ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 507, с. 10–14

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.4

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СУММАРНО-РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ И СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2022 г. С. Н. Асхабов[1,2,3,*]

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 06.10.2022 г.
После доработки 10.10.2022 г.
Принято к публикации 17.10.2022 г.

Получены точные априорные оценки решений нелинейного интегро-дифференциального уравнения вольтерровского типа с суммарно-разностным ядром в конусе пространства непрерывных на положительной полуоси функций. На основе этих оценок методом весовых метрик доказана глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения нетривиального решения указанного уравнения. Показано, что это решение можно найти методом последовательных приближений пикаровского типа и дана оценка скорости их сходимости в терминах весовой метрики. Указаны условия, при которых существует только тривиальное решение. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра, суммарно-разностное ядро, степенная нелинейность

DOI: 10.31857/S2686954322700023

Многие задачи современной математики, физики, механики и биологии приводят к нелинейным интегральным уравнениям с суммарными и разностными ядрами (см. монографии [1, 2] и приведенную в них библиографию). Например, описание процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом, или процесса инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду приводит к нелинейным уравнениям с разностными ядрами [3–5], а нелинейные уравнения с суммарными ядрами возникают в теории лучистого равновесия и в теории переноса тепла излучением [6, 7].

В настоящее время теория нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа с разностными ядрами, т.е. теория уравнений типа свертки, разработана значительно полнее, чем соответствующая теория уравнений с суммарными ядрами. В частности, это связано с тем, что исследование нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с чисто суммарными ядрами оказывается затруднительным, так как операторы вольтерровского типа с суммарными ядрами не обладают, в отличие от операторов с разностными ядрами, свойством коммутативности.

В данной работе изучается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение с суммарно-разностным ядром

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x H(x+t)\,u(t)\,dt + \int_0^x K(x-t)\,u'(t)\,dt, \quad x > 0, \quad \alpha > 1, \tag{1}$$

где функции $H(x)$ и $K(x)$ удовлетворяют следующим основным условиям:

$$H \in C^1[0,\infty), \quad H(x) \text{ не убывает на полуоси } [0,\infty) \quad \text{и} \quad H(0) \ge 0, \tag{2}$$

[1] *Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова, Грозный, Россия*
[2] *Чеченский государственный педагогический университет, Грозный, Россия*
[3] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
**E-mail: askhabov@yandex.ru*

$$K \in C^1[0,\infty),$$
$$K'(x) \text{ не убывает на полуоси } [0,\infty) \qquad (3)$$
$$K(0) = 0 \quad \text{и} \quad K'(0) > 0.$$

Теоретический и прикладной интерес представляют нетривиальные решения уравнений вида (1), поэтому они разыскиваются в классе

$$Q_0^1 = \{u(x)\colon u \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty),$$
$$u(0) = 0 \ \text{ и } \ u(x) > 0 \ \text{ при } \ x > 0\}.$$

Цель данной работы – доказать глобальную теорему о существовании, единственности и способе нахождения нетривиального решения уравнения (1), а также получить точные двусторонние оценки для этого решения.

Наряду с интегро-дифференциальным уравнением (1) исследуется также тесно связанное с ним интегральное уравнение

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x [H(x+t) + K'(x-t)]u(t)\,dt, \qquad (4)$$
$$x > 0, \quad \alpha > 1.$$

Очевидно, что уравнение (4) имеет тривиальное решение $u(x) \equiv 0$ в конусе

$$Q = \{u(x)\colon \ u \in C[0,\infty) \ \text{ и } \ u(x) \geq 0 \ \text{ при } \ x \geq 0\},$$

состоящем из неотрицательных непрерывных на полуоси $[0,\infty)$ функций, и, вообще, любое решение этого уравнения в конусе Q удовлетворяет условию $u(0) = 0$. Кроме того, если интегральное уравнение (4) имеет нетривиальное решение $u \in Q$, то его сдвиги

$$u(x) = \begin{cases} u(x-\delta), & \text{если} \quad x > \delta, \\ 0, & \text{если} \quad x \leq \delta, \end{cases}$$

