$, а функция $R \circ \varphi$ является n-листной (как композиция рациональной функции степени n и однолистной функции), первый интеграл не превосходит площади образа области G под действием рациональной функции R, умноженной на n:

$$\int_{|z|>1-1/n^K} |R'(\varphi(z))|^2|\varphi'(z)|^2 dA(z) \le n\|R\|^2_{H^\infty(G)}.$$

Поскольку область G является гельдеровой (с некоторым показателем $\alpha \in (0,1]$), то имеет место неравенство (5). Воспользуемся им для оценки второго интеграла:

$$\int_{|z|>1-1/n^K} |\varphi'(z)|^2 dA(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{1-1/n^K}^1 |\varphi'(re^{it})|^2 rdrdt \lesssim$$

$$\lesssim \int_{1-1/n^K}^1 \int_0^{2\pi} \frac{|\varphi'(re^{it})|}{(1-r)^{1-\alpha}} dtdr \lesssim$$

$$\lesssim \|\varphi'\|_{H^1} \int_{1-1/n^K}^1 \frac{dr}{(1-r)^{1-\alpha}} \lesssim n^{-K\alpha}\|\varphi'\|_{H^1}.$$

Итак,

$$\int_{|z|>1-1/n^K} |R'(\varphi(z))| \times |\varphi'(z)|^2 dA(z) \lesssim \|R\|_{H^\infty(G)}\|\varphi'\|^{1/2}_{H^1} n^{\frac{1-K\alpha}{2}}.$$

Выбирая соответствующее K (например, $K = 1/\alpha$), мы видим, что интеграл по кольцу $\{1 - 1/n^K < |z| < 1\}$ не превосходит $C\|R\|_{H^\infty(G)}$. Таким образом, неравенство (3) является следствием неравенства (7), что и завершает доказательство теоремы.

3. СЛУЧАЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В связи с доказанной теоремой 1 возникает вполне естественный вопрос: что будет в случае неограниченной конечносвязной области со спрямляемой границей? Простой пример области $G = \{|z| > 1\}$ и рациональной функции $R(z) = 1/z$ показывает, что теорема 1 неверна ввиду того, что $\int_{|z|>1} |z|^{-2} dA(z) = \infty$. Распространим эту теорему на неограниченный случай, естественно в некотором более слабом варианте. С этой целью введем в рассмотрение весовую функцию ρ такую, что

$$0 \le \rho(w) \le 1, \quad \int\limits_{|w|>1} \frac{\rho(w)}{|w|^2} dA(w) \le 1. \tag{8}$$

Имеет место

Теорема 3. *Пусть G — неограниченная конечносвязная область класса Джона со спрямляемой границей. Предположим, что весовая функция ρ удовлетворяет условиям* (8). *Тогда найдется такая константа $C > 0$, зависящая от области G, что для любой рациональной функции R степени не выше n выполнено*

$$\int\limits_G |R'(w)|\rho(w)dA(w) \le C\sqrt{\ln(n+1)}\|R\|_{H^\infty(G)}. \tag{9}$$

Доказательство. Поскольку граница области G спрямляема и, в частности, ограничена, найдется $K > 1$ такое, что $G \supset \{|w| > K\}$. Рассмотрим $\tilde{G} = G \cap \{|w| < 2K\}$. Это ограниченная область класса Джона и неравенство

$$\int\limits_{\tilde{G}} |R'(w)|\rho(w)dA(w) \le C\sqrt{\ln(n+1)}\|R\|_{H^\infty(G)}$$

следует из теоремы 1. Для оценки интеграла по $\{|w| > 2K\}$ применим конформное отображение $w = 1/z$. Тогда

$$\int\limits_{|w|>2K} |R'(w)|\rho(w)dA(w) = \int\limits_{|z|<1/(2K)} |(R(1/z))'| \frac{\rho(1/z)}{|z|^2} dA(z).$$

Учитывая, что $|R(1/z)| \le \|R\|_{H^\infty(G)}$ при $|z| < 1/K$, мы получаем, что $|(R(1/z))'| \le 2K\|R\|_{H^\infty(G)}$ при $|z| < 1/(2K)$, в то время как $\int\limits_{|z|<1/(2K)} |z|^{-2}\rho(1/z)dA(z) \le 1$ по условию (8).

4. ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛА ПО КОЛЬЦУ

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится ряд известных неравенств для производных рациональных функций. Первое из них – еще одно неравенство Е.П. Долженко. Пусть R — рациональная функция степени n, полюса которой лежат вне единичной окружности $\mathbb{T}$. Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} |R'(e^{it})|dt \le 2\pi n\|R\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \tag{10}$$

Это неравенство представляет собой частный случай намного более общего неравенства, полученного Е.П. Долженко в 1978 г. [17]. Изложение результата Долженко и обсуждение истории этого вопроса можно найти в [18].

Для ограниченной области $G \subset \mathbb{C}$ и $w \in G$ положим

$$d_G(w) = \operatorname{dist}(w, \partial G).$$

Предположим, что область G односвязна, а конформное отображение φ единичного круга $\mathbb{D}$ на G удовлетворяет условию $\varphi' \in H^\infty(\mathbb{D})$. Тогда для любой функции $f \in H^\infty(G)$ и $p \ge 2$ имеет место неравенство

$$\int\limits_G |f'(w)|^p d_G^{p-1}(w)dA(w) \le \|\varphi'\|_{H^\infty(\mathbb{D})}\|f\|^p_{H^\infty(G)}. \tag{11}$$

Это неравенство содержится, например, в [10, теорема 5]. Приведем совсем короткое доказательство. Замена переменной $w = \varphi(z)$ и неравенство $d_G(w) \le |\varphi'(z)|(1-|z|^2)$ дают

$$\int\limits_G |f'(w)|^p d_G^{p-1}(w)dA(w) \le \int\limits_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi)'(z)|^p |\varphi'(z)| \times$$
$$\times (1-|z|^2)^{p-1}dA(z) \le \|\varphi'\|_{H^\infty(\mathbb{D})}\|f\|^{p-2}_{H^\infty(G)} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi)'(z)|^2(1-|z|^2)dA(z) \le \|\varphi'\|_{H^\infty(\mathbb{D})}\|f\|^p_{H^\infty(G)}.$$

Мы воспользовались хорошо известными неравенствами $|g'(z)|(1-|z|^2) \le \|g\|_{H^\infty(\mathbb{D})}$ и

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |g'(z)|^2(1-|z|^2)dA(z) \le \|g\|^2_{H^2(\mathbb{D})} \le \|g\|^2_{H^\infty(\mathbb{D})}, \tag{12}$$

примененными к $g = f\circ\varphi$ (заметим, что $\|g\|_{H^\infty(\mathbb{D})} = \|f\|_{H^\infty(G)}$).

Далее нам понадобится одна простая лемма, утверждение которой напрямую следует из формулы замены переменной.

Лемма 1. *Пусть $G \subset \mathbb{C}$, $r > 0$ и $rG = \{rz : z \in G\}$. Тогда*

$$\int\limits_{rG} |f'(w)|dA(w) = r\int\limits_G |(f(rz))'|dA(z)$$

для любой функции f, аналитической в rG.

Доказательство теоремы 2. Покажем, что интеграл в левой части неравенства (4) не превосходит каждого из выражений в правой части независимо от соотношения между n, r и l. Ясно, однако, что при $n \ge r/l$ более точной является первая оценка, а при $n \le r/l$ — вторая.

Применение леммы 5 сводит задачу к исследованию интеграла от $|R'|$ по кольцу $\{1 - l/r < |z| < 1\}$. Пусть теперь R — рациональная функция степени

n и $|R(z)| \le 1$ при $1 - l/r < |z| < 1$. Из неравенства (10) вытекает, что $\int\limits_0^{2\pi} |R'(\rho e^{it})| dt \le 2\pi n$, $1 - l/r < \rho < 1$. Умножив это неравенство на ρ и затем проинтегрировав по $\rho \in [1 - l/r, 1]$, мы получаем

$$\int\limits_{1-l/r<|z|<1} |R'(z)| dA(z) \le \frac{2nl}{r},$$

что и требовалось. Таким образом, при всех l, r и для любой рациональной функции R степени n, для которой $\|R\|_{H^\infty(K_{l,r})} \le 1$, справедливо неравенство $\int\limits_{K_{l,r}} |R'(w)| dA(w) \le 2nl$.

