ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 507, с. 46–50

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.43

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МОДЕЛИ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

© 2022 г. М. В. Николаев[1,2,*], А. А. Никитин[1,3,], У. Дикман[4,5,6,***]**

Представлено академиком РАН И.А. Соколовым
Поступило 29.09.2022 г.
После доработки 13.11.2022 г.
Принято к публикации 17.11.2022 г.

В данной работе проводится анализ системы нелинейных интегральных уравнений, которая возникает в результате трехпараметрического замыкания третьих пространственных моментов в модели логистической динамики У. Дикмана и Р. Лоу во многовидовом случае. Конкретно, исследуются условия, при которых решение данной системы является устойчивым относительно параметров замыкания. Для этого исходная система уравнений представляется в виде единого операторного уравнения в банаховом пространстве специального вида, после чего применяется обобщенный принцип неподвижной точки.

Ключевые слова: функциональный анализ, нелинейные интегральные уравнения, математическая биология

DOI: 10.31857/S2686954322600604

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматривается трехпараметрическое семейство систем нелинейных интегральных уравнений, которые описывают состояние равновесия при замыкании третьих моментов в пространственной логистической модели У. Дикмана и Р. Лоу, [1, 2]. Решения данных систем исследуются на устойчивость относительно параметров замыкания. В разделе 2 работы дано краткое описание модели, а также описано исследуемое семейство систем уравнений. В разделе 3 проводится переформулировка исходных систем в виде единых операторных уравнений над специальным банаховым пространством. Основные результаты статьи касательно исследования устойчивости решений построенных уравнений приводятся в разделе 4.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Модель

Рассмотрим n-видовое сообщество неподвижных организмов, обитающих в пространстве $\mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$). Введем следующие гомогенные по времени и пространству биологические характеристики:

1. $d_i \geq 0$ – естественная смертность вида i,

2. $s_{ij} \geq 0$ – агрессивность вида i по отношению к виду j,

3. $b_i > 0$ – интенсивность рождения новых особей вида i,

4. $m_i = m_i(x)$ – ядра разброса особей вида i,

5. $w_{ij} = w_{ij}(x)$ – ядра конкуренции между видами i и j.

При этом все ядра разброса и конкуренции являются неотрицательными, радиально симметричными, интегрируемыми функциями, с L_1-нормой, равной 1, которые исчезают на бесконечности. Дополнительно предположим, что ядра конкуренции существенно ограничены. Ядра

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
[3] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия*
[4] *Высший университет Окинавского института науки и технологий, Онна, Япония*
[5] *Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия*
[6] *Высший университет повышения квалификации, Хаяма, Япония*
**E-mail: nikolaev.mihail@inbox.ru*
***E-mail: nikitin@cs.msu.ru*
****E-mail: dieckmann@iiasa.ac.at*

разброса описывают плотности вероятностей случайных величин, определяющих положение потомков относительно своих родителей. Ядра конкуренции задают пространственную структуру конкуренции между индивидами различных видов.

Описанная модель является стохастической, поэтому вводятся так называемые пространственные моменты — усредненные статистические характеристики сообщества. Момент k-го порядка будем обозначать через:

$$M_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x_2, x_3, \ldots, x_k, t).$$

Данная величина описывает среднюю плотность в момент времени t наборов из k особей, в которых p-я особь относится к виду i_p, а сдвиг между p-й особью и первой равен x_p.

2.2. Система равновесия

В настоящей статье мы будем работать с состоянием равновесия сообщества, которое характеризуется отсутствием динамики моментов во времени (таким образом, моменты перестают зависеть от t). В случае трехпараметрического замыкания третьих моментов оно описывается следующей системой интегральных уравнений (подробнее см. в [2]):