также являются решениями этого уравнения при любом $\delta > 0$, т.е. уравнение (4) может иметь континуум решений. Поэтому, для того чтобы задачу нахождения нетривиальных решений уравнения (4) сделать корректной и в связи с тем, что с прикладной и теоретической точек зрения особый интерес представляют непрерывные положительные при $x > 0$ решения уравнения (4), будем искать его решения в классе

$$Q_0 = \{u(x)\colon u \in C[0,\infty),\ u(0) = 0$$
$$\text{и } \ u(x) > 0 \ \text{ при } \ x > 0\}.$$

Заметим, что теория линейных интегральных уравнений типа свертки, т.е. уравнений с разностными ядрами, в настоящее время достаточно хорошо разработана и ее основные результаты приведены, например, в монографии [8]. Что касается соответствующих линейных интегральных уравнений с суммарными ядрами, то, как отмечено в работе [9], они изучены, в отличие от уравнений с разностными ядрами, сравнительно мало. Это замечание справедливо также относительно нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

СВОЙСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Прежде чем сформулировать теорему о существовании, единственности и способе нахождения решения уравнения (1), выясним сначала, какими свойствами должны обладать эти решения, если они существуют.

Справедливы следующие две простые леммы.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3). *Если* $u \in Q_0$ *является решением уравнения* (4), *то функция* $u(x)$ *не убывает на* $[0,\infty)$ *и непрерывно-дифференцируема на* $(0,\infty)$, *т.е.* $u \in C^1(0,\infty)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3). *Если* $u \in Q_0^1$ *является решением интегро-дифференциального уравнения* (1), *то* $u \in Q_0$ *и является решением уравнения* (4). *Обратно, если* $u \in Q_0$ *является решением интегрального уравнения* (4), *то* $u \in Q_0^1$ *и является решением уравнения* (1).

Далее нам понадобятся следующие два неравенства

$$\int_0^x a(x+t)b(t)\,dt \leq \int_0^x [2a(2t) - a(t)]b(t)\,dt\,, \qquad (5)$$
$$x > 0,$$

$$\int_0^x a(x-t)b(t)\,dt \leq \int_0^x a(t)b(t)\,dt, \quad x > 0, \qquad (6)$$

справедливые для любых неотрицательных неубывающих на полуоси $[0,\infty)$ функций $a(x)$ и $b(x)$.

Неравенство (5) подробно доказано в [10, Лемма 1], а неравенство (6) известно как интегральное неравенство Чебышева [11, с. 120] (см. также [1, с. 121], где приведены два различных его доказательства).

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3). *Если* $u \in Q_0$ *является решением уравнения* (4), *то для любого* $x \in [0,\infty)$ *выполняются неравенства:*

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [H(2t)+K'(0)]\,dt\right)^{1/(\alpha-1)} \le u(x) \le$$
$$\le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [2H(2t)-H(t)+K'(t)]\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}. \tag{7}$$

В силу леммы 2, исследование интегро-дифференциального уравнения (1) сводится к исследованию интегрального уравнения (4). Из лемм 1 и 3, в частности, следует, что если $u \in Q_0^1$ и является решением уравнения (1), то оно не убывает на $[0,\infty)$ и удовлетворяет неравенствам (7).

Отметим, что при $H(x) = C_1$ и $K(x) = C_2 x$, где $C_1 \ge 0$ и $C_2 > 0$ есть константы, неравенства в (7) обращаются в равенства и дают решение как уравнения (4), так и уравнения (1), что свидетельствует о точности полученных в лемме 3 априорных оценок решения интегрального уравнения (4).

