ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 507, с. 86–92

МАТЕМАТИКА

УДК 517+531.01

ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ ОБЪЕМА СИСТЕМ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

© 2022 г. М. В. Шамолин[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 16.10.2022 г.
После доработки 24.10.2022 г.
Принято к публикации 28.10.2022 г.

В работе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма

DOI: 10.31857/S2686954322700060

Наличие достаточного количества не только первых интегралов, но и других тензорных инвариантов, как известно [1–3], позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт достаточно естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими (асимптотическими) предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать трансцендентные (в смысле комплексного анализа) функции (см. также [4–6]).

Как показано ранее, задача о движении четырехмерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как “поток набегающей среды, заполняющей всеобъемлющее четырехмерное пространство”. Эта задача приводит к динамической системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по трехмерной сфере с индуцированной метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим трехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т.д.

Впервые частные случаи систем с тремя степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в работах автора [5, 6]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: shamolin@rambler.ru*

В разделе 1 изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, трехмерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических.

В разделе 2 в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным в разделе 1.

В разделе 3 рассматривается усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Также указываются достаточные условия интегрируемости.

1. ИНВАРИАНТЫ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Рассмотрим гладкое трехмерное риманово многообразие $M^3\{\alpha,\ \beta\}$ с координатами $(\alpha,\ \beta)$, $\beta = (\beta_1,\ \beta_2)$, римановой метрикой $g_{ij}(\alpha,\ \beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\ \beta)$, и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^3\{\alpha^{\bullet}, \beta_1^{\bullet}, \beta_2^{\bullet}; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ (ср. с [5, 8]) при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее общий случай задания новых кинематических соотношений в следующем виде:

$$\alpha^{\bullet} = z_3 f_3(\alpha), \quad \beta_1^{\bullet} = z_2 f_1(\alpha), \quad \beta_2^{\bullet} = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \tag{1}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1, z_2, z_3 в касательном пространстве уместно вводить тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [5, 7, 9, 10] с семью ненулевыми коэффициентами связности:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} + \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet} + 2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet} = 0,
\end{gathered} \tag{2}$$

т.е. остальные 11 коэффициентов связности равны нулю. В случае (1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, примут вид

$$\begin{gathered}
z_1^{\bullet} = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 -\\
- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2,\\
z_2^{\bullet} = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 -\\
-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) z_1^2,\\
z_3^{\bullet} = -f_3(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3^2 -\\
-\frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) z_1^2,
\end{gathered} \tag{3}$$

и уравнения (2) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (1), (3) на многообразии $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (2) (к системе (1), (3)).

(а) Системы на касательном расслоении к трехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для динамики динамически симметричного четырехмерного твердого тела.

(б) Системы на касательных расслоениях более общих трехмерных поверхностях вращения.

(в) Системы на касательном расслоении трехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Для полного интегрирования системы (1), (3) достаточно знать, вообще говоря, четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (то, что полный набор состоит из четырех, а не из пяти, тензорных инвариантов, будет показано ниже).

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (2), переписанных в виде $x^{i\bullet\bullet} + \sum_{j,k=1}^{3}\Gamma^i_{jk}(x)x^{j\bullet}x^{k\bullet} = 0$, $i = 1, 2, 3$, является гладкая функция $\sum_{j,k=1}^{3} g_{jk}(x)x^{j\bullet}x^{k\bullet}$, но мы представим его в более простой форме. Кроме того, в следующей теореме участвуют четыре дифференциальных соотношения на четыре “произвольные” функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ из (1).

Теорема 1. *Если выполнены условия*

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha), \tag{4}$$

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \quad \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{5}$$

$$\begin{cases} \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \\ f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\ \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha), \\ 2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \end{cases} \tag{6}$$

то система (1), (3) *обладает полным набором, состоящим из четырех первых интегралов вида*

$$\Phi_1(z_3,z_2,z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1^2 = \text{const}. \tag{7}$$

$$\Phi_2(z_2,z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2+z_2^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad \Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}. \tag{8}$$

$$\Phi_3(z_1;\alpha,\beta_1) = z_1\Phi_0(\alpha)\Phi(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad \Phi(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}. \tag{9}$$

$$\Phi_4(\beta_1,\beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}}db = C_4 = \text{const}. \tag{10}$$

Более того, после некоторого ее приведения (*замен независимой переменной* $d/dt = f_3(\alpha)d/d\tau$ *и фазовых* $z^* = \ln\sqrt{z_1^2+z_2^2}$, $z_*^* = \ln[\sqrt{z_1^2+z_2^2}/|z_1|]$) *фазовый поток системы* (1), (3) *сохраняет объем на касательном расслоении* TM^3, *т.е. сохраняется дифференциальная форма фазового объема*

$$dz_3 \wedge dz^* \wedge dz_*^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2.$$

Заметим, что система дифференциальных равенств (6) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (7) (или см. ниже (12)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [9, 10]). При этом поиск как интеграла (7), так и (8)–(10) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [5, 11].