Применяя лемму 1 (с коэффициентом растяжения l), мы получаем, что

$$\int\limits_{K_{l,r}} |R'(w)| dA(w) = l \int\limits_{r/l-1<|z|<r/l} |(R(lz))'| dA(z).$$

Таким образом, достаточно рассмотреть случай кольца $\mathscr{A} = \{r - 1 < |w| < r\}$, $r \ge 2$. Покажем, что в этом случае

$$\int\limits_{\mathscr{A}} |R'(w)| dA(w) \le Cr\left(1 + \sqrt{\log\frac{n}{r}}\right),$$

где C — некоторая абсолютная числовая константа, не зависящая от R и r. В дальнейшем символ C будет обозначать такие (возможно разные в разных формулах) константы. Применяя это неравенство с r/l вместо r, мы получим первую оценку в (4).

Положим $\delta = \dfrac{r}{3n}$. Тогда, по неравенству Долженко (10),

$$\int\limits_{r-\delta<|w|<r} |R'(w)| dA(w) = r \int\limits_{1-\delta/r<|z|<1} |(R(rz))'| dA(z) \le 2\delta n < r.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{r-1<|w|<r-1+\delta} |R'(w)| dA(w) \le Cr.$$

Чтобы оценить интеграл по кольцу $\mathscr{A}_0 = \{r - 1 + \delta < |w| < r - \delta\}$, зафиксируем односвязные области G и G_0 со следующими свойствами:

(i) $G_0 \subset G \subset \mathscr{A}$ и $\operatorname{dist}(G_0, \partial G) \ge C\delta$, где C — некоторая абсолютная числовая константа;

(ii) $G_0 \subset \mathscr{A}_0$ и $\mathscr{A}_0 = \bigcup_{k=0}^{2[r]-1} e^{\pi i k/[r]} G_0$;

(iii) G и G_0 — области с границей класса C^∞.

Очевидно, такие области существуют. Достаточно рассмотреть криволинейные прямоугольники $\{r - 1 < |z| < r, |\arg z| < 4\pi/[r]\}$ и $\{r - 1 + \delta < |z| < r - \delta, |\arg z| < 2\pi/[r]\}$, которые уже удовлетворяют условиям (i) и (ii). Сглаживая границы в углах, получим области G и G_0.

Заметим к тому же, что если мы обозначим через φ конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на область G, то $\varphi' \in H^\infty(\mathbb{D})$ и, более того, нормы таких конформных отображений можно считать ограниченными равномерно по $r \ge 2$.

Пусть R — рациональная функция степени не выше n и $\|R\|_{H^\infty(\mathscr{A})} \le 1$. По неравенству (11) имеем

$$\int\limits_G |R'(w)|^2 d_G(w) dA(w) \le C,$$

где константа C не зависит от R и r. Следовательно,

$$\int\limits_{G_0} |R'(w)| dA(w) \le$$

$$\le \left(\int\limits_{G_0} |R'(w)|^2 d_G(w) dA(w)\right)^{1/2} \left(\int\limits_{G_0} d_G^{-1}(w) dA(w)\right)^{1/2}.$$

Из построения области G_0 как сглаженного криволинейного прямоугольника и свойства $\operatorname{dist}(G_0, \partial G) \ge C\delta$ вытекает, что

$$\int\limits_{G_0} d_G^{-1}(w) dA(w) \le C \log\frac{1}{\delta} = C \log\frac{n}{r} + O(1).$$

Таким образом, по неравенству (11)

$$\int\limits_{G_0} |R'(w)| dA(w) \le C\left(1 + \sqrt{\log\frac{n}{r}}\right).$$

Просуммировав интегралы по поворотам области G_0 и используя свойство (ii), получим

$$\int\limits_{\mathscr{A}_0} |R'(w)| dA(w) \le Cr\left(1 + \sqrt{\log\frac{n}{r}}\right).$$

Тем самым, теорема 2 полностью доказана.

