

## ОНТОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ **OntoMath<sup>PRO</sup>**

© 2022 г. А. М. Елизаров<sup>1,\*</sup>, А. В. Кириллович<sup>1,\*\*</sup>,  
Е. К. Липачёв<sup>1,\*\*\*</sup>, О. А. Невзорова<sup>1,\*\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым

Поступило 03.06.2022 г.

После доработки 24.07.2022 г.

Принято к публикации 06.09.2022 г.

Представлена онтология **OntoMath<sup>PRO</sup>** – первая семантическая веб-онтология профессионального математического знания, предназначенная для классификации и систематизации математических понятий. Концепты онтологии организованы в две иерархии: математических объектов и материализованных отношений. Учтены мета-онтологические различия, определенные в онтологии верхнего уровня, проведено разделение концептов на типы и роли. Отношения между понятиями заданы в материализованном виде. Аргументами материализованных отношений являются концепты-роли. В онтологии определены также многоязычные лексиконы для выражения математических концептов в текстах на естественном языке. Эти лексиконы представлены в виде наборов лингвистических открытых связанных данных. Проект построения **OntoMath<sup>PRO</sup>** находится в развитии и предусматривает пополнение онтологии новыми разделами математики и расширение сферы ее практического применения.

*Ключевые слова:* онтологии, онтологическое проектирование, извлечение математических фактов, материализованные отношения, управление математическим знанием

**DOI:** 10.31857/S2686954322700011

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Проведение современных научных исследований предполагает использование технологий управления знаниями, в том числе, расширенный поиск близких научных результатов, что может быть обеспечено, в частности, путем использования технологий семантического поиска в имеющихся цифровых коллекциях научных документов. Важную роль при этом играют онтологии. Как известно (см., например, [1]), онтология – это концептуальная модель предметной области, представленная на формальном языке, который обеспечивает применение машинных средств обработки информации. Отметим, что понятие “онтология” используется в разных сообществах в разных смыслах (исторически первом – в философском смысле), а приведенное определение, отражающее вычислительный смысл, характерно прежде всего для инженерии знаний и появилось сравнительно недавно.

С появлением Семантического веба онтологии стали играть ключевую роль в моделировании систем управления интеллектуальными данными и заняли центральное место в известном “слоеном пироге” Тима Бёрнерса-Ли (<https://www.w3.org/2000/Talks/1206-xml2k-tbl/slide10-0.html>). Наблюдаемая тенденция настоящего времени – расширение применения онтологий за счет создания онтологий отдельных предметных областей (в частности, математики), импортирования и логического объединения концептов онтологий смежных областей, а также использования различных баз данных и других информационных ресурсов. Вместе с тем однозначных описаний предметных областей с помощью онтологий не существует, потому что любая онтология предполагает развитие и зависит от целей ее создания и применения. Поэтому построение концептуальных моделей разделов предметных областей и формирование на этой базе соответствующих тезаурусов и онтологий составляют актуальное направление научных исследований. Существенные результаты в этом направлении применительно к математике получены в целом ряде работ.

Вопросам формирования онтологий научного информационного пространства посвящена работа [2]. Тезаурус предметной области “Смешанные уравнения математической физики” пред-

<sup>1</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

\*E-mail: [amelizarov@gmail.com](mailto:amelizarov@gmail.com)

\*\*E-mail: [alik.kirillovich@gmail.com](mailto:alik.kirillovich@gmail.com)

\*\*\*E-mail: [elipachev@gmail.com](mailto:elipachev@gmail.com)

\*\*\*\*E-mail: [onevzoro@gmail.com](mailto:onevzoro@gmail.com)

ставлен в [3]. В исследовании [4] предложен способ описания термина, а также связанных с ним уравнений и формул в тезаурусе предметной области “Уравнения математической физики”. В [5] представлены подходы и методы создания семантической библиотеки в предметной области “Математика”; описаны информационная система LibMeta и онтология LibMeta Ontology, предназначенные для генерации семантических библиотек. Важность проектов по применению семантических технологий в математике в соответствии с принципами Открытых связанных данных (Linked Open Data, LOD, <https://lod-cloud.net/>), в том числе, проекта создания онтологии OntoMath<sup>PRO</sup>, отмечена в исследованиях по формированию машиночитаемой LOD-коллекции Mathematics Subject Classification [6].