$$\begin{cases} 0 = 2\delta_{ij}\overline{m}_i(x)M_i + [(\overline{m}_i + \overline{m}_j) * M_{ij}](x) - \\ -(\tilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1-\tilde{\alpha})(d_i + d_j) + \\ + \overline{w}_{ij}(x) + \overline{w}_{ji}(x))M_{ij}(x) - \\ -\tilde{\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{[\overline{w}_{ik} * M_{jk}](-x)}{M_j} + \dfrac{[\overline{w}_{jk} * M_{ik}](x)}{M_i}\right)M_{ij}(x) - \\ -\tilde{\gamma}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{[\overline{w}_{ik}M_{ik} * M_{kj}](x) + [\overline{w}_{jk}M_{kj} * M_{ik}](x)}{M_k} - \\ -\tilde{\beta}M_iM_j\sum_{k=1}^{n}(s_{ik} + s_{jk})M_k, \\ i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, $[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy$ — свертка функций f и g, $\overline{m}_i(x) = b_i m_i(x)$, $\overline{w}_{ij}(x) = s_{ij}w_{ij}(x)$, а $\tilde{\alpha} = \alpha/(\alpha+\gamma)$, $\tilde{\beta} = \beta/(\alpha+\gamma)$, $\tilde{\gamma} = \gamma/(\alpha+\gamma)$ являются параметрами замыкания, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, причем $\alpha + \gamma \neq 0$. Числа M_i и функции $M_{ij}(x)$ — это первые и вторые пространственные моменты сообщества соответственно, которые являются неизвестными в данной системе. На эти величины накладываются дополнительные условия [3]:

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^N} \to +\infty} M_{ij}(x) = M_iM_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Будем называть систему (1) системой равновесия.

3. ОПЕРАТОР РАВНОВЕСИЯ

3.1. Пространство $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$

Для дальнейшего исследования переформулируем систему (1) в виде единого операторного уравнения. Сначала сделаем замену переменных вида $Q_{ij} = M_{ij}/M_i$. Из условий (2) следует, что

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^N} \to +\infty} Q_{ij}(x) = M_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

В статье [6] было введено пространство $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, состоящее из элементов вида $f = \mathcal{F}f + \mathcal{N}f$, где $\mathcal{F}f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, а $\mathcal{N}f \in \mathbb{R}$. Это пространство является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{\widehat{L_1}} = \|\mathcal{F}f\|_{L_1} + |\mathcal{N}f|.$$

Будем искать Q_{ij} в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. В таком случае из условий (3) получим, что $\mathcal{N}Q_{ij} = M_j$.

Рассмотрим пространство $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ матриц размера $n \times n$, элементами которых являются функции из $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. Нетрудно показать, что оно также является банаховым относительно нормы

$$\|F\|_{n\times n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|F_{ij}\|_{\widehat{L_1}},$$

где $F = [F_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$, $F_{ij} \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. В дальнейшем также будем считать совокупность неизвестных Q_{ij} матрицей $Q \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$.

3.2. Построение оператора равновесия

Определим несколько вспомогательных операторов, действующих в $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$:

$$\mathcal{C}F = [[(m_i + m_j) * F_{ij}]]_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}},$$

$$\mathcal{S}F = \left[\sum_{k=1}^{n}([\overline{w}_{ik}F_{ik} * F_{kj}] + [\overline{w}_{jk}F_{kj} * F_{ik}])\right]_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}},$$

$$\mathcal{R}F = \left[\mathcal{N}F_{ij}\sum_{k=1}^{n}(s_{ik} + s_{jk})\mathcal{N}F_{ik}\right]_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}},$$

$$(\mathcal{P}F)(x) = \left[\sum_{k=1}^{n}([\overline{w}_{ik} * F_{jk}](-x) + \right.$$
$$\left. + [\overline{w}_{jk} * F_{ik}](x))F_{ij}(x)\right]_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}}.$$

Положим

$$\mu = 2\max_{i=\overline{1,n}} b_i, \quad \nu = 2\max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \|\overline{w}_{ij}\|_{BL_1},$$

$$\xi = 2\max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} s_{ij}, \quad \eta = \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \|\overline{w}_{ij} + \overline{w}_{ji}\|_{BL_1},$$

где

$$\|f\|_{BL_1} = \max\left\{\|f\|_{L_1}, \operatorname*{esssup}_{\mathbb{R}^N}|f|\right\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любых элементов* $F \in (\widehat{L}_1(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ *выполняются оценки*

$$\|\mathcal{C}F\|_{n\times n} \le \mu\|F\|_{n\times n}, \quad \|\mathcal{S}F\|_{n\times n} \le \nu\|F\|^2_{n\times n},$$
$$\|\mathcal{R}F\|_{n\times n} \le \xi\|F\|^2_{n\times n}, \quad \|\mathcal{P}F\|_{n\times n} \le \eta\|F\|^2_{n\times n}.$$

