ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 509, с. 13–16

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ КЕЛЬВИНА–ФОЙГТА С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

В. Г. Звягин[1],*, М. В. Турбин[1],**

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным
Поступило 14.11.2022 г.
После доработки 25.11.2022 г.
Принято к публикации 11.12.2022 г.

В работе исследуется разрешимость начально-краевой задачи для модели движения жидкости Кельвина–Фойгта с переменной плотностью. Сначала при помощи преобразования Лапласа из реологического соотношения для модели движения жидкости Кельвина–Фойгта и уравнения движения жидкости в форме Коши выводится система уравнений, описывающая движение модели Кельвина–Фойгта с переменной плотностью. Для полученной системы уравнений ставится начально-краевая задача, дается определение ее слабого решения и доказывается его существование. Доказательство проводится на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики. А именно, рассматривается задача, аппроксимирующая исходную, и на основе одного варианта теоремы Лере-Шаудера доказывается ее разрешимость. После чего на основе априорных оценок доказывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению исходной задачи.

Ключевые слова: гидродинамика, жидкость с переменной плотностью, модель Кельвина–Фойгта, слабое решение, теорема существования

DOI: 10.31857/S2686954322600665, **EDN:** CRWFMS

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание движения жидкости всегда являлось источником большого числа математических задач. На протяжении долгого времени исследовались задачи для жидкости с постоянной плотностью. При этом в приложениях возникают задачи для несжимаемых жидкостей с переменной плотностью, которые в литературе называют также моделями несжимаемой неоднородной жидкости. Первые результаты в этом направлении принадлежат А.В. Кажихову [1], который доказал существование слабых решений несжимаемой неоднородной системы Навье–Стокса. Для этой же системы О.А. Ладыженской и В.А. Солонниковым в работе [2] доказано существование глобальных сильных решений в двумерном случае и локальных сильных решений (или глобальных, но для малых данных задачи) в трехмерном случае. Обзор результатов для несжимаемой неоднородной системы Навье–Стокса приведен в монографии [3].

Еще с середины 19-го века известно достаточно большое число сред, которые не удовлетворяют ньютоновскому реологическому соотношению. Именно такие среды — водные полимерные растворы и описываются моделью Кельвина–Фойгта и различными ее обобщениями [4]. Исследование разрешимости различных задач для этих моделей в однородном случае было начато в работах А.П. Осколкова [5, 6]. Различные задачи для моделей Кельвина–Фойгта (отметим, что в англоязычной литературе они называются также моделями Навье–Стокса–Фойгта) и их обобщений активно изучаются вплоть до наших дней [4, 7–10]. Также в последнее время активно исследуется модель неоднородной несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта как с точки зрения разрешимости [11, 12], так и с точки зрения задач оптимального управления с обратной связью [13, 14].

В данной работе исследуется разрешимость в слабом смысле начально-краевой задачи для несжимаемой модели Кельвина–Фойгта с переменной плотностью.

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
**E-mail: zvg_vsu@mail.ru*
***E-mail: mrmike@mail.ru*

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Движение несжимаемой жидкости с переменной плотностью в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$ с гладкой границей $\partial\Omega$ на промежутке времени $[0,T]$, $0 < T < \infty$ описывается следующей системой уравнений:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div}\sigma + \nabla p = \rho f, \\ (x,t) \in Q_T = \Omega\times[0,T], \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i} = 0; \quad \operatorname{div} v = 0, \\ (x,t) \in Q_T = \Omega\times[0,T]. \tag{2}$$

Здесь v — вектор скорости движения жидкости, ρ — плотность жидкости, p — давление, σ — девиатор тензора напряжений, а f — плотность внешних сил.

Система (1), (2) описывает движение всех видов жидкости, но количество неизвестных в ней больше числа уравнений. Чтобы замкнуть эту систему, в нее добавляют реологическое соотношение, которое и определяет тип рассматриваемой жидкости. В работе рассматривается модель движения жидкости Кельвина–Фойгта порядка $L, L \in \mathbb{N}$, реологическое соотношение которой имеет вид:

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{L}\lambda_i\frac{\partial^i}{\partial t^i}\right)\sigma = 2\left(\nu + \sum_{i=1}^{L+1}\varkappa_i\frac{\partial^i}{\partial t^i}\right)\mathscr{E}, \\ \lambda_L > 0, \quad \varkappa_{L+1} > 0. \tag{3}$$

Здесь $\mathscr{E}$ — тензор скоростей деформаций, $\mathscr{E} = \mathscr{E}(v) = 1/2\left(\nabla v + (\nabla v)^T\right)$. Исходя из физического смысла задачи предполагается, что корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_L$ многочлена $Q(p) = 1 + \sum_{i=1}^{L}\lambda_i p^i$, $p \in \mathbb{R}$ вещественны, отрицательны и различны. Тогда на основе преобразования Лапласа аналогично работам [4, 6] σ выражается из (3) следующим образом:

$$\sigma(x,t) = 2\mu_2\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}(x,t) + 2\mu_1\mathscr{E}(x,t) + \\ + 2\int_0^t\sum_{k=1}^{L}\beta_k e^{\alpha_k(t-s)}\mathscr{E}(x,s)ds + \sigma_0(x,t), \tag{4}$$

где $\mu_2 = \varkappa_{L+1}/\lambda_L > 0$, $\mu_1 = \varkappa_L/\lambda_L - \varkappa_{L+1}\lambda_{L-1}/\lambda_L^2$, $\beta_k = C(\alpha_k)/Q'(\alpha_k)$, $k = \overline{1,L}$, многочлен $C(p)$ определяется по формуле $C(p) = \sum_{i=1}^{L-1}(\varkappa_i - \mu_2\lambda_{i-1} - \mu_1\lambda_i)p^i - \mu_1 + \nu$.

Функция σ_0 представляет собой выражение от начальных условий

$$\frac{\partial^i\sigma}{\partial t^i}(0), \quad i = \overline{0, L-1}, \quad \frac{\partial^j\mathscr{E}}{\partial t^j}(0), \quad j = \overline{0,L}. \tag{5}$$

Исходя из физического смысла задачи, эти начальные условия не могут быть произвольными и должны быть согласованы (заданным скоростям движения жидкости соответствуют определенные напряжения и наоборот). Подробнее см., например, [4].

Для простоты будем предполагать, что начальные условия (5) выбраны таким образом, чтобы $\sigma_0 \equiv 0$. Тогда, учитывая это и подставляя (4) в систему уравнений (1)–(2), получим систему

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_1\Delta v - \mu_2\frac{\partial\Delta v}{\partial t} - \\ - \int_0^t\sum_{k=1}^{L}\beta_k e^{\alpha_k(t-s)}\Delta v(s)ds + \nabla p = \rho f; \tag{6}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i} = 0; \quad \operatorname{div} v = 0. \tag{7}$$

Рассматриваемая система дополняется начальными и граничным условиями:

$$v|_{t=0}(x) = a(x), \quad \rho|_{t=0}(x) = \rho_0(x), \\ 0 < m \leqslant \rho_0(x) \leqslant M, \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{8}$$

где m, M — некоторые константы.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Введем обозначения, необходимые для того, чтобы сформулировать определения слабого решения начально-краевой задачи (6)–(8).

Через $C_0^\infty(\Omega)^n$ обозначим пространство функций, определенных на Ω, принимающих значения в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω. Пусть $\mathscr{V} = \{v : v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$. Определим пространства V^0 и V^1 как пополнение $\mathscr{V}$ по нормам $L_2(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$ соответственно. Положим $V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1$