ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 509, с. 83–86

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

ОБОБЩЕНИЕ ПЕРВОЙ ТЕОРЕМЫ БЕРЛИНГА–МАЛЬЯВЕНА

© 2023 г. И. М. Васильев[1,*]

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым
Поступило 08.09.2022 г.
После доработки 14.11.2022 г.
Принято к публикации 20.12.2022 г.

В данной работе анонсируется результат, обощающий первую теорему Берлинга–Мальявена. Другими словами, устанавливается новое достаточное условие на функцию, гарантирующее ее принадлежность классу мажорант Берлинга–Мальявена. Также показано, что основной результат этой статьи точен во многих смыслах.

Ключевые слова: преобразование Фурье, спектр, преобразование Гильберта, логарифмический интеграл, теорема Берлинга–Мальявена

DOI: 10.31857/S2686954322600550, **EDN:** CQEOWO

1. ВВЕДЕНИЕ

Следующая теорема впервые доказана в 1962 г. (см. [2]) Арне Берлингом и Полем Мальявеном.

Теорема А. *Пусть* $\omega : \mathbb{R} \to (0,1]$ *– непрерывная функция, такая что* $\log(1/\omega) \in L^1\left(\mathbb{R}, dx/\left(1+x^2\right)\right)$ *и функция* $\log(1/\omega)$ *липшицева. Тогда для всякого* $\delta > 0$ *найдется функция* $f \in L^2(\mathbb{R})$, *не равная нулю почти всюду и удовлетворяющая* $\operatorname{spec}(f) \subset [0,\delta]$ *и* $|f(x)| \le \omega(x)$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$ (*под* $\operatorname{spec}(f)$ *мы подразумеваем носитель преобразования Фурье функции* f).

Если для некоторой функции ω верно, что для некоторого $\delta > 0$ найдется функция $f \in L^2(\mathbb{R})$, не равная нулю почти всюду и удовлетворяющая условиям $\operatorname{spec}(f) \subset [0,\delta]$ и $|f(x)| \le \omega(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то такую ω мы будем называть δ-допустимой мажорантой. Если описанное выше верно для всех $\delta > 0$, то ω по определению является BM мажорантой.

Теорему А также иногда называют теоремой Берлинга–Мальявена о мажоранте.

Теорема А неразрывно связана со второй теоремой Берлинга–Мальявена, также называемой теоремой Берлинга–Мальявена о полноте системы гармоник, см. [9]. Действительно, первая теорема Берлинга–Мальявена существенно используется при доказательстве второй теоремы Берлинга–Мальявена. Не приводя формулировки, скажем лишь, что по мнению некоторых видных аналитиков, этот результат является одной из глубочайших теорем математического анализа двадцатого века.

Отметим также, что теорема А – очень важный результат и в современной теории функций. Чтобы это проиллюстрировать, подчеркнем ее связь с задачей о лакуне, см. [11], и с теорией теплицевых ядер, см. [8]. Отдельно процитируем относительно недавнее ее применение в теории резонансов гиперболических поверхностей, см. [3].

Заметим, что теорема А интересна и сама по себе, так как в каком-то смысле указывает границы следующей наивной формулировки принципа неопределенности в гармоническом анализе: “Ненулевая функция и ее преобразование Фурье не могут быть одновременно малы.” Недавние границы совсем другого рода для принципа неопределенности содержатся в статьях [10] и [7].

У доказательств первой и второй теорем Берлинга–Мальявена есть богатая история, но мы опишем ее здесь лишь вкратце. Помимо оригинального доказательства, существует множество других подходов к доказательству теорем Берлинга–Мальявена, принадлежащих следующим авторам: Г. Редхефферу (см. [12]), Л. Де Бранжу (см. [4]), П. Каргаеву, Н. Макарову и А. Полторацкому (см. [8]), и многим другим. В 2005 г. В. Хавин, Дж. Машреги и Ф. Назаров, см. [9], предложили новое доказательство первой теоремы Берлинга–Мальявена. Существенная новизна их доказательства состояла в том, что оно было сделано полностью вещественными методами и не использовало комплексный анализ. Слегка забегая

[1]*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия*

[*]*E-mail: milavas@mail.ru*

вперед, отметим, что наш подход при доказательстве основного результата этой работы будет частично основан на приведенной работе вышеупомянутых трех авторов.

Цель нашей работы – проанонсировать новое нетривиальное обощение теоремы А. Чтобы сформулировать наш основной результат, введем один класс функций.

Определение 1. *Пусть* $j \in \mathbb{N}$ *и пусть* r *– положительное число. Рассмотрим следующую систему интервалов:* $J_0 := [-2, 2)$, *при* $j \in \mathbb{N}$ *положим* $J_j := \left[2^j, 2^{j+1}\right)$ *и* $J_{-j} := \left[-2^{j+1}, -2^j\right)$. *Условимся считать, что абсолютно непрерывная функция* φ *лежит в классе* V_r, *если выполняется условие*

$$\left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|J_j|}\int_{J_j} |\varphi'(x)|^r dx\right)^{1/r} < \infty.$$

Следующая теорема – главный результат этой статьи.

Теорема 1. *Пусть* $\omega : \mathbb{R} \to (0,1]$ *– непрерывная функция, такая что* $\log(1/\omega) \in L^1\left(\mathbb{R}, dx/\left(1 + x^2\right)\right)$, *и пусть при этом функция* $\log(1/\omega)$ *абсолютно непрерывна и удовлетворяет* $\log(1/\omega) \in V_r$ *для некоторого* $r > 1$. *Тогда для всякого* $\delta > 0$ *найдется функция* $f \in L^2(\mathbb{R})$, *не равная нулю почти всюду и удовлетворяющая* $\operatorname{spec}(f) \subset [0, \delta]$ *и* $|f(x)| \le \omega(x)$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$.

Заметим, что теорема 1 очевидно влечет теорему А. Кроме того, нетрудно привести пример функции ω, к которой применима теорема 1, но не применима первая теорема Берлинга–Мальявена. Можно также показать, что существуют мажоранты, удовлетворяющие условиям теоремы 1, к которым не применим так называемый общий вид теорем Берлинга–Мальявена о мажоранте и мультипликаторе (имеется в виду теорема из раздела 3.4 статьи [9]).

Второй основной результат данной статьи показывает, что теорема 1 довольно точна.

Теорема 2. *Существуют функции* $\omega : \mathbb{R} \to (0,1]$, *такие что* $\log(1/\omega) \in V_1 \bigcap L^1\left(\mathbb{R}, dx/\left(1 + x^2\right)\right)$, *не являющиеся BM мажорантами.*

Чтобы доказать теорему 2, мы пользуемся одной идеей А.А. Боричева, которую автор данной статьи узнал из обзора [1]. Эта идея заключается в наблюдении, что функция с малым спектром, большая на некотором интервале, остается относительно большой на существенно большем концентрическом интервале. Точной формулировке этого принципа посвящены лемма 1 и теорема 2 из статьи [1]. Заметим, что в [1] этот принцип применяется только к функциям, растущим на бесконечности строго быстрее линейной. Наши же функции в теореме 2 могут линейно расти на бесконечности. Поэтому, чтобы доказать теорему 2, нам пришлось совместить идею А.А. Боричева с неким итеративным процессом.

Теорема 1 точна также в следующих смыслах. Теорема 1, вообще говоря, не будет выполняться, если в ее формулировке заменить классы V_r на аналогичные, в которых длины отрезков J_j образуют последовательность, лакунарную по Адамару. То же самое верно и для концов отрезков J_j. Соответствующие утверждения доказываются аналогично теореме 2.

В следующей главе мы опишем вкратце основные идеи доказательства главного результата работы – теоремы 1. Развернутая версия доказательства будет опубликована позднее.

2. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА СТАТЬИ

Доказательство теоремы 1 ведется по схеме, предложенной и разработанной в статье [9]. Предварительная версия доказательства доступна в препринте [14].

Мы будем использовать следующий критерий для принадлежности функции классу *BM* мажорант.

Это утверждение принадлежит В.П. Хавину и Дж. Машреги, см. [5] и [6].

Теорема B. *Если* $\omega : \mathbb{R} \to (0,1]$, $\log(1/\omega) \in L^1\left(\mathbb{R}, dx/\left(1 + x^2\right)\right)$ *и* $\|(\mathcal{H}\log(1/\omega))'\|_\infty < \pi\sigma$, *то* ω *–* σ*-допустимая мажоранта.*

Благодаря теореме B, чтобы доказать теорему 1, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $\Omega \in L^1\left(\mathbb{R}, dx/\left(1 + x^2\right)\right)$ *– неотрицательная, абсолютно непрерывная функция, такая что* $\Omega \in V_r$. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется функция* Ω_1, *удовлетворяющая условиям*

1) $\Omega(x) \le \Omega_1(x)$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$;

2) $\Omega_1 \in L^1\left(\mathbb{R}, dx/\left(1 + x^2\right)\right)$;

3) $\mathcal{H}\Omega_1 \in \operatorname{Lip}(\mathbb{R}, \varepsilon)$, где $\mathcal{H}$ *– преобразование Гильберта на вещественной прямой.*

Напомним, что для функций $\psi \in L^1(\mathbb{R}, dx/(1 + x^2))$ преобразование Гильберта задается такой формулой:

$$\mathcal{H}\psi(x) := \fint_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x - t} + \frac{t}{t^2 + 1}\right)\psi(t)dt.$$

Утверждения типа леммы 1 называются иногда в литературе леммами Назарова, см. [13]. Оставшаяся часть доказательства посвящена лемме 1.

Достаточно доказать такой локальный вариант леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $I \subset \mathbb{R}$ *— интервал и пусть* $\delta > 0$ *и* $\kappa > 0$. *Предположим, что* f *— неотрицательная, абсолютно непрерывная функция, такая что* $\|f'\|_{L^r(I)} \le \kappa l(I)^{1/r}$ *и* $\|f\|_{L^\infty(I)} \le \delta l(I)$. *Тогда найдется неотрицательная функция* $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, *удовлетворяющая условиям*

1) $F = 0$ *вне* $1.5I$,
2) $f(x) \le F(x)$ *для всех* $x \in I$,
3) $\|(\mathcal{H}F)'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \lesssim \delta$,
4) $\left(\frac{\delta}{\kappa}\right)^{2r/(2r-1)} \int_{\mathbb{R}} F(x)dx \lesssim \left(\int_I f(x)dx\right)^{(2r-2)/(2r-1)}$.

Действительно, вывести глобальный вариант из локального не составляет особого труда: для этого достаточно применить последний к сужениям функции Ω на интервалы J_j из определения 1.

Сосредоточимся теперь на лемме 2. Несложно видеть, что, ввиду однородности условий, наложенных на функцию f, этот результат достаточно доказать для интервала $[-1/2,1/2]$ и $\delta = 1$.

Чтобы построить искомую мажоранту, рассмотрим вспомогательную систему интервалов. (Отныне и до конца статьи все интервалы будут диадическими.)

Будем говорить, что интервал $I \subset [-1/2,1/2]$ — существенный, если $\|f\|_{L^\infty(I)} \ge l(I)/2$. Обозначим через A систему всех существенных интервалов. Возьмем ее максмимальную по включению подсистему, которую обозначим символом A^M. Присоединим к каждому интервалу из системы A^M его так называемый “хвост”, см. [9], раздел 2.6.5, где находится определение “хвоста” интервала. Затем, после присоединения всех “хвостов”, у получившейся системы еще раз возьмем максимальную по включению подсистему. То, что получится в итоге — так называемая резгуляризованная система интервалов, обозначаемая здесь τ. Искомая мажоранта определяется теперь формулой

$$F := \sum_{a\in\tau} \phi_a,$$

где ϕ_a — функция–“шапочка”, подогнанная под интервал a (т.е., бесконечно дифференцируемая функция, тождественно равная длине интервала a на этом интервале, всюду на $\mathbb{R}$ меньшая этой длины и обнуляющаяся на концентрическом a интервале, в полтора раза большей чем у a длины).

Далее, проверим у мажоранты F нужные в лемме 2 свойства. Первые два свойства проверяются легко. Оценка преобразования Гильберта следует из третьего свойства и проводится способом, сходным с методом доказательства из раздела 2.6.8 статьи [9].

Опишем теперь, как проверить третье свойство. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $a \in \tau$ *и пусть* f *удовлетворяет* $\|f'\|_{L^r(a)} \le \kappa l(a)^{1/r}$ *для некоторых* $\kappa \ge 1$ *и* $r > 1$. *Обозначим* $\alpha := (2r-2)/(2r-1)$. *Тогда выполняется*

$$\|f\|_{L^\infty(a)} \lesssim \left(\int_a f\right)^{\alpha/2} \cdot \left(\int_a |f'|^r\right)^{(1-\alpha/2)/r}.$$

Доказательство этой леммы проводится с помощью формулы Ньютона–Лейбница и неравенства Гельдера.

Благодаря лемме 3, мы можем, наконец, завершить описание доказательства леммы 2. Действительно, из конструкции системы интервалов τ следует, что величина $\int_{\mathbb{R}} F$ мажорируется, с точностью до мультипликативной константы, выражением

$$\sum_{b\in A^M} l(b)^2,$$

где $l(b)$ обозначает длину интервала b. Слагаемое в последней сумме оценивается теперь благодаря лемме 3, а проверка третьего свойства из локальной леммы 2 завершается еще одним применением неравенства Гельдера.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00053, https://rscf.ru/project/18-11-00053/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Belov Y., Havin V. The Beurling–Malliavin Multiplier Theorem and its analogs for the de Branges spaces*. Springer series: Operator theory, ed. Alpay. 2015. V. 1. P. 581–609.
2. *Beurling A., Malliavin P. On Fourier transforms of measures with compact support*, Acta Math. 1962. V. 107. P. 291–309.
3. *Bourgain J., Dyatlov S. Spectral gaps without the pressure condition*, Annals of Math. 2018. V. 187. P. 825–867.
4. *De Branges L. Hilbert spaces of entire functions*, Prentice-Hall, 1968.
5. *Havin V., Mashreghi J. Admissible majorants for model subspaces of H^2, Part I: Slow winding of the generating inner function*, Canad. J. Math. 2003. V. 55. Issue 6. P. 1231–1263.
6. *Havin V., Mashreghi J. Admissible majorants for model subspaces of H^2, Part II : Fast winding of the generating inner function*, Canad. J. Math. 2003. V. 55. Issue 6. P. 1264–1301.
7. *Kislyakov S., Perstneva P. Indicator functions with uniformly bounded Fourier sums and large gaps in the spec-*

trum, Journal of Fourier Analysis and Applications. 2022.

8. *Makarov N., Poltoratski A. Beurling-Malliavin theory for Toeplitz kernels*, Invent. Math. 2010. V. 180. № 3. P. 443–480.
9. *Mashregi D., Nazarov F., Khavin V. The Beurling–Malliavin multiplier theorem: The seventh proof*, Algebra i Analiz. 2005. V. 17. № 5. P. 3–68.
10. *Nazarov F., Olevskii A. A Function with Support of Finite Measure and "Small" Spectrum*, 50 Years with Hardy Spaces. In: Baranov A., Kisliakov S., Nikolski N. (eds) 50 Years with Hardy Spaces. Operator Theory: Advances and Applications, V. 261. Birkhäuser.
11. *Poltoratski A. Spectral gaps for sets and measures*, Acta Math. 2012. V. 208. № 1. P. 151–209.
12. *Redheffer H. Completeness of sets of complex exponentials*, Adv. Math. 1977. V. 24. Issue 1. P. 1–62.
13. *Vasilyev I. On the multidimensional Nazarov lemma*, Proc. Amer. Math Soc. 2022. V. 150. № 4. P. 1601–1611.
14. *Vasilyev I. On the first Beurling–Malliavin Theorem*, https://arxiv.org/pdf/2203.16674.pdf. 2022.

A GENERALIZATION OF THE FIRST BEURLING AND MALLIAVIN THEOREM

I. M. Vasilyev[a]

[a]*St. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

In this paper, we announce a result that generalizes the first Beurling–Malliavin theorem. In other words, we give a new sufficient condition on a function, which guarantees that it belongs to the Beurling–Malliavin class of majorants. It is also shown that the main result of this article is sharp in many senses.

Keywords: Fourier transform, specrum, Hilbert transform, logarithmic integral, Beurling and Malliavin's theorem