Исследование структуры математического знания и возможности его представления в Вебе с помощью онтологий исследованы в [7], а обзор семантических методов решения фундаментальных задач управления математическими знаниями содержится в [8] (здесь онтологии описаны как формализмы для представления математических знаний). Более широкий класс языков формализации в математике приведен в [9].

С разработкой математических онтологий связано решение целого ряда актуальных задач. Фундаментальными являются задачи классификации и систематизации понятий математического знания, семантического поиска, извлечения математических утверждений из текста и их представления в облаке LOD. Другая важная задача – построение рекомендательных систем как элементов систем поддержки и принятия решений, в том числе в математике. Применение онтологий в обучающих системах, в частности, для контроля математических знаний, – еще одна важная цель разработки соответствующих онтологий.

## 2. ОНТОЛОГИЯ OntoMath<sup>PRO</sup>: БАЗОВЫЕ ПОДХОДЫ

OntoMath<sup>PRO</sup> относится к классу предметных онтологий, она предназначена для классификации и систематизации понятий профессионального математического знания и включает несколько важнейших областей (доменов) математики. Существенной особенностью OntoMath<sup>PRO</sup> является широкий охват понятий из различных областей математики, что дает возможность их повторного использования. Такая возможность – фундаментальное свойство всех предметных онтологий, оно в полной мере проявилось при проектировании OntoMath<sup>PRO</sup>.

Одной из главных целей разработки математической онтологии OntoMath<sup>PRO</sup> было ее использование в научных исследованиях, включая гло-

бальные цели, определенные во всемирных проектах “Global Digital Mathematical Library” (GDML), “World Digital Mathematical Library” (WDML) [10, 11].

В направлении классификации понятий математического знания онтология OntoMath<sup>PRO</sup> обеспечивает построение современных классификаторов в различных областях математики, а также создание специализированных математических баз знаний. Встраивание онтологии в системы текстовой обработки математических документов позволяет не только извлекать из них новые математические понятия для обогащения самой онтологии, но и формировать и сохранять в базах знаний конкретные математические утверждения. Базы данных и базы знаний, сформированные методами извлечения информации из математических текстов, могут быть размещены в облаке LOD.

При проектировании онтологии OntoMath<sup>PRO</sup> были использованы результаты по управлению математическими знаниями, полученные нами ранее, а также разработанные методы структурного и семантического анализа математических документов [12].

Первая версия онтологии, представленная в [13], предназначена для моделирования математических сущностей и организована в виде иерархии математических объектов и разделов математики. В следующей версии онтологии средства моделирования математических сущностей были дополнены средствами моделирования математических утверждений. Для этого онтология была дополнена иерархией материализованных отношений, мета-онтологическим и лингвистическим уровнями (см. раздел 2). Кроме того, OntoMath<sup>PRO</sup> была использована для построения ряда приложений по управлению математическим знанием (см. раздел 3).

## 3. АРХИТЕКТУРА ОНТОЛОГИИ OntoMath<sup>PRO</sup>

В структуре онтологии выделены три уровня (рис. 1), которые организованы в соответствии с различными моделями представления ее концептов:

- *уровень предметной онтологии* содержит концепты профессионального математического знания;
- *мета-онтологический уровень* представлен разметкой математических концептов мета-онтологическими аннотациями;
- *лингвистический уровень* обеспечивает распознавание математических концептов в научных математических текстах на русском и английском языках.