Обсудим теперь вопрос о порядковой точности оценок (4). Точность второй оценки при $r \ge nl$ легко получается рассмотрением простого примера: $w = z^n/r^n$. С первой оценкой дела обстоят несколько сложнее. Однако она также является точной в смысле порядка при условии $r/l \le n^\alpha$, где α — некоторое число из промежутка $(0,1)$. Докажем этот факт. Без ограничения общности можно полагать, что $l = 1$. Как было упомянуто выше, нами был построен пример ограниченной в круге $\mathbb{D}$ рациональной функции R такой, что

$$\int\limits_{|w|<1} |R'(w)| dA(w) \ge c\sqrt{\ln(n+1)}$$

для некоторой константы $c > 0$, не зависящей от n. Поэтому

$$\int\limits_{|w|<1-1/n^{\alpha}} |R'(w)|dA(w) + \int\limits_{K_{1/n^{\alpha},1}} |R'(w)|dA(w) \geq c\sqrt{\ln(n+1)}.$$

Оценим в этом неравенстве первый интеграл. Применяя неравенство (12), получим

$$\int\limits_{|w|<1-1/n^{\alpha}} |R'(w)|dA(w) \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{|w|<1-1/n^{\alpha}} |R'(w)|^2(1-|w|^2)dA(w) \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{|w|<1-1/n^{\alpha}} \frac{dA(w)}{1-|w|^2} \right)^{1/2} \leq c_1\sqrt{\alpha \log n}$$

с некоторой абсолютной константой c_1. Если взять $\alpha < (c/c_1)^2$, то наши оценки показывают, что

$$\int\limits_{K_{1/n^{\alpha},1}} |R'(w)|dA(w) \geq c_2\sqrt{\ln(n+1)},$$

где $c_2 = c - c_1\sqrt{\alpha}$. В силу леммы 1, отсюда вытекает порядковая точность оценок (4) при $r/l \leq n^{\alpha}$.

Более того, несколько видоизменяя рассуждения, можно показать, что существует бесконечная последовательность натуральных чисел n таких, что оценки (4) точны по порядку при $r/l \leq n^{\alpha}$ для всех $\alpha < 1$. Рассмотрим следующую экстремальную задачу: найти

$$M_n = \sup_{f\in H^{\infty}(\mathbb{D}),\|f\|_{H^{\infty}}\leq 1} \int\limits_{|z|<1-1/n} |f'(z)|dA(z).$$

Нетрудно установить, что эта задача асимптотически эквивалентна такой же задаче в классе ограниченных в $\mathbb{D}$ рациональных функций степени n. Это следует из того факта, что любая ограниченная в $\mathbb{D}$ функция может быть равномерно приближена в круге $\{|z| < 1 - 1/n\}$ вместе с производной своим многочленом Тейлора степени $2[n\log n]$ (см. [10], лемма 1), после чего достаточно взять произведение Бляшке степени $2[n\log n]$ с таким же многочленом Тейлора. Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\sqrt{\log n}} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} \sup_{\|R\|_{H^{\infty}}\leq 1} \int\limits_{|z|<1-1/n} |R'(z)|dA(z),$$

где в правой части супремум взят по множеству всех рациональных функций R степени не выше n и таких, что $\|R\|_{H^{\infty}} \leq 1$.

Рассмотрим теперь подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такую, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n_k}} \sup_{\|f\|_{H^{\infty}}\leq 1} \int\limits_{|w|<1-1/n_k} |f'(w)|dA(w) = \limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\sqrt{\log n}}.$$

Именно, для такой подпоследовательности натуральных чисел оценки (4) будут точны в порядковом смысле для всех фиксированных $\alpha < 1$ при условии, что $r/l \leq n_k^{\alpha}$. В самом деле, в интеграле по кругу $\{|z| < 1 - 1/n_k^{\alpha}\}$ произойдет уменьшение константы перед $\sqrt{\log n_k}$ в $\sqrt{\alpha}$ раз. Поэтому оставшийся интеграл по кольцу $\{1-1/n_k^{\alpha} < |w| < 1-1/n_k\}$ даст такой же порядок асимптотики $\sqrt{\log n_k}$. Далее, применяя масштабирующую лемму 1, убеждаемся в точности оценок (4).

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы показали, что для ограниченных рациональных функций в гельдеровых областях со спрямляемой границей справедливо неравенство (3). Возникает естественный вопрос о необходимости условия гельдеровости. Весьма правдоподобной выглядит гипотеза, что для любой односвязной области со спрямляемой границей верна оценка

$$\int\limits_{G} |R'(w)|dA(w) \leq CL\sqrt{\ln(n+1)}\|R\|_{H^{\infty}(G)}, \tag{13}$$

где L – длина границы области G, а $C > 0$ – некоторая абсолютная числовая константа. Отметим, что если удастся доказать оценку (13) для областей с гельдеровыми границами, то простыми аппроксимационными соображениями условие гельдеровости можно отбросить.