Определим оператор $\mathcal{E}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma})$, который преобразует элементы $F \in (\widehat{L}_1(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ по правилу:

$$\mathcal{E}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma})F = \Omega \odot (2M + \mathcal{C}F - W \odot F - \\ - \tilde{\beta}\mathcal{P}F - \tilde{\gamma}\mathcal{S}F - \tilde{\beta}\mathcal{R}F). \qquad (4)$$

Здесь

$$M = \operatorname{diag}\{\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_n\},$$
$$W = [\overline{w}_{ij} + \overline{w}_{ji}]_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}},$$
$$\Omega = [(\tilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1-\tilde{\alpha})(d_i + d_j))^{-1}]_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}},$$

а под $\odot$ подразумевается покомпонентное умножение матриц. Можно видеть, что с точностью до алгебраических преобразований, а также с учетом новых переменных система равновесия (1) совпадает с операторным уравнением $Q = \mathcal{E}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma})Q$ в покомпонентной форме. Будем называть оператор (4) оператором равновесия. Таким образом, разрешимость системы равновесия сведена к существованию неподвижной точки оператора равновесия.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕТРИВИАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

4.1. Условия разрешимости

В работе [5] были найдены условия на параметры замыкания и биологические параметры модели, которые в силу теоремы 2 из [4], а также представления оператора равновесия в виде суммы компактного и сжимающего операторов, обеспечивают существование неподвижной точки оператора (4). Положим:

$$\omega = \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} |\Omega_{ij}| =$$
$$= \left(\min_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} |\tilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1-\tilde{\alpha})(d_i + d_j)|\right)^{-1}.$$

Будем предполагать, что параметры биологической модели и замыкания подобраны так, что величина ω определена корректно, т.е. выполнено условие

$$\min_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} |\tilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1-\tilde{\alpha})(d_i + d_j)| > 0. \qquad (5)$$

Верна следующая теорема.

Теорема 1 ([5]). *Пусть выполнено условие* (5), $|\tilde{\beta}| + |\tilde{\gamma}| > 0$, *и существует по крайней мере один коэффициент агрессивности* s_{ij}, *не равный нулю. Пусть также*

$$D = \left(\mu + \eta - \frac{1}{\omega}\right)^2 - 8(|\tilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\tilde{\gamma}|\nu)\sum_{i=1}^{n} b \ge 0, \qquad (6)$$

а положительное число R *таково, что*

$$\begin{cases} \omega(\eta + 2(|\tilde{\beta}| + |\tilde{\gamma}|)\nu R) < 1 \\ \dfrac{-\mu - \eta + \frac{1}{\omega} - \sqrt{D}}{2(|\tilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\tilde{\gamma}|\nu)} \le R \le \dfrac{-\mu - \eta + \frac{1}{\omega} + \sqrt{D}}{2(|\tilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\tilde{\gamma}|\nu)}, \end{cases} \qquad (7)$$

тогда у оператора $\mathcal{E}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma})$ *существует нетривиальная неподвижная точка в шаре радиуса* R *с центром в нуле.*

4.2. Основные результаты

Заметим, что величина D непрерывна по параметрам замыкания $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$. Значит, если $D > 0$ при заданных значениях параметров, то она сохраняет свой знак и в некоторой их окрестности. Используя эту идею, можно показать, что строгие неравенства в условиях (6) и (7) обеспечивают существование неподвижной точки у операторов равновесия, параметры замыкания которых не сильно отличаются от исходных значений.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1, *но при этом неравенства* (6) *и* (7) *выполняются строго. Тогда найдется такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для любого* $\varepsilon \in [0;\varepsilon_0)$ *из условия*

$$\begin{cases} |\tilde{\alpha}_\varepsilon - \tilde{\alpha}| < \varepsilon, \\ |\tilde{\beta}_\varepsilon - \tilde{\beta}| < \varepsilon, \\ |\tilde{\gamma}_\varepsilon - \tilde{\gamma}| < \varepsilon, \end{cases}$$

следует, что у оператора $\mathcal{E}(\tilde{\alpha}_\varepsilon,\tilde{\beta}_\varepsilon,\tilde{\gamma}_\varepsilon)$ *также существует неподвижная точка в шаре радиуса* R *с центром в нуле.*

Проанализируем влияние параметров замыкания на сам оператор равновесия.