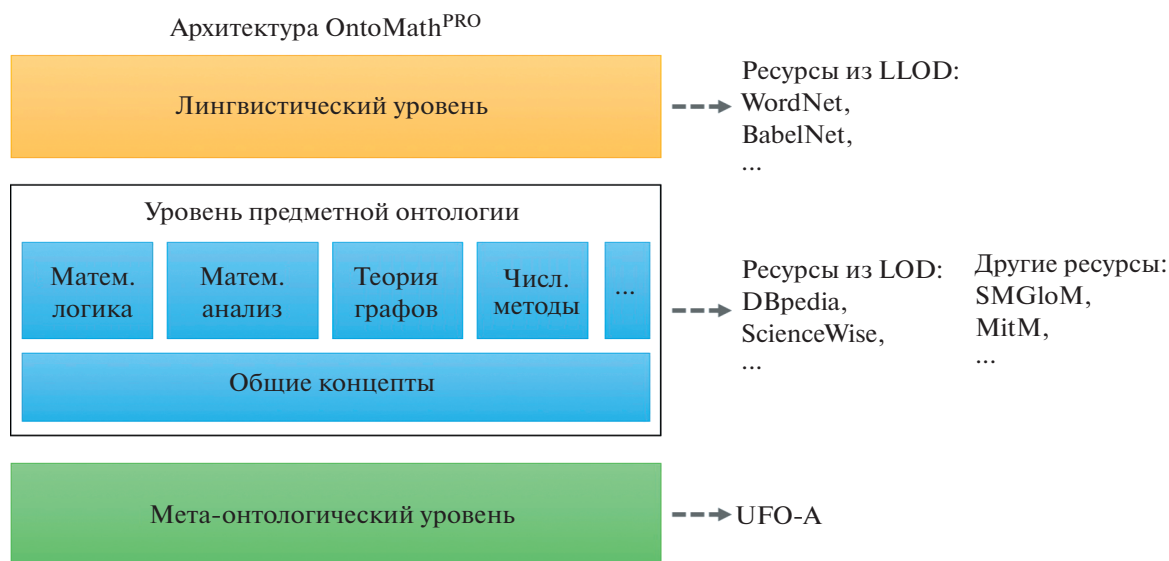


Рис. 1. Общая архитектура онтологии OntoMath<sup>PRO</sup>.

На уровне предметной онтологии определены иерархия объектов и представление материализованных отношений.

Иерархия объектов содержит концепты, относящиеся к широкому набору областей математики (математическая логика, теория множеств, математический анализ, алгебра, геометрия, дифференциальные уравнения и другие). Концепты первого уровня иерархии относятся к трем типам: базовые математические объекты (такие как Множество, Оператор, Отображение), корневые элементы соответствующей области математики (например, Элемент теории вероятностей) и общие математические концепты (такие как Проблема, Метод, Утверждение, Формула).

Описание концепта онтологии содержит его название и определение на русском и английском языках, мета-онтологические аннотации, связи с другими концептами, а также ссылки на внешние ресурсы. На рис. 2 приведен пример концепта Степень многочлена в редакторе WebProtégé. Описание этого концепта содержит два варианта названия концепта на русском языке (свойство rdfs:label): “Степень многочлена” и “Степень полинома”, название концепта на английском языке (свойство rdfs:label), определение (свойство rdfs:comment), указание мета-онтологического класса SubKind (свойство gufo:SubKind) и вышестоящий концепт Число.

OntoMath<sup>PRO</sup> определяет объектные свойства, связывающие все концепты из иерархии объектов. Введенные свойства выражают следующие отношения: (1) отношение между объектом математического знания и разделом математики; (2) отношение “определяется через”; (3) ассоциатив-

ное отношение и (4) отношение между задачей и методом ее решения.

Представление материализованных отношений нацелено на моделирование  $n$ -местных отношений между математическими объектами, выражаемых с помощью  $n$ -местных предикатов. Средствами языка OWL такие отношения представлены в материализованном виде, т.е. в виде классов. Аргументы  $n$ -местных отношений описаны с помощью классов-ролей, экземпляры которых связаны с экземплярами материализованных отношений с помощью объектных свойств.

