

УДК 510.635, 510.665

## АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ ТЕОРИЙ БИНАРНОГО ПРЕДИКАТА В ЯЗЫКАХ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2022 г. М. Рыбаков<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 07.08.2022 г.

После доработки 19.09.2022 г.

Принято к публикации 23.09.2022 г.

Доказана  $\Sigma_1^0$ -трудность различных теорий бинарного предиката в языке с тремя предметными переменными и бинарной предикатной буквой (без констант и равенства). Показано, что при добавлении равенства, композиции и транзитивного замыкания получаются  $\Pi_1^1$ -трудные теории бинарного предиката при двух предметных переменных в языке.

*Ключевые слова:* классическая логика предикатов, диадическая логика, неразрешимость, теорема Чёрча, теорема Трахтенброта

DOI: 10.31857/S2686954322600501

**Введение.** Предлагаемая работа связана с так называемой классической проблемой разрешения [1], в частности, с алгоритмической сложностью фрагментов элементарных теорий [2, 3]. Ниже речь пойд

дет о теориях бинарного предиката, причем как в языке с одной лишь бинарной буквой, так и в языке, обогащенном некоторыми дополнительными средствами.

Известно, что классическая логика бинарного предиката неразрешима [4, глава 21]. Отметим, что соответствующее доказательство [4] использует бесконечно много предметных переменных; в то же время для доказательства неразрешимости логики предикатов достаточно трех предметных переменных, если ее язык содержит, помимо бинарной предикатной буквы, бесконечно много унарных букв [5]. Понижение числа переменных до двух [6, 7], использование лишь унарных букв и равенства [4, глава 21] или охраняемых фрагментов, где бинарные буквы допускаются в формулах ограниченно [8], приводит к разрешимости. Возникает естественный вопрос о разрешимости логики и теорий бинарного предиката в языке с конечным числом переменных, начиная с трех.

Аналогичная ситуация наблюдается и при обогащении языка логики предикатов различными

дополнительными средствами, важными для приложений. Так, логика предикатов с равенством, обогащенная оператором транзитивного замыкания,  $\Pi_1^1$ -трудна в языке с двумя переменными, но доказательство использует несколько бинарных букв и бесконечно много унарных [9]; и здесь тоже возникает вопрос об алгоритмической сложности теорий бинарного предиката в языке с конечным числом переменных, но уже начиная с двух.

Ответ на вопрос о разрешимости логики бинарного предиката в языке с числом переменных не менее трех (и без дополнительных операторов) следует из [10]: такая логика неразрешима (см. [10, пункт (ii) раздела 4.8]). Аналогичные результаты для классической логики бинарного предиката в языке с двумя переменными, обогащенном дополнительными операторами, автору неизвестны.

Ниже будет описано построение, дающее короткое доказательство, во-первых, неразрешимости многих теорий бинарного предиката в языке с тремя предметными переменными (в частности,  $\Sigma_1^0$ -полноты логики бинарного предиката и  $\Pi_1^0$ -полноты теории конечных моделей бинарного предиката), а во-вторых,  $\Pi_1^1$ -трудности проблемы общезначимости формул в языке с бинарной пре-

<sup>1</sup> Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: m\_rybakov@mail.ru

дикатной буквой, равенством и двумя предметными переменными, обогащенном операторами композиции и транзитивного замыкания. Построение будет состоять в моделировании проблем укладки домино [11, 12]; отметим, что такой метод хорошо известен, и примеры применения теории замощений можно найти как в алгебре [13, 14], так и в логике [1, 15–18].

**Неразрешимая проблема домино.** *Плитки домино* имеют квадратную форму одинакового размера; *тип*  $t$  плитки определяется *цветами*  $\perp t$ ,  $\top t$ ,  $ut$  и  $dt$  ее граней. Следующая проблема укладки  $\Pi_1^0$ -полна [11]: по набору  $T = \{t_0, \dots, t_n\}$  типов плиток нужно выяснить, существует ли  $T$ -укладка, т.е. такая функция  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow T$ , что для любых  $i, j \in \mathbb{N}$  выполняются равенства  $\perp f(i, j) = \perp f(i+1, j)$  и  $ut f(i, j) = dt f(i, j+1)$ .