Пример 1. В случае обобщенных сферических координат, когда метрика на трехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства ($k(\alpha) \equiv 1$), или когда метрика на трехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий ($k(\alpha) \equiv \cos\alpha$) (задачи класса (а)), однопараметрическая система, почти всюду эквивалентная уравнениям геодезических и имеющая первые интегралы (7)–(10), примет следующий вид:

$$\alpha^\bullet = -z_3, \quad z_3^\bullet = -(z_1^2+z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\mu_1\sin^2\alpha},$$

$$z_2^\bullet = z_2z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\mu_1\sin^2\alpha} + z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1\sin^2\alpha}},$$

$$z_1^\bullet = z_1z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\mu_1\sin^2\alpha} - z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1\sin^2\alpha}},$$

$$\beta_1^\bullet = z_2\frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1\sin^2\alpha}},$$

$$\beta_2^\bullet = -z_1\frac{k(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1\sin^2\alpha}}, \quad \mu_1 \in R.$$

Пример 2. В случае трехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна (задачи класса (в)), четырехпараметрическая система, почти всюду эквивалентная уравнениям геодезических

$$\alpha^{\bullet\bullet} - \frac{1}{\alpha}(\alpha^{\bullet 2} - \beta_1^{\bullet 2} - \beta_2^{\bullet 2}) = 0,$$

$$\beta_1^{\bullet\bullet} - \frac{1}{\alpha}\alpha^\bullet\beta_1^\bullet = 0, \quad \beta_2^{\bullet\bullet} - \frac{1}{\alpha}\alpha^\bullet\beta_2^\bullet = 0,$$

и имеющая первые интегралы (7)–(10), примет следующий вид:

$$\alpha^\bullet = z_3\mu_1\alpha, \quad z_3^\bullet = -z_2^2\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2+\mu_2} - z_1^2\frac{\mu_1\mu_3^2\alpha^2}{\mu_3^2\alpha^2+\mu_4},$$

$$z_2^\bullet = z_2z_3\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2+\mu_2}, \quad z_1^\bullet = z_1z_3\frac{\mu_1\mu_3^2\alpha^2}{\mu_3^2\alpha^2+\mu_4},$$

$$\beta_1^\bullet = z_2\frac{\mu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\mu_2}}, \quad \beta_2^\bullet = z_1\frac{\mu_1\mu_3\alpha^2}{\mu_3^2\alpha^2+\mu_4},$$

$$\mu_1,\ldots,\mu_4 \in R.$$

2. ИНВАРИАНТЫ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Несколько модифицируем систему (1), (3), вводя в нее консервативное гладкое силовое поле с аддитивными компонентами $F_3(\alpha)$, $F_2(\beta_1)$, $F_1(\beta_2)$ с потенциалом (12), см. далее. В проекциях же на оси $z_k^\bullet$, $k = 1, 2, 3$, силовое поле будет иметь следующие комбинированные компоненты, соответственно: $F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)$, $F_2(\beta_1)f_1(\alpha)$, $F_3(\alpha)f_3(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$
\begin{gathered}
\alpha^{\bullet} = z_3 f_3(\alpha),\\
z_3^{\bullet} = F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f_3(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3^2 -\\
-\frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
z_2^{\bullet} = F_2(\beta_1)f_1(\alpha) -\\
- f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2 z_3 -\\
-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
z_1^{\bullet} = F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) -\\
- f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1 z_3 -\\
- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1 z_2,\\
\beta_1^{\bullet} = z_2 f_1(\alpha), \quad \beta_2^{\bullet} = z_1 f_2(\alpha)g(\beta_1),
\end{gathered}
\tag{11}
$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$
\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} - F_3(\alpha)f_3^2(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} +\\
+ \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_1^{\bullet\bullet} - F_2(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} +\\
+ \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_2^{\bullet\bullet} - F_1(\beta_2)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1) +\\
+ 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet} + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet} = 0
\end{gathered}
$$