На лингвистическом уровне материализованное отношение чаще всего задается формой глагола, например, “делить”, “принадлежать”. На рис. 3 представлен пример отношения делимости. Аргументы этого отношения – два концепт-роли Делимое и Делитель, которые являются подклассами концепта-типа Число. Экземплярами материализованного отношения служат отношения между конкретными числами, как указано на рисунке. Экземпляры аргументов отношения связаны с экземпляром отношения с помощью объектного свойства `omp:hasArgument`.

Мета-онтологический уровень. При проектировании онтологии OntoMath<sup>PRO</sup> учтены онтологические различия концептов-типов и концептов-ролей.

Тип – это концепт, который является семантически жестким и онтологически независимым [14, 15]. Например, концепт *Натуральное число* является типом, так как его существование не зависит от отношений с другими числами.

Роль – это концепт, который является семантически нежестким и онтологически зависимым.

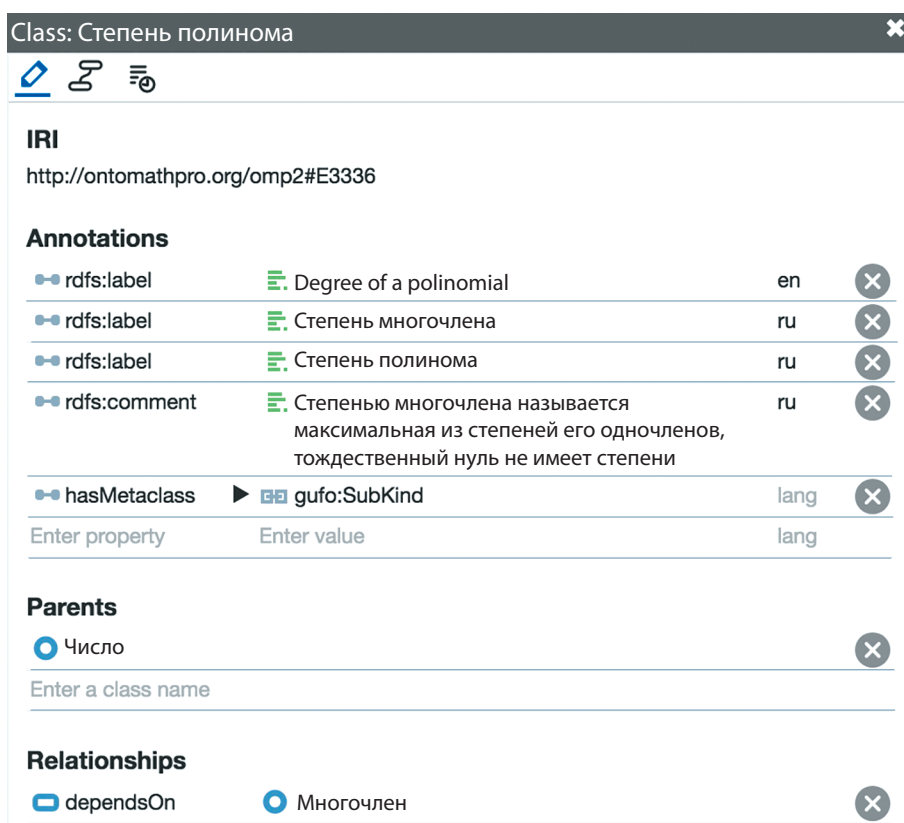


Рис. 2. Пример концепта Степень многочлена в редакторе WebProtégé.

Концепт-роль возникает только в силу каких-либо отношений с другим объектом [14, 15]. Например, концепт *Делитель* является ролью, которая возникает у числа (концепт *Число*) только в контексте операции деления. Концепты-роли привязаны к соответствующим концептам-типам с помощью отношения онтологической зависимости.

На мета-онтологическом уровне концепты из иерархии объектов аннотируются мета-онтологическими классами (такими как Тип, Роль, Релятор), которые определены в онтологии верхнего уровня UFO (Unified Foundation Ontology) [14].

Для аннотирования концептов онтологии OntoMath<sup>PRO</sup> мета-онтологическими аннотациями использованы два подхода. В соответствии с первым из них аннотирование осуществляется с помощью предиката `rdf:type`. Такой подход требует поддержки механизма OWL Punning (<https://www.w3.org/2007/OWL/wiki/Punning>), но позволяет задействовать принципы многоуровневого моделирования, в том числе онтологию MLT Ontology (<https://nemo.inf.ufes.br/projects/mlt/>). В соответствии со вторым подходом для аннотирования используется свойство `omp2:hasMetaclass`.

Лингвистический уровень онтологии OntoMath<sup>PRO</sup> состоит из многоязычных лексиконов, определяющих способы выражения концептов из пред-

метной онтологии в русском (английском) языке. Каждый лексикон содержит:

- лексические единицы (однословные и многословные), обозначающие математические концепты (например, лексическая единица “матрица” используется для обозначения одноименного концепта *Матрица* из уровня предметной онтологии);
- формы лексических единиц (в разных падежах, числах);
- синтаксические деревья для многословных лексических единиц;
- синтаксические фреймы для лексических единиц-предикатов, которые описывают синтаксические аргументы заданного предиката, грамматические показатели аргументов и их связь с концептами онтологии.

Многоязычные лексиконы представлены в виде наборов Лингвистических открытых связанных данных (Linguistic Linked Open Data, LLOD, <http://linguistic-lod.org/>) с помощью онтологий OntoLex/Lemon (<https://www.w3.org/community/ontolex/>; <https://www.w3.org/2016/05/ontolex/>), LexInfo (<https://lexinfo.net/>) и PreMOn (Predicate Model for Ontologies, <https://premon.fbk.eu/>).

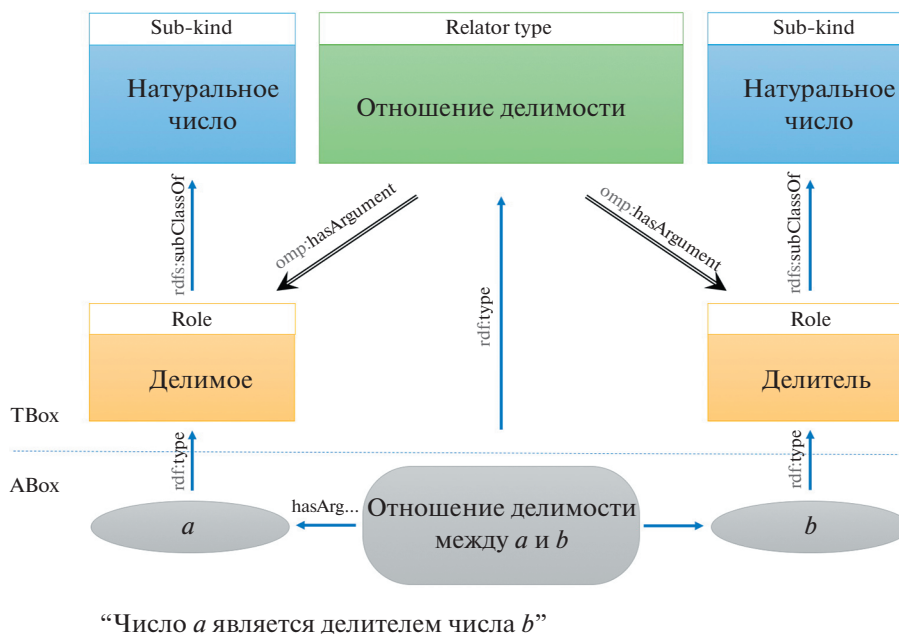


Рис. 3. Представление материализованных отношений.

Онтология  $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$  продолжает активно развиваться, ее текущая версия содержит более 4 тыс. концептов в иерархии объектов, отношения верхнего уровня в иерархии материализованных отношений, а также мета-онтологические описания для 600 концептов и лингвистические описания базовых концептов на русском и английском языках. В дальнейшем планируются разработка новых разделов онтологии и пополнение существующих разделов новыми концептами, разработка новых материализованных отношений между концептами и снабжение концептов новыми лингвистическими аннотациями.

#### 4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОНТОЛОГИИ $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$

Одни из таких приложений связаны с разработанной нами экосистемой  $\text{OntoMath}$ .

$\text{OntoMath}$  – это система онтологий, инструментов текстовой аналитики и приложений для управления математическим знанием [16]. Центральным ее компонентом является платформа семантической публикации. Она принимает на вход коллекцию математических документов в формате  $\text{LaTeX}$  и автоматически строит семантическое представление документов в виде  $\text{rdf}$ -набора, интегрированного в облако  $\text{LOD}$ . Этот набор включает метаданные, компоненты логической структуры математических публикаций, математическую терминологию, математические формулы и представления, задающие связи терминов (концептов) с их символическими обозначениями в формулах. На базе сгенерированного  $\text{rdf}$ -

набора функционируют сервисы управления математическим знанием, в частности, сервис семантического поиска по математическим формулам ([17], <https://lobachevskii-dml.ru/mathsearch>), рекомендательная система для поиска и анализа математических статей [18] и система формирования рекомендаций по назначению математическим статьям индексов Универсальной десятичной классификации (УДК) [19].

Принципы моделирования онтологии  $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$  были применены при проектировании образовательной математической онтологии  $\text{OntoMath}^{\text{Edu}}$  (<https://github.com/CLLKazan/OntoMathEdu>), которая представляет знания из элементарной математики и используется для формирования образовательных курсов на основе современных цифровых платформ [20]. Онтология  $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$  была также использована при тестировании студентов математических специальностей для оценки уровня их компетенций. Тестирование предполагало построение взаимосвязей между рядом задач курса “Численные методы” и методами их решения. Проведенный эксперимент продемонстрировал эффективность примененного подхода.

Другие приложения онтологии  $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$  связаны с ее использованием в смежных областях и направлениях исследований.

В работах [21, 22] осуществлен перевод онтологии  $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$  на итальянский язык с дальнейшим ее использованием при разработке реко-

мендательных систем, связанных с обучающими математическими материалами.

В [23] онтология *OntoMath<sup>PRO</sup>* использована для построения онтологии объектов научного знания SKOO (Scientific Knowledge Objects Ontology), которая в свою очередь предназначена для визуализации научного знания.

В [24] *OntoMath<sup>PRO</sup>* использована в качестве компонента платформы для поиска документов в цифровых библиотечных каталогах.

В [25] онтология *OntoMath<sup>PRO</sup>* использована в качестве одного из компонентов системы оценки качества данных в сенсорных сетях.

Таким образом, проект построения онтологии *OntoMath<sup>PRO</sup>* уже нашел достаточно широкий спектр приложений.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена онтология профессиональной математики *OntoMath<sup>PRO</sup>*. Это первая семантическая веб-онтология профессионального математического знания, которая: (1) строго придерживается онтологических различий (ontological distinctions), определенных в онтологии верхнего уровня; (2) представляет математические отношения в качестве сущностей первого порядка; (3) содержит лингвистический уровень, который подробно описывает то, как математические концепты выражаются в тексте на естественном языке.

Основное научное значение полученных результатов состоит в том, что они связали между собой три различные области исследований: управление математическим знанием, онтологическое моделирование и Лингвистические открытые связанные данные (LLOD).

Проект построения онтологии *OntoMath<sup>PRO</sup>* находится в развитии и предусматривает ее пополнение новыми разделами математики.