**Моделирование укладки.** Зафиксируем бинарную предикатную  $P$ . Введем сокращения. Пусть  $rx = xPx$ ,  $\bar{r}x = \neg rx$ ,  $gx = \exists y(ry \wedge xPy)$ ,  $\bar{g}x = \neg gx$ , а также

$$\begin{aligned} xEy &= \forall z((xPz \leftrightarrow yPz) \wedge (zPx \leftrightarrow zPy)); \\ xSy &= xPy \wedge \neg xEy \wedge \forall z(xPz \wedge zPy \rightarrow zEx \vee zEy); \\ xHy &= xSy \wedge (rx \leftrightarrow ry); \\ xVy &= xSy \wedge (rx \leftrightarrow \bar{r}y). \end{aligned}$$

Если выполнено  $rx$ , то  $x$  является рефлексивным, а если  $\bar{r}x$ , то иррефлексивным;  $gx$  понимаем как то, что  $x$  – элемент сетки  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , т.е. место для плитки,  $E$  задает конгруэнтность,  $S$  – смещение на  $P$ -шаг,  $H$  и  $V$  понимаем как смещения вправо и вверх. Чтобы определить  $xSz$ , в определении для  $xSy$  одновременно заменяем  $y$  на  $z$  и  $z$  на  $y$ ; аналогично для  $ySz$ ,  $zSy$ ,  $xEz$  и т.д. Если  $u$  – свойство, то  $\forall_u xA = \forall x(ux \rightarrow A)$ ,  $\exists_u xA = \exists x(ux \wedge A)$ .

Пусть  $G$  – конъюнкция формул  $\forall x \forall y \forall z (xPy \wedge yPz \rightarrow xPz)$ ,  $\forall_g x \exists_g y xHy$ ,  $\forall_g x \exists_g y xVy$ ,  $\forall_g x \forall_g y (\exists z (xHz \wedge zVy) \leftrightarrow \exists z (xVz \wedge zHy))$  и  $\exists_g x \bar{r}x$ . Тогда если  $G$  истинна в некоторой модели  $M$ , то  $M$  содержит сетку вида  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , горизонтальные ряды которой задает  $H$ , а вертикальные  $V$ , причем элементы первого горизонтального ряда являются иррефлексивными, второго – рефлексивными, третьего – иррефлексивными и т.д.

Пусть  $h^y x = \neg \exists u xPu$ ,  $t_0^y x = \exists_g y (xSy \wedge h^x y)$ ,  $t_{k+1}^y x = \exists_g y (xSy \wedge t_k^x y)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ . Формула  $t_m^y x$  выражает следующее:  $x$  видит своего  $S$ -последователя вне сетки, который видит последний элемент за  $m$   $S$ -шагов. Ниже вместо  $t_m^y x$  и  $t_m^x y$  пишем  $t_m x$  и  $t_m y$ . Содержательно  $t_m x$  означает, что на месте  $x$  лежит плитка типа  $t_m$ .

Пусть  $t_T$  – конъюнкция следующих формул:

$$\begin{aligned} & \forall_g x \bigvee_{i=0}^n (t_i x \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg t_j x); \\ & \forall_g x \bigvee_{i=0}^n (t_i x \rightarrow \forall_g y (xHy \rightarrow \bigvee_{rt_i=lt_j} t_j y)); \\ & \forall_g x \bigvee_{i=0}^n (t_i x \rightarrow \forall_g y (xVy \rightarrow \bigvee_{ut_i=dt_j} t_j y)). \end{aligned}$$

**Лемма 1.**  $G \wedge t_T$  выполнима  $\Leftrightarrow$  существует  $T$ -укладка.

Отметим, что в построениях можно обойтись лишь *позитивными* формулами, заменив формулу  $G \wedge t_T$  на ее отрицание, проблему выполнимости – на проблему опровержимости, а затем все вхождения отрицания – на импликацию к формуле  $\forall x \forall y xPy$ .

**Теории бинарного предиката.** Из леммы 1, с учетом замечания о позитивных формулах, получаем следующее уточнение теоремы Чёрча [19]:

- позитивный фрагмент классической логики предикатов  $\Sigma_1^0$ -полон в языке с бинарной предикатной буквой и тремя предметными переменными.

Этот факт можно обобщить на различные теории бинарного предиката: достаточно внести незначительные изменения в описанное выше моделирование. Для класса моделей  $C$  бинарного предиката элементарную теорию этого класса обозначим  $Th(C)$ . Пусть  $F$ ,  $If$ ,  $R$ ,  $Ir$ ,  $S$ ,  $As$ ,  $T$  и  $It$  – классы всех, соответственно, конечных, бесконечных, рефлексивных, иррефлексивных, симметричных, антисимметричных, транзитивных и интранзитивных моделей бинарного предиката. Если  $X$  и  $Y$  – классы моделей, то вместо  $X \cap Y$  будем писать  $XY$ . Так,  $IfRST$  – класс всех бесконечных моделей, являющихся одновременно рефлексивными, симметричными и транзитивными.

**Теорема 1.** Пусть  $C$  – класс моделей бинарного предиката, содержащий хотя бы один из следующих классов:  $IfIrT$ ,  $IfIt$ ,  $IfRS$ ,  $IfIrS$ . Тогда позитивный фрагмент теории  $Th(C)$  в языке с тремя переменными является  $\Sigma_1^0$ -трудным.

Получаем, в частности, что теории классов  $If$ ,  $R$ ,  $Ir$ ,  $S$ ,  $As$ ,  $T$  и  $It$  неразрешимы в языке с тремя предметными переменными.

Используя сходную аргументацию, можно получить следующее уточнение теоремы Трахтенброта [20, 21]:

- позитивный фрагмент теории конечных моделей  $\Pi_1^0$ -полон в языке, содержащем бинарную предикатную букву и три предметные переменные.

Для обоснования этого факта достаточно учесть, что с помощью проблемы укладки коди-

руется проблема неостановки машин Тьюринга на пустой ленте, а затем изменить формулы выше так, чтобы они утверждали, что первый ряд укладки описывает начальную конфигурацию с пустой лентой, а в имеющемся начальном фрагменте укладки не встречается плитка, тип которой соответствует заключительному состоянию машины Тьюринга; отметим, что другой возможный путь состоит в использовании эффективной неотделимости [22] и теоремы 1.

Справедливо и более общее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $C$  — класс конечных моделей бинарного предиката, содержащий  $FR$  или  $FIRAsT$ . Тогда позитивный фрагмент теории  $Th(C)$  в языке с тремя переменными является  $\Pi_1^0$ -трудным.

**Обогащение языка.** Покажем, что обогащение языка может привести к сильной неразрешимости, причем иногда даже при наличии в языке лишь двух переменных. Рассмотрим проблему укладки плиток домино, когда для  $T$ -укладки  $f$  дополнительно требуется, чтобы множество  $\{j \in \mathbb{N} : f(0, j) = t_0\}$  было бесконечным. Известно, что эта проблема  $\Sigma_1^1$ -полна [12, теорема 6.4].

Пусть в языке имеется оператор транзитивного замыкания и  $P^+$  соответствует транзитивному замыканию  $P$ . Для формулы  $A$  определим  $A'$  как формулу, получающуюся из  $A$  заменой  $P$  на  $P^+$ . Пусть  $lx = \neg \exists y u H' x$ . Пусть  $G^*$  — конъюнкция формул  $\forall x \forall y (xPy \wedge \neg yPx \rightarrow xS' z)$ ,  $\forall_g \cdot x \exists_g \cdot y xH' u$ ,  $\forall_g \cdot x \exists_g \cdot y xV' u$ ,  $\forall_g \cdot x \exists_g \cdot y (\exists z (xH' z \wedge zV' u) \leftrightarrow \exists z (xV' z \wedge zH' u))$ ,  $\exists_g \cdot x (\bar{r}x \wedge lx)$  и  $\forall_g \cdot x (lx \rightarrow \forall_g \cdot y (xVy \rightarrow ly))$ , а  $t_T^*$  — конъюнкция  $t_T'$  и формулы  $\forall_g \cdot x (lx \rightarrow \exists_g \cdot y (\neg xE' u \wedge xP^+ u \wedge ly \wedge t_0' u))$ . Тогда выполнимость формулы  $G^* \wedge t_T^*$  эквивалентна существованию  $T$ -укладки с дополнительным условием. Это дает  $\Pi_1^1$ -трудность теорий в языке с бинарной предикатной буквой и тремя переменными; отметим, что оператор транзитивного замыкания применялся лишь к атомарным формулам.

При добавлении равенства и композиции, используя идеи, изложенные в [9], можно описать эту же проблему укладки домино, задействуя всего две переменные и одну бинарную предикатную букву. Третья переменная входит в определения для  $E$  и  $S$ , а также в один из конъюнктивных членов формулы  $G$ . Заменяем  $E$  равенством. Используя равенство и транзитивное замыкание, можно выразить условие функциональности бинарного отношения с дополнительными требованиями сюръективности и отсутствия общих элементов в области определения и прибытия, см. [9].

Это позволяет “разбить” движение по  $H$  и  $V$  на “четные” и “нечетные” шаги  $H_0, H_1, V_0, V_1$ ; в формулах вида  $t_m x$  вместо  $S$  можно использовать  $P$ ; как итог,  $S$  больше не требуется. Конъюнктивный член в  $G$  с тремя переменными заменяем на  $\forall_g \cdot x \exists_g \cdot y (x[H \circ V]y \wedge x[V \circ H]y)$ , где  $xHy = xH_0y \vee xH_1y$  и  $xVy = xV_0y \vee xV_1y$ . Снова получаем  $\Pi_1^1$ -трудность теорий, но при двух переменных.

Получаем следующую теорему.

**Теорема 3.** Проблема общезначимости формул языка логики предикатов с двумя предметными переменными, бинарной предикатной буквой и равенством, обогащенного операторами транзитивного замыкания и композиции,  $\Pi_1^1$ -трудна.

Отметим, что проблема истинности формул такого языка в классе всех конечных моделей не выходит за границы класса  $\Pi_1^0$ , поскольку можно эффективно перечислить как все формулы, так и все конечные модели (с точностью до изоморфизма), что позволяет построить эффективное перечисление множества опровержимых формул.

**Обсуждение.** Отметим, что незначительно ослабленные варианты теорем 1 и 2 могут быть получены из [10] с учетом результатов, представленных в [2, 3, 22] и др. (см. также, например, работы [23] и [24, приложение]). Так, в [10] доказана неразрешимость логики бинарного предиката в языке с тремя предметными переменными, а используя переводы, описанные в [2, 3], можно получить неразрешимость (с учетом [22],  $\Sigma_1^0$ -трудность или  $\Pi_1^0$ -трудность) различных теорий бинарного предиката в языке с конечным (иногда, возможно, довольно большим) числом предметных переменных; идея, в первом приближении, состоит в том, чтобы в переводах элиминировать некоторые переменные при появлении в формулах вложенных кванторов, поступая примерно так, как это было сделано в определении формул вида  $t_m(x)$ , данном выше, когда в рекурсивном описании вместо очередной новой переменной берется уже использовавшаяся, но не имеющая свободных вхождений в ранее построенных формулах.

Также отметим, что в исследованиях (см., например, [1, 3]) уделяется большое внимание разрешимости фрагментов классической логики предикатов, определяемых кванторными префиксами из некоторого регулярного множества; если такое множество бесконечно, то в нем существуют сколь угодно длинные кванторные префиксы, а значит, соответствующий фрагмент языка предполагает наличие бесконечного множества предметных переменных. Множества кванторных префиксов, для которых известна неразрешимость определяемых ими фрагментов ло-

гики бинарного предиката, бесконечны. Поэтому возникает естественный вопрос: можно ли извлечь из приведенного выше построения доказательство неразрешимости какого-либо фрагмента логики бинарного предиката, определяемого конечным множеством кванторных префиксов? Ответ здесь отрицательный: формулы вида  $t_m^y(x)$  используют цепочки вложенных кванторов по переменным  $x$  и  $y$ , причем длина этих цепочек зависит от  $m$ , поэтому, преобразуя формулы вида  $t_T$  к префиксной нормальной форме, при росте числа элементов в  $T$  мы получим рост длины кванторной приставки, а значит, и рост числа переменных в получающейся формуле.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает искреннюю благодарность анонимным рецензентам за их замечания и предложения, а также за обсуждение темы работы и результатов.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены в ИППИ РАН при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант 21-18-00195.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Börger E., Grädel E., Gurevich Y.* The Classical Decision Problem. Springer, 1997.
2. *Ерошов Ю.Л., Лавров И.А., Тайманов А.Д., Тайцлин М.А.* Элементарные теории // Успехи математических наук. 1965. Т. 20. Вып. 4(124). С. 37–108.
3. *Nies A.* Undecidable fragments of elementary theories // Algebra Universalis. 1996. V. 35. P. 8–33.
4. *Boolos G.S., Burgess J.P., Jeffrey R.C.* Computability and Logic. Cambridge University Press, fifth edition, 2007.
5. *Surányi J.* Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktionskalküls // Matematikai és Fizikai Lapok. 1943. V. 50. P. 51–74.
6. *Mortimer M.* On languages with two variables // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1975. V. 21. P. 135–140.
7. *Grädel E., Kolaitis P.G., Vardi M.Y.* On the decision problem for two-variable first-order logic // Bulletin of Symbolic Logic. 1997. V. 3 (1). P. 53–69.
8. *Grädel E.* On the restraining power of guards // Journal of Symbolic Logic. 1999. V. 64 (4). P. 1719–1742.
9. *Grädel R., Otto M., Rosen E.* Undecidability results on two-variable logics // Archive for Mathematical Logic. 1999. V. 38. P. 313–354.
10. *Tarski A., Givant S.* A Formalization of Set Theory without Variables. American Mathematical Society, 1987.
11. *Berger R.* The Undecidability of the Domino Problem. Volume 66 of Memoirs of AMS. AMS, 1966.
12. *Harel D.* Effective transformations on infinite trees, with applications to high undecidability, dominoes, and fairness // Journal of the ACM. 1986. V. 33. P. 224–248.
13. *Conway J., Lagarias J.* Tiling with polyominoes and combinatorial group theory // J. Combin. Theory Ser. A. 1990. V. 53 (2). P. 183–208.
14. *Kari J., Papasoglu P.* Deterministic aperiodic tile sets // Geometric and functional analysis. 1999. V. 9. P. 353–369.
15. *Reynolds M., Zakharyashev M.* On the products of linear modal logics // Journal of Logic and Computation. 2001. V. 11. P. 909–931.
16. *Kontchakov R., Kurucz A., Zakharyashev M.* Undecidability of first-order intuitionistic and modal logics with two variables // Bulletin of Symbolic Logic. 2005. V. 11. P. 428–438.
17. *Rybakov M., Shkatov D.* Algorithmic properties of first-order modal logics of linear Kripke frames in restricted languages // Journal of Logic and Computation. 2021. V. 31 (5). P. 1266–1288.
18. *Rybakov M., Shkatov D.* Undecidability of QLTL and QCTL with two variables and one monadic predicate letter // Логические исследования. 2021. V. 27 (2). P. 93–120.
19. *Church A.* A note on the “Entscheidungsproblem” // The Journal of Symbolic Logic. 1936. V. 1. P. 40–41.
20. *Трахтенброт Б.А.* Невозможность алгоритма для проблемы разрешимости на конечных классах // Доклады АН СССР. 1950. Т. 70. № 4. С. 569–572.
21. *Трахтенброт Б.А.* О рекурсивной отделимости // Доклады АН СССР. 1953. Т. 88. № 6. С. 953–956.
22. *Speranski S.* A note on hereditarily  $\Pi_1^0$ - and  $\Sigma_1^0$ -complete sets of sentences // Journal of Logic and Computation. 2016. V. 26 (5). P. 1729–1741.
23. *Nerode A., Shore R.A.* Second order logic and first order theories of reducibility ordering // The Kleene Symposium, North-Nolland, editors Barwise J., Keisler H.J., Kunen K., 1980. P. 181–200.
24. *Kremer P.* On the complexity of propositional quantification in intuitionistic logic // The Journal of Symbolic Logic. 1997. V. 62 (2). P. 529–544.

**COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF THEORIES  
OF A BINARY PREDICATE WITH A SMALL NUMBER OF VARIABLES****M. Rybakov<sup>a</sup>***<sup>a</sup> Institute for Information Transmission Problems of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

We prove  $\Sigma_1^0$ -hardness of a number of theories of a binary predicate with three individual variables (in languages without constants or equality). We also show that, in languages with equality and the operators of composition and the transitive closure, theories of a binary predicate are  $\Pi_1^1$ -hard with only two individual variables.

*Keywords:* first-order logic, dyadic logic, undecidability, Church's theorem, Trakhtenbrot's theorem