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Из леммы 3 вытекает, что решения уравнения (4) естественно разыскивать в классе

$$P = \{u(x):\ u \in C[0,\infty) \text{ и } F(x) \le u(x) \le G(x) \text{ для любого } x \in [0,\infty)\},$$

где

$$F(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [H(2t)+K'(0)]\,dt\right)^{1/(\alpha-1)},$$

$$G(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [2H(2t)-H(t)+K'(t)]\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Запишем уравнение (4) в операторном виде: $u = Tu$, где

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x [H(x+t)+K'(x-t)]\,u(t)\,dt\right)^{1/\alpha}.$$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3). *Тогда класс* P *инвариантен относительно оператора* T, *т.е.* $T: P \to P$.

При доказательстве априорных оценок (7) и леммы 4 весьма полезными оказались неравенства (5), (6) и лемма III [12, с. 288].

Рассмотрим теперь класс

$$P_b = \{u(x):\ u \in C[0,b] \text{ и } F(x) \le u(x) \le G(x) \text{ для любого } x \in [0,b]\},$$

где $b > 0$ есть любое число, и определим в нем расстояние следующим образом

$$\rho(u,v) = \sup_{0<x\le b} \frac{|u(x)-v(x)|}{G(x)}. \tag{8}$$

Лемма 5. *Пара* (P_b,ρ) *образует полное метрическое пространство.*

Лемма 5 доказывается аналогично лемме 4 из [13].

Из леммы 4 непосредственно вытекает, что оператор T действует из P_b в P_b. При следующем дополнительном предположении

$$q = \sup_{0<x\le b} \frac{\int_0^x [2H(2t)-H(t)+K'(t)]dt}{\alpha \cdot \int_0^x [H(2t)+K'(0)]dt} < 1, \tag{9}$$

оператор T является сжимающим в метрическом пространстве P_b, причем

$$\rho(Tu,Tv) \le q \cdot \rho(u,v), \quad \forall u,v \in P_b.$$

Полученные выше результаты позволяют сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 1$ *и выполнены условия* (2), (3) *и* (9). *Тогда интегральное уравнение* (4) *имеет в конусе* Q_0 *(и в* P_b *при любом* $b > 0$*) единственное решение* $u^*(x)$. *Это решение можно найти в пространстве* P_b *методом последовательных приближений пикаровского типа по формуле* $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, *со сходимостью по метрике* ρ. *При этом справедлива оценка скорости сходимости:*

$$\rho(u_n,u^*) \le \frac{q^n}{1-q}\rho(Tu_0,u_0), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

где число $q < 1$ *определено в условии* (9), *а* $u_0 \in P_b$ *есть начальное приближение (произвольная функция).*

В силу леммы 2, теоремы 1 и равенства (см. [10, Лемма 2])

$$\int_0^x H(x+t)\,dt = \int_0^x [2H(2t)-H(t)]\,dt$$

справедлива следующая основная теорема данной работы.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > 1$ *и выполнены условия* (2), (3) *и* (9). *Тогда интегро-дифференциальное уравнение* (1) *имеет в конусе* Q_0^1 *(и в* P_b *при любом* $b > 0$) *единственное решение* $u^*(x)$, *причем для любого* $x \in [0, \infty)$

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x \left[H(2t) + K'(0)\right]dt\right)^{1/(\alpha-1)} \le u^*(x) \le$$
$$\le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x \left[H(x+t) + K'(x-t)\right]dt\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Это решение можно найти в пространстве P_b *методом последовательных приближений пикаровского типа по формуле* $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, *со сходимостью по метрике* ρ, *определенной равенством* (8). *При этом справедлива оценка скорости сходимости* (10).

Замечание 1. В линейном случае (при $\alpha = 1$) как и в случае, когда $0 < \alpha < 1$, интегро-дифференциальное уравнение (1) имеет в конусе Q лишь тривиальное решение $u(x) \equiv 0$. Из теоремы 2 следует, что при $\alpha > 1$ уравнение (1) может иметь также и нетривиальное решение. Например, если $H(x) = C_1 \ge 0$ и $K(x) = C_2 x$, $C_2 > 0$, то кроме тривиального решения уравнение (1) имеет в конусе Q и нетривиальное решение:

$$u(x) = C \cdot x^{1/(\alpha-1)}, \quad \text{где} \quad C = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}[C_1 + C_2]\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

В этом состоит принципиальное отличие нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа от соответствующих однородных линейных уравнений, которые могут иметь лишь тривиальное решение.

В связи с условием (9) заметим, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]dt}{\alpha \cdot \int_0^x \left[H(2t) + K'(0)\right]dt} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2H(2x) - H(x) + K'(x)}{\alpha \cdot \left[H(2x) + K'(0)\right]} = \frac{1}{\alpha} < 1.$$

Значение этого предела подтверждает корректность дополнительного условия (9). Более того, в случае ядер $H(x) = C_1 \ge 0$ и $K(x) = C_2 x$, $C_2 > 0$, удовлетворяющих, очевидно, основным условиям (2) и (3), дополнительное условие (9) также выполняется и при этом значение $q = 1/\alpha$.

В заключение отметим, что следуя работам [10] и [13], теорему 2 можно обобщить на случай уравнения вида (1) с неоднородностью в правой части, а в случае показателя α специального вида такое уравнение можно исследовать в пространстве Лебега $L_{1+\alpha}(0, \infty)$ методом монотонных по Браудеру-Минти операторов (см., например, [14]).

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (код научной темы FEGS-2020-0001) в части получения точных априорных оценок решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения с суммарно-разностным ядром. Остальная часть исследования выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 22-11-00177).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асхабов С.Н.* Нелинейные уравнения типа свертки. М.: Физматлит, 2009. 304 с.
2. *Brunner H.* Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications. Cambridge: Univ. Press, 2017. 387 p.
3. *Keller J.J.* Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction // Z. Angew. Math. Phys. 1981. V. 32. № 2. P. 170–181.
4. *Schneider W.R.* The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type // Z. Angew. Math. Phys. 1982. V. 33. № 1. P. 140–142.
5. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. V. 4. № 2. P. 51–74.
6. *Какичев В.А., Рогожин В.С.* Об одном обобщении уравнения Чандрасекхара // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2. № 9. С. 1264–1270.
7. *Измаилов А.Ф.* 2-регулярность и теоремы о разветвлении // Итоги науки и техники. Сер. Совр. математика и ее прил. Темат. обз. 1999. Т. 65. С. 90–117.
8. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 296 с.
9. *Антипов В.Г.* Особое интегральное уравнение с суммарным ядром // Известия вузов. Математика. 1959. № 6. С. 9–13.
10. *Асхабов С.Н.* Об одном интегральном уравнении с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1210–1219.
11. *Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В.* Задачи студенческих математических олимпиад. М.: МГУ, 1987. 310 с.
12. *Лузин Н.Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. М: ГИТТЛ, 1951. 552 с.
13. *Асхабов С.Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 786–795.
14. *Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К., Якубов А.Я.* Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // ДАН. 1990. Т. 311. № 5. С. 1035–1039.

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH A SUM-DIFFERENCE KERNELS AND POWER NONLINEARITY

S. N. Askhabov[a,b,c]

[a] *Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russian Federation*

[b] *Chechen State Pedagogical University, Grozny, Russian Federation*

[c] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation*

Presented by Academician A.L. Semenov

Exact a priori estimates are obtained for solutions to a nonlinear Volterra-type integro-differential equation with a sum-difference kernel in the cone of the space of functions continuous on the positive half-axis. On the basis of these estimates, the method of weighted metrics is used to prove a global theorem on the existence, uniqueness, and method of finding a non-trivial solution of the indicated equation. It is shown that this solution can be found by the method of successive approximations of the Picard type and an estimate is given for the rate of their convergence in terms of the weight metric. Conditions under which only a trivial solution exists are indicated. Examples are given to illustrate the results obtained.

Keywords: Volterra integro-differential equation, sum-difference kernel, power nonlinearity