Онтология *OntoMath<sup>PRO</sup>* распространяется под свободной лицензией Apache 2 и доступна в репозитории GitHub (<https://github.com/CLLKazan/OntoMathPro/>) с возможностью ее пополнения с участием заинтересованных специалистов-математиков.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают признательность рецензентам за замечания, учет которых способствовал существенно улучшению содержания статьи.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00105).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guarino N., Oberle D., Staab S.* In: *Staab S., Studer R.* (Eds.). *International Handbooks on Information Systems. Handbook on Ontologies*, 2th edition. N.Y.: Springer, 2009. P. 1–17. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-24750-0>
2. *Мусеев Е.И., Муромский А.А., Тучкова Н.П.* Об онтологии научного информационного пространства. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2013. 48 с.
3. *Муромский А.А., Тучкова Н.П.* Представление математических понятий в онтологии научных знаний // Онтология проектирования. 2019. Т. 9. № 1 (31). С. 50–69. <https://doi.org/10.18287/2223-9537-2019-9-1-50-69>
4. *Тучкова Н.П.* О Семантической модели предметной области “Уравнения математической физики” // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2020. № 4 (20). С. 132–142. <https://doi.org/10.38028/ESI.2020.20.4.012>
5. *Serebryakov V.A., Ataeva O.M.* Ontology Based Approach to Modeling of the Subject Domain “Mathematics” in the Digital Library // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42, № 8. P. 1920–1934. <https://doi.org/10.1134/S199508022108028X>
6. *Arndt S., Ion P., Runnwerth M., Schubotz M., Teschke O.* 10 Years Later: The Mathematics Subject Classification and Linked Open Data // In: *Kamareddine F., Sacerdoti Coen C.* (Eds.) *Intelligent Computer Mathematics. CICM 2021. Lecture Notes in Computer Science.* 2021. V. 12833. P. 153–158. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-81097-9\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-81097-9_12)
7. *Lange C.* Ontologies and languages for representing mathematical knowledge on the Semantic Web // *Semantic Web.* 2013. V. 4 (2). P. 119–158. <https://doi.org/10.3233/SW-2012-0059>
8. *Elizarov A.M., Kirillovich A.V., Lipachev E.K., Nevzorova O.A., Solovyev V.D., Zhiltsov N.G.* Mathematical Knowledge Representation: Semantic Models and Formalisms // *Lobachevskii J. Math.* 2014. V. 35. № 4. P. 347–353. <https://doi.org/10.1134/S1995080214040143>
9. *Kaliszyk C., Rabe F.* A Survey of Languages for Formalizing Mathematics // In: *Benzmüller C. and Miller B.* (Eds.) *CICM 2020 // Lecture Notes in Artificial Intelligence.* 2020. V. 12236. P. 138–156. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-53518-6\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-53518-6_9)
10. *Developing a 21st Century Global Library for Mathematics Research*, DC: The National Academies Press, Washington, 2014. <https://doi.org/10.17226/18619>
11. *Ion P.D.F., Watt S.M.* The Global Digital Mathematics Library and the International Mathematical Knowledge Trust // *Lecture Notes in Artificial Intelligence.* 2017. V. 10383. P. 56–69. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-62075-6\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-62075-6_5)
12. *Елизаров А.М., Липачёв Е.К., Невзорова О.А., Соловьёв В.Д.* Методы и средства семантического структурирования электронных математических документов // ДАН. 2014. Т. 457. № 6. С. 642–645. <https://doi.org/10.7868/S0869565214240049>

13. Nevzorova O., Zhiltsov N., Kirillovich A., Lipachev E. OntoMath<sup>PRO</sup> Ontology: A Linked Data Hub for Mathematics // In: Klinov P., Mouromstev D. (Eds.) Proceedings of the 5th International Conference on Knowledge Engineering and Semantic Web (KESW 2014). Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham, 2014. V. 468. P. 105–119. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-11716-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-11716-4_9)
14. Guizzardi G. et al. UFO: Unified Foundational Ontology // Applied Ontology. 2022. V. 17. № 1. P. 167–210. <https://doi.org/10.3233/AO-210256>
15. Лукашевич Н.В., Добров Б.В. Проектирование лингвистических онтологий для информационных систем в широких предметных областях // Онтология проектирования. 2015. Т. 5. № 1 (15). С. 47–69.
16. Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O. Digital Ecosystem OntoMath: Mathematical Knowledge Analytics and Management // Communications in Computer and Information Science. Springer, 2017. V. 706. P. 33–46. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-57135-5\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-57135-5_3)
17. Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O. Semantic Formula Search in Digital Mathematical Libraries // RPC 2017 – Proceedings of the 2nd Russian–Pacific Conference on Computer Technology and Applications. 2017. С. 39–43. <https://doi.org/10.1109/RPC.2017.8168063>
18. Elizarov А.М., Жижченко А.Б., Жильцов Н.Г., Кириллович А.В., Липачёв Е.К. Онтологии математического знания и рекомендательная система для коллекций физико-математических документов // ДАН. 2016. Т. 467. № 4. С. 392–395. <https://doi.org/10.7868/S0869565216100042>
19. Nevzorova O., Almukhametov D. Towards a recommender system for the choice of UDC code for mathematical articles // CEUR Workshop Proceedings. 2021. V. 3036. P. 54–62. <http://ceur-ws.org/Vol-3036/paper04.pdf>.
20. Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., Shakirova L. OntoMath<sup>Edu</sup>: Towards an Educational Mathematical Ontology // CEUR Workshop Proceedings. 2020. V. 2634. P. 1–10. <http://ceur-ws.org/Vol-2634/WiP1.pdf>.
21. Barana A., Di Caro L., Fioravera M., Marchisio M., Rabellino S. Ontology Development for Competence Assessment in Virtual Communities of Practice // In: Penstein Rosé, C. et al. (Eds.) Proceedings of the 19th International Conference Artificial Intelligence in Education (AIED 2018), part II. Lecture Notes in Computer Science. 2018. V. 10948. P. 94–98. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-93846-2\\_18](https://doi.org/10.1007/978-3-319-93846-2_18)
22. Di Caro L., Rabellino S., Fioravera M., Marchisio M. A Model for Enriching Automatic Assessment Resources with Free-Text Annotations // 15th International Conference on Cognition and Exploratory Learning in Digital Age (CELDA 2018), October 21–23, 2018. Budapest, Hungary, 2018. P. 186–193.
23. Daponte V., Falquet G. Une ontologie pour la formalisation et la visualisation des connaissances scientifiques // 29es Journées Francophones d'Ingénierie des Connaissances, IC 2018, AFIA, Jul 2018, Nancy, France. P. 129–136. hal-01839572. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01839572>
24. Intarapaiboon P., Kesamoon C. Applying domain knowledge and academic information to enhance unknown-item search in OPAC // Malaysian Journal of Library & Information Science. 2019. V. 24. № 1. P. 45–58. <https://doi.org/10.22452/mjlis.vol24no1.3>
25. Vedurmudi A.P., Neumann J., Gruber M., Eichstädt S. Semantic Description of Quality of Data in Sensor Networks // Sensors. 2021. V. 21 (6462). P. 1–21. <https://doi.org/10.3390/s21196462>

## OntoMath<sup>PRO</sup> – ONTOLOGY OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE

A. M. Elizarov<sup>a</sup>, A. V. Kirillovich<sup>a</sup>, E. K. Lipachev<sup>a</sup>, and O. A. Nevzorova<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Kazan (Privolzhsky) Federal University, Kazan, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

This article presents the first semantic web ontology of professional mathematical knowledge OntoMath<sup>PRO</sup>. This ontology is designed to classify and systematize mathematical concepts. OntoMath<sup>PRO</sup> ontology concepts are organized into two hierarchies: the hierarchy of mathematical objects and the hierarchy of materialized relations. When designing the ontology, the meta-ontological differences defined in the top-level ontology were taken into account; the division of concepts into types and roles was carried out. Relations between concepts are given in a reified form. Concepts-roles are arguments of reified relations. Multilingual dictionaries for extracting mathematical concepts from natural language texts have been defined in the ontology. These lexicons are presented as sets of linguistically related open data. The OntoMath<sup>PRO</sup> project is developing and improving. Ontology is enriched with new branches of mathematics, and the areas of application of ontology continue to expand.

**Keywords:** ontology, ontology development, mathematical fact extraction, reified relation, mathematical knowledge management