Теорема 3. *Оператор равновесия* $\mathcal{E}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma})$ *меняется непрерывно при малом изменении параметров* $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ *и* $\tilde{\gamma}$. *То есть, если для* $\tilde{\alpha}$ *выполнено условие* (5), *то* $\forall \varepsilon > 0$ *и* $\forall R > 0$ $\exists \delta = \delta(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\varepsilon,R) > 0$ *такое, что, как только*

$$\begin{cases} |\tilde{\alpha}_\delta - \tilde{\alpha}| < \delta, \\ |\tilde{\beta}_\delta - \tilde{\beta}| < \delta, \\ |\tilde{\gamma}_\delta - \tilde{\gamma}| < \delta, \end{cases}$$

то для любого элемента $F \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$, *по норме не превосходящего* R, *верно неравенство*

$$\|\mathcal{E}(\tilde{\alpha}_\delta,\tilde{\beta}_\delta,\tilde{\gamma}_\delta)F - \mathcal{E}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma})F\|_{n\times n} \le \varepsilon,$$

причем для всех таких $\tilde{\alpha}_\delta$ *выполнено условие* (5).

Множество неподвижных точек оператора равновесия является компактным в силу возможности его представления в виде суммы копактного и сжимающего операторов ([5]). С учетом этого факта из теорем 2 и 3 напрямую следует, что малое изменение параметров замыкания не приводит к существенному изменению множества неподвижных точек оператора равновесия.

Теорема 4. *В условиях теоремы 2 при малых изменениях параметров замыкания* $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ *и* $\tilde{\gamma}$ *множество неподвижных точек оператора равновесия меняется непрерывно в смысле метрики Хаусдорфа.*

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках текущей работы был поставлен и исследован вопрос об устойчивости решения системы равновесия (1), разрешимость которой была показана в работе [5]. Данная система путем введения банахова пространства специального вида была сведена к операторному уравнению, что позволило оперировать в терминах неподвижных точек операторов. Было показано, что если в условиях (6) и (7), гарантирующих существование неподвижной точки оператора равновесия, выполняются строгие неравенства, вместо нестрогих, то малое возмущение параметров замыкания не влияет на разрешимость системы равновесия. Кроме того, оператор равновесия, задаваемый данной системой, при таких условиях зависит от параметров замыкания непрерывно, а значит, и множество его неподвижных точек, являющееся компактным, меняется непрерывно в смысле метрики Хаусдорфа, что говорит об устойчивости решений системы (1). Отметим, что ранее вопрос об анализе устойчивости систем равновесия в рамках модели У. Дикмана и Р. Лоу не рассматривался.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Результаты пп. 1, 2 настоящей работы получены А.А. Никитиным при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042). Остальные результаты получены всеми авторами при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Law R., Dieckmann U.* Moment approximations of individual-based models // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. 2000. P. 252–270.

2. *Dieckmann U., Law R.* Relaxation projections and the method of moments // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. 2000. P. 412–455.

3. *Murrell D. J., Dieckmann U., Law R.* On moment closures for population dynamics in continuous space // J. Theor. Biology. 2004. V. 229. P. 421–432.

4. *Красносельский М.А.* Два замечания о методе последовательных приближений. // УМН. 1955. Т. 10. № 1(63). С. 123–127.

5. *Николаев М.В., Никитин А.А., Дикман У.* Применение обобщенного принципа неподвижных точек к исследованию системы нелинейных интегральных уравнений, возникающей в модели популяционной динамики // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 9. С. 1242–1250.

6. *Николаев М.В., Дикман У., Никитин А.А.* Применение специальных функциональных пространств к исследованию нелинейных интегральных уравнений, возникающих в равновесной пространственной логистической динамике // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 499. № 1. С. 35–39.

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF THE SOLUTION OF A SYSTEM OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS ARISING IN A LOGISTIC DYNAMICS MODEL

M. V. Nikolaev[a,b], A. A. Nikitin[a,c], and U. Dieckmann[d,e,f]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

[c] *V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[d] *Okinawa Institute of Science and Technology Graduate University, Onna, Japan*

[e] *International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria*

[f] *Graduate University for Advanced Studies, Hayama, Japan*

Presented by Academician of the RAS I.A. Sokolov

In this paper, we analyze a system of nonlinear integral equations that arises as a result of the three-parameter closure of the third spatial moments in the logistic dynamics model of U. Dieckmann and R. Law in the multi-species case. Specifically, the conditions under which the solution of this system is stable with respect to the closure parameters are investigated. To do this, the initial system of equations is represented as a single operator equation in the special Banach space, after which the generalized fixed point principle is applied.

Keywords: functional analysis, nonlinear integral equations, mathematical biology