Очевидно, что пример с кольцом подтверждает нашу гипотезу. Этот же пример показывает, что нулевые углы не играют существенной роли (кольцо с большим радиусом и фиксированной толщиной – это, фактически, область с нулевым углом). С другой стороны, пример показывает, что зависимость оценки от длины границы может быть весьма нетривиальной, и, по-видимому, ничего лучше оценки (3) получить не удастся (если не делать дополнительных предположений). Для достаточно “толстых” областей этот факт очевиден, что видно из масштабирующей леммы. Тонкие же области, как показывает пример, могут давать более сложную зависимость, хотя, вероятно, и не противоречат нашей гипотезе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2021-602.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мергелян С.Н.* Об одном интеграле, связанном с аналитическими функциями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. № 5. С. 395–400.
2. *Rudin W.* The radial variation of analytic functions // Duke Math. J. 1955. V. 22. № 2. P. 235–242.
3. *Piranian G.* Bounded functions with large circular variation // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. V. 19. № 6. P. 1255–1257.
4. *Долженко Е.П.* Рациональные аппроксимации и граничные свойства аналитических функций // Матем. сб. 1966. Т. 69(111). № 4. С. 497–524.
5. *Пекарский А.А.* Неравенства типа Бернштейна для произвольных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппрокцимации // Матем. сб. 1984. Т. 124(166). № 4(8). С. 571–588.
6. *Данченко В.И.* Об одной интегральной оценке производной рациональной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 2. С. 277–293.
7. *Данченко В.И.* Некоторые интегральные оценки производных рациональных функций на множествах с ограниченной плотностью // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 10. С. 33–52.
8. *Dyn'kin E.M.* Inequalities for rational functions // J. Approx. Theory. 1997. V. 91. P. 349–367.
9. *Baranov A., Zarouf R.* The differentiation operator from model spaces to Bergman spaces and Peller type inequalities // J. Anal. Math. 2019. V. 137. № 1. P. 189–209.
10. *Баранов А.Д., Каюмов И.Р.* Оценки интегралов от производных рациональных функций в многосвязных областях на плоскости // Изв. РАН. Сер. матем. 2022. Т. 86. № 5. С. 5–17.
11. *Макаров Н.Г.* Вероятностные методы в теории конформных отображений // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 3–59; Leningrad Math. J. 1990. V. 1. № 1. P. 1–56.
12. *Bañuelos R., Moore C.N.* Mean growth of Bloch functions and Makarov's law of the iterated logarithm // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 112. P. 851–854.
13. *Duren P.* Theory of H^p spaces. New York, Academic Press, 1970.
14. *Martio O., Sarvas J.* Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1979. V. 4. № 2. P. 383–401.
15. *Pommerenke Ch.* Boundary behaviour of conformal maps. Springer-Verlag New-York, 1992.
16. *Pavlovic M.* Function classes on the unit disc. V. 52. De Gruyter Studies in Mathematics, 2019.
17. *Долженко Е.П.* Некоторые точные интегральные оценки производных рациональных и алгебраических функций. Приложения // Analysis Mathematica. 1978. V. 4. № 4. P. 247–268.
18. *Baranov A.D., Fedorovskiy K.Yu.* On L^1-estimates of derivatives of univalent rational functions // J. Anal. Math. 2017. V. 132. P. 63–80.

INTEGRAL ESTIMATES OF DERIVATIVES OF RATIONAL FUNCTIONS IN HÖLDER DOMAINS

A. D. Baranov[a] and I. R. Kayumov[b]

[a] *Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia*

[b] *Kazan Federal University, Kazan, Russia*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

It is shown that the area integral of the modulus of the derivative of a bounded rational function of degree n in a Hölder domain in the complex plane is bounded by a quantity of order $\sqrt{\log n}$. The obtained inequality improves a classical result of E.P. Dolzhenko (1966) as well as some recent results due to the authors. Examples are constructed illustrating the influence of the length of the boundary on the behavior of area integrals of the moduli of the derivatives of bounded rational functions.

Keywords: Rational functions, Hardy space, Hardy-Littlewood inequality, Hölder domain