на касательном расслоении ТМ3$\{\alpha^{\bullet}, \beta_1^{\bullet}, \beta_2^{\bullet}; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (4)–(6), *то система* (11) *обладает полным набором, состоящим из четырех первых интегралов вида:*

$$
\begin{gathered}
\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta) =\\
= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + V(\alpha,\beta) = C_1 = \mathrm{const},
\end{gathered}
\tag{12}
$$

$$
\begin{gathered}
V(\alpha,\beta) = V_3(\alpha) + V_2(\beta_1) + V_1(\beta_2) =\\
= -2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a)da - 2\int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} F_2(b)db - 2\int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} F_1(b)db,
\end{gathered}
$$

а также при $F_2(\beta_1) \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$ — *первых интегралов* (8)–(10).

Более того, *после некоторого ее приведения* (*замен независимой переменной* $d/dt = f_3(\alpha)d/d\tau$ и *фазовых* $z^* = \ln\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $z_*^* = \ln[\sqrt{z_1^2 + z_2^2}/|z_1|]$) *фазовый поток системы* (11) *сохраняет объем на касательном расслоении* TM^3, *т.е. сохраняется дифференциальная форма фазового объема*

$$
dz_3 \wedge dz^* \wedge dz_*^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2.
$$

3. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Далее несколько модифицируем систему (11) при условиях (4)–(6), а также, для простоты, при $F_2(\beta_1) \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$, вводя в нее гладкое силовое поле с диссипацией. Ее наличие (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (13) (в отличие от системы (11)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $z_k^{\bullet}$, $k = 1, 2, 3$, соответственно: $z_1 F^1(\alpha)$, $z_2 F^1(\alpha)$, $F_3(\alpha)f_3(\alpha) + z_3 F_3^1(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$
\begin{gathered}
\alpha^{\bullet} = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha),\\
z_3^{\bullet} = F_3(\alpha)f_3(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)(z_2^2 + z_1^2) + z_3 F_3^1(\alpha),\\
z_2^{\bullet} = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2 z_3 -\\
- f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1)z_1^2 + z_2 F^1(\alpha),\\
z_1^{\bullet} = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1 z_3 -\\
- f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1 z_2 + z_1 F^1(\alpha),\\
\beta_1^{\bullet} = z_2 f(\alpha),\ \beta_2^{\bullet} = z_1 f(\alpha)g(\beta_1),
\end{gathered}
\tag{13}
$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$
\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} - \{b\tilde{\delta}(\alpha) + F_3^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha)\}\alpha^{\bullet} -\\
- F_3(\alpha)f_3^2(\alpha) + b\delta(\alpha)F_3^1(\alpha) +\\
+\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta_1)\beta_2^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_1^{\bullet\bullet} - \left\{F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\beta_1^{\bullet} +\\
+ 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} + \Gamma^1_{22}(\beta_1)\beta_2^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_2^{\bullet\bullet} - \left\{F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\beta_2^{\bullet} +\\
+ 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet} + \Gamma_2(\beta_1)\beta_2^{\bullet 2} = 0, \quad \tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha,
\end{gathered}
$$

на касательном расслоении ТМ3$\{\alpha^{\bullet}, \beta_1^{\bullet}, \beta_2^{\bullet}; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Для полного интегрирования системы необходимо знать, вообще говоря, пять независимых тензорных инвариантов. Однако после следующей замены переменных $z_1, z_2 \to z, z_*$, $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $z_* = z_2/z_1$, система (13) распадается следующим образом:

$$\alpha^\bullet = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha),$$

$$z_3^\bullet = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) z^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \quad (14)$$

$$z^\bullet = \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) z z_3 + z F^1(\alpha),$$

$$z_*^\bullet = (\pm) z\sqrt{1 + z_*^2} f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right],$$

$$\beta_1^\bullet = (\pm)\frac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha), \quad (15)$$

$$\beta_2^\bullet = z_1 f(\alpha) g(\beta_1). \quad (16)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (14)–(16) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (14), один – после замены независимой переменной – независимой системы (15), и дополнительный тензорный инвариант, “привязывающий” уравнение (16) (т.е. всего четыре).

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)|, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \quad (17)$$

а для некоторых $\lambda_3^0, \lambda_s^1 \in \mathbf{R}$ выполнены равенства

$$F_3(\alpha) = \lambda_3^0\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \quad F_s^1(\alpha) = \lambda_s^1 f_3(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha), \quad s = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Здесь $F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F^1(\alpha)$, т.е. $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda^1$.

