ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 507, с. 57–60

МАТЕМАТИКА

УДК 515.16

ЧИСЛА БРЮА СТРОГОЙ ФУНКЦИИ МОРСА

© 2022 г. П. Е. Пушкарь[1,2,*], М. С. Тёмкин[1,3,]**

Представлено академиком РАН В.А. Васильевым
Поступило 15.05.2020 г.
После доработки 27.10.2020 г.
Принято к публикации 27.10.2020 г.

Пусть f – функция Морса на многообразии M, у которой все критические значения попарно различны. По такой функции (вместе с выбором некоторых ориентаций) и полю $\mathbb{F}$ мы строим набор ненулевых элементов поля, называемых числами Брюа. При некоторых условиях ацикличности на M альтернированное произведение всех чисел Брюа не зависит от f с точностью до знака, т.е. является инвариантом многообразия. Для любого типичного однопараметрического семейства функций на M мы предъявляем соотношение, связывающее числа Брюа концевых функций семейства с числом перестроек, происходящих по ходу этого семейства. Это соотношение обобщает результат из [1].

Ключевые слова: теория Морса, теория Серфа, топология многообразий

DOI: 10.31857/S2686954322700047

1. ЧИСЛА БРЮА В УСЛОВИЯХ АЦИКЛИЧНОСТИ

Рассмотрим гладкий кобордизм $(M, \partial_0 M, \partial_1 M)$, т.е. компактное многообразие M с краем $\partial_0 M \sqcup \partial_1 M$. Напомним, что функцией Морса на M называется функция $f : M \to [0,1]$ с лишь невырожденными критическими точками, причем такая, что $f^{-1}(0) = \partial_0 M$, $f^{-1}(1) = \partial_1 M$. Если для любых двух критических точек x и y функции f верно, что $f(x) \neq f(y)$, то такая функция называется строгой. Мы начинаем с описания инварианта строгой функции Морса f, зависящего от поля $\mathbb{F}$ и являющегося усилением пар Баранникова [2]. Это инвариант функции (для фиксированного $\mathbb{F}$) относительно непрерывных деформаций в (несвязном) пространстве строгих функций Морса на данном многообразии. Интерес представляет уже случай замкнутого многообразия M.

Для $a \in [0,1]$ положим $M^a\{x \in M \mid f(x) \leq a\}$; это подмножество называется множеством меньших значений. Предположим, что для каждой критической точки $x \in M$ выбрана образующая в группе $H_{\operatorname{ind} x}(M^{f(x)+\varepsilon}, M^{f(x)-\varepsilon}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, где $\operatorname{ind} x$ – индекс критической точки x, а $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ достаточно мало. Такой выбор называется ориентацией f.

Зафиксируем строгую функцию Морса f и поле $\mathbb{F}$. Мы переходим к описанию множества значений, принимаемых инвариантом пары $(f, \mathbb{F})$. Инвариант состоит из двух частей: пар Баранникова (для краткости, просто пар) и чисел Брюа. Пары Баранникова – это некоторые пары (x, y) критических точек f соседнего индекса, подчиняющиеся условию, что если $f(x) > f(y)$, то $\operatorname{ind} x = \operatorname{ind} y + 1$. Каждая критическая точка может принадлежать максимум одной паре Баранникова. Приведенные условия являются необходимыми, но не достаточными, полное определение предъявлено ниже. Таким образом, инвариант заключает в себе, в частности, разбиение всех критических точек на верхние в паре (в наших обозначениях, x), нижние в паре (в наших обозначениях, y) и неспаренные. Набор пар задается, в этих терминах, биекцией между верхними точками и нижними точками индекса, меньшего на 1. Далее, число Брюа – это определяемый ниже ненулевой элемент поля $\mathbb{F}$, приписанный каждой паре Баранникова и определенный с точностью до знака. Пример для $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ изображен на рис. 1 (он реализуется некоторой строгой функцией Морса на S^4). Критические точки изображены точками, упорядоченными снизу вверх по возрастанию критических значений. Индекс подписан сверху или сни-

[1] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
[2] *Независимый Московский Университет, Москва, Россия*
[3] *Дартмутский колледж, Гановер, США*
[*] *E-mail: petya.pushkar@gmail.com*
[**] *E-mail: mikhail.temkin@dartmouth.edu*

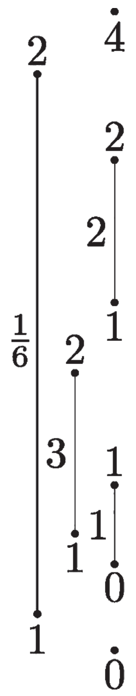

Рис. 1

зу, пары обозначены отрезками. Число Брюа пары написано слева от середины соответствующего отрезка (неопределенность в знаке опущена).

2. КОНСТРУКЦИЯ ИНВАРИАНТА

Выберем какую-нибудь ориентацию f. В дальнейшем все гомологии берутся с коэффициентами в $\mathbb{F}$. Пусть x и y – две критические точки индексов $k+1$ и k соответственно, такие что $f(x) > f(y)$. По основной теореме теории Морса, имеется гомотопическая эквивалентность $M^{f(x)+\varepsilon} \simeq M^{f(x)-\varepsilon} \cup_{\varphi} e^{k+1}$, где e^{k+1} – клетка размерности $k+1$, а $\varphi : S^k \to M^{f(x)-\varepsilon}$ – характеристическое отображение ее границы, которое можно считать вложением. Рассмотрим фундаментальный класс соответствующей сферы как элемент в $\mathrm{H}_k(M^{f(x)-\varepsilon})$. Пусть X – образ этого класса при отображении $\mathrm{H}_k(M^{f(x)-\varepsilon}) \to \mathrm{H}_k(M^{f(x)-\varepsilon}, M^{f(y)-\varepsilon})$. Далее, рассмотрим критическую точку y и ее относительный фундаментальный класс как элемент в $\mathrm{H}_k(M^{f(y)+\varepsilon}, M^{f(y)-\varepsilon})$. Пусть Y – образ этого класса при отображении $\mathrm{H}_k(M^{f(y)+\varepsilon}, M^{f(y)-\varepsilon}) \to \mathrm{H}_k(M^{f(x)-\varepsilon}, M^{f(y)-\varepsilon})$, индуцированном вложением. Говорят, что точки x и y образуют пару Баранникова, если $X = \lambda Y \neq 0$, для некоторого $\lambda \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F}\backslash\{0\}$. Число λ называется числом Брюа соответствующей пары. При смене ориентации функции f некоторые числа Брюа могут лишь поменять знак.

Можно показать, что это определение пар Баранникова совпадает с введенным в [2]. Отметим, что близкие идеи о числах Брюа над $\mathbb{Q}$ возникли независимо от настоящей работы в [3].

Легко видеть, что количество неспаренных точек индекса k равно $\dim \mathrm{H}_k(M, \partial_0 M)$. Если $\dim M \geq 4$ и $\mathbb{F}$ есть $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{F}_p$, то по любому наперед заданному числу $\lambda \in \mathbb{F}^*$ можно построить строгую функцию Морса на M, имеющую $\pm\lambda$ в качестве одного из своих чисел Брюа. Далее, рассмотрим произведение

$$\prod_{\theta\in\Theta} \lambda_\theta^{(-1)^{\deg\theta}} \in \mathbb{F}^*/\pm 1,$$

где Θ – множество пар Баранникова функции f над $\mathbb{F}$, λ_θ – число Брюа пары θ, $\deg\theta$ – индекс верхней критической точки в паре θ. Мы называем это произведение альтернированным произведением чисел Брюа, по аналогии с эйлеровой характеристикой, которая является альтернированной суммой, например, чисел Бетти.

Теорема 1. *Пусть f – строгая функция Морса на M, а $\mathbb{F}$ – поле. Предположим, что $\mathrm{H}_k(M, \partial_0 M; \mathbb{F}) = 0$ для всех $0 < k < \dim M$. Тогда альтернированное произведение чисел Брюа не зависит от f (с точностью до знака).*

Рассмотрим в качестве примера $M = \mathbb{RP}^n$ (здесь $\partial_0 M = \partial_1 M = \varnothing$) и $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$. Тогда это произведение равно $\pm 2^{[n/2]}$, где квадратные скобки обозначают целую часть. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть стандартную функцию Морса с $n+1$ критической точкой, инвариант которой изображен на рис. 2 ($n = 6$). Условие ацикличности из Теоремы 1 является существенным – для любого наперед заданного целого числа μ можно найти строгую функцию Морса f на $\mathbb{CP}^2$, для которой альтернированное произведение чисел Брюа над $\mathbb{Q}$ равно $\pm\mu$.

3. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МОРСА

Будем говорить, что две пары Баранникова (x_1, y_1) и (x_2, y_2) идут внахлест, если либо $f(y_1) < f(y_2) < f(x_1) < f(x_2)$, либо $f(y_2) < f(y_1) < f(x_2) < f(x_1)$. Обозначим через O количество (неупорядоченных) пар Баранникова, идущих внахлест. Для примера на рис. 1 это число равно 1. В дальнейшем нам понадобится число

$$\tau(f, \mathbb{F}) = (-1)^{\mathrm{O}} \prod_{\theta\in\Theta} \lambda_\theta^{(-1)^{\deg\theta}} \in \mathbb{F}^*,$$

не имеющее какой-либо неопределенности в знаке, но зависящее от ориентации f.

Рассмотрим типичный путь $\{f_t\}$ в пространстве функций на M, $t \in [-1,1]$; его принято называть типичным однопараметрическим семейством функций. Типичная точка семейства есть строгая функция Морса $f_{t_0} : M \to [0,1]$. С типичным семейством $\{f_t\}$ связана его диаграмма Серфа [4], определяемая как подмножество точек плоскости вида (t,a), где a является критическим значением функции f_t. Это подмножество есть конечное объединение образов отрезка, гладких вне своих концов; эти образы называются дугами. Дуги пересекаются лишь просто и трансверсально и не имеют вертикальных касательных. Их граничные точки есть либо каспы (т.е. негладкие точки полукубической параболы), либо точки на вертикальных прямых $t = \pm 1$.

Имеется лишь конечное число значений параметра t, в которых функция f_t не является строгой функцией Морса. Говорят, что в этих точках происходит перестройка строгой функции Морса. Такие перестройки бывают двух типов.

1. Функция f_{t_0} строгая, но не морсовская. В этот момент происходит рождение или смерть двух критических точек соседнего индекса. В подходящих координатах эта ситуация моделируется семейством $f_t(x_1,\ldots,x_{\dim M}) = x_1^3 \pm tx_1 + Q(x_2,\ldots,x_{\dim} M)$, где Q — невырожденная квадратичная форма. На диаграмме Серфа эта перестройка отвечает каспу. Можно показать, что две упомянутые точки соседнего индекса образуют пару Баранникова с числом Брюа ± 1 (для любого $\mathbb{F}$, причем знак не зависит от $\mathbb{F}$).

2. Функция f_{t_0} морсовская, но не строгая. В этот момент происходит обмен местами двух критических значений. На диаграмме Серфа это отвечает трансверсальному пересечению двух дуг.

Каждая дуга соответствует некоторой критической точке функции f_t для $t \in (a,b) \subset [-1,1]$, где (a,b) — проекция внутренних точек этой дуги в $[-1,1]$. Пусть количество дуг равно N. Тогда, сделав 2^N бинарных выборов, мы можем согласованно ориентировать все строгие функции Морса семейства $\{f_t\}$. Обозначим через C количество каспов с числом Брюа -1, а через X — число самопересечений диаграммы Серфа (т.е. перестроек второго типа). Очевидно, X — инвариант семейства, т.е. число, не зависящее от ориентаций.

Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики не два. Предположим, что $\mathrm{H}_*(M,\partial_0 M;\mathbb{F}) = 0$. В таком случае, согласно предыдущей части этой заметки, у любой строгой функции Морса f_t нет неспаренных

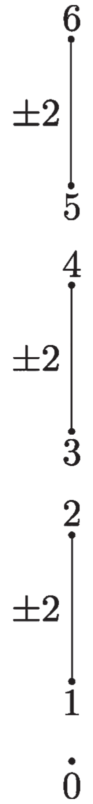

Рис. 2

точек и $\tau(f_t,\mathbb{F})$ не зависит от f_t с точностью до знака. Нетрудно показать, что знак $\frac{\tau(f_1,\mathbb{F})}{\tau(f_{-1},\mathbb{F})}(-1)^{\mathrm{C}} \in \{\pm 1\}$ является инвариантом семейства. Следующая теорема устанавливает связь между двумя введенными инвариантами.

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики не два, а $(M,\partial_0 M,\partial_1 M)$ — такой кобордизм, что $\mathrm{H}_*(M,\partial_0 M;\mathbb{F}) = 0$. Пусть также $\{f_t\}$ — типичное однопараметрическое семейство функций на M (как-либо ориентированное). Тогда справедливо равенство*

$$\frac{\tau(f_1,\mathbb{F})}{\tau(f_{-1},\mathbb{F})}(-1)^{\mathrm{C}}(-1)^{\mathrm{X}} = 1.$$

Это равенство по модулю два, записанное в мультипликативной нотации.

4. О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ И СВЯЗЯХ С ИЗВЕСТНЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

Подробности и доказательства обеих теорем описываются в работе [5]. Для доказательств вводится модификация понятия полного флага на цепном комплексе над полем. Линейно-алгебраическое ядро доказательств — разложение Брюа для $GL_n(\mathbb{F})$. Необходимость последовательного изложения этих инструментов делает геометрические результаты менее доступными. С другой стороны, если ограничиться формулировками, то оказывается, что можно обойтись лишь языком элементарной дифференциальной топологии, что и сделано в настоящей заметке.

Теорема 2 доказана в [1] в следующих дополнительных предположениях.

1) Функции f_{-1} и f_1 не имеют критических точек (как следствие, кобордизм тривиален, т.е. $M = \partial_0 M \times [0,1]$). В нашем контексте это означает, что первый из трех множителей в вышеприведенной формуле равен 1.

2) Многообразие $\partial_0 M$ либо односвязно и стабильно параллелизуемо, либо имеет размерность не меньше 5.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят В. Васильева за вдумчивую вычитку текста и ряд полезных замечаний. Его усилия сделали изложение более внятным.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование М. Тёмкина выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и при государственной поддержке ведущих университетов Российской Федерации “5-100”. Работа П. Пушкаря поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 18-01-00461) и фондом Саймонса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Akhmetev P.M., Cencelj M., Repovs D.* Some Algebraic Properties of Cerf Diagrams of One- Parameter Function Families. Functional Analysis and Its Applications. 2005. V. 39.
2. *Barannikov S.* The Framed Morse Complex and Its Invariants // Advances in Soviet Mathematics. 1994. V. 22. P. 93–115.
3. *Le Peutrec D., Francis Nier F., Viterbo C.* Bar Codes of Persistent Cohomology and Arrhenius Law for P-forms, 2020. arXiv: 2002.06949 [math.AP].
4. *Cerf J.* La Stratification Naturelle Des Espaces de Fonctions Différentiables Rolles et Le Théorème de La Pseudo-Isotopie // Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques. 1970. V. 39. P. 5–173.
5. *Pushkar P., Temkin M.* Enhanced Bruhat Decomposition and Morse Theory. Int. Math. Res. Not. (to appear), 2022. arXiv: 2012.05307 [math.AT].

BRUHAT NUMBERS OF A STRONG MORSE FUNCTION

P. E. Pushkar[a,b] and M. S. Temkin[a,c]

[a] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*
[b] *Independent University of Moscow, Moscow, Russian Federation*
[c] *Dartmouth College, Hanover, USA*

Presented by Academician of the RAS V.A. Vasilyev

Let f be a Morse function on a manifold M, such that all its critical values are pairwise distinct. Given such a function (together with a certain choice of orientations) and a field $\mathbb{F}$ we construct a set of non-zero elements of the field, which are called Bruhat numbers. Under certain acyclicity conditions on M alternating product of all the Bruhat numbers doesn’t depend on f (up to sign), thus it is an invariant of the manifold. For any typical one-parameter family of functions on M we provide a relation which links Bruhat numbers of the boundary functions of the family with the number of bifurcations which happen along the way. This relation generalizes the result from [1].

Keywords: Morse theory, Cerf theory, topology of manifolds