Условие (17) назовем “геометрическим”, а условия из группы (18) – “энергетическими”. Условие (17) названо геометрическим, в том числе потому, что накладывает условие на приведенный коэффициент связности $\Gamma_3(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (18) названы энергетическими, в том числе, потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (17) *и* (18). *Тогда система* (14)–(16) *обладает четырьмя независимыми, вообще говоря, трансцендентными* [12, 13] *первыми интегралами.*

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [12]). В частности, если $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\Theta_1(z_3, z; \alpha) = G_1\left(\frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{z}{\Delta(\alpha)}\right) = \quad (19)$$
$$= \frac{f_3^2(\alpha)(z_3^2 + z^2) + (b - \lambda^1) z_3\delta(\alpha) f_3(\alpha) - \lambda_3^0\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha) f_3(\alpha)} = $$
$$= C_1 = \mathrm{const}.$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (14) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(z_3, z; \alpha) = G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{z}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \quad (20)$$

Первый интеграл для системы (15) будет иметь вид

$$\Theta_3(z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \mathrm{const}, \quad (21)$$

о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (9). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (16), находится по аналогии с (10):

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}}db = C_4 = \mathrm{const}, \quad (22)$$

где, после взятия интеграла (22), вместо постоянных C_2, C_3 можно подставить левые части первых интегралов (9), (10), соответственно.

Выражение функций (19), (20) через конечную комбинацию элементарных функций зависит и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Так, например, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$ дополнительный первый интеграл системы (14) найдется из дифференциального соотношения

$$d\ln|\Delta(\alpha)| = \frac{(b + u_3)du_3}{U_2(C_1, u_3)}, \quad u_3 = \frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \quad u = \frac{z}{\Delta(\alpha)},$$

$$U_1(u_2) = u_3^2 + (b - \lambda^1)u_3 - \lambda_3^0,$$

$$U_2(C_1, u_3) = 2U_1(u_3) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_3)}\}/2, \quad C_1 \neq 0.$$

Правая часть данного соотношения выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая – в зависимости от функции $\Delta(\alpha)$.

Теорема 4. *Если для систем вида* (14)–(16) *выполняются геометрическое и энергетические свойства* (17), (18), *то у нее также существуют функционально независимые между собой следующие четыре инвариантные дифференциальные формы с трансцендентными коэффициентами*:

$$\rho_1(z_3, z; \alpha) dz_3 \wedge dz \wedge d\alpha,$$

$$\rho_1(z_3, z; \alpha) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)}\right\} \times$$
$$\times \frac{u_3^2 + u^2 + (b - \lambda^1)u_3 - \lambda_3^0}{u};$$

$$\rho_2(z_3, z; \alpha) dz_3 \wedge dz \wedge d\alpha,$$

$$\rho_2(z_3, z; \alpha) = \Delta(\alpha) \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)}\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\int \frac{(b + u_3) du_3}{U_2(C_1, u_3)}\right\};$$

$\rho_3(z_*, \beta_1) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + z_*^2}} dz_* \wedge d\beta_1$ (*после замены независимого переменного в системе* (15));

$$\rho_4(z_3; \alpha, \beta_1, \beta_2) dz_3 \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2,$$

$$\rho_4(z_3; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)}\right\} \cdot \Theta_4(\beta_1, \beta_2),$$

но зависимые с первыми интегралами (19)–(22).

Для полной интегрируемости системы (14)–(16) можно использовать или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством четыре.

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [5, 14]. Заметим, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле комплексного анализа – наличия существенно особых точек после продолжения функций) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих (асимптотических) предельных множеств [13].

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения [14], касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к трехмерной сфере, а также более общих систем на расслоении трехмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского (см. также [14–16]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1912. 340 p.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. Вып. 1. С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. № 1. С. 84–90.
6. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.
7. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.
8. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
9. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
10. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
13. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
14. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
15. *Трофимов В.В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.
16. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1349–1353.

INVARIANT VOLUME FORMS OF VARIABLE DISSIPATION SYSTEMS WITH THREE DEGREES OF FREEDOM

M. V. Shamolin[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

Tensor invariants (differential forms) for homogeneous dynamical systems on tangent bundles to smooth three-dimensional manifolds are presented in this paper. The connection between the presence of these invariants and the full set of the first integrals necessary for the integration of geodesic, potential and dissipative systems is shown. At the same time, the introduced force fields make the considered systems dissipative with dissipation of different signs and generalize the previously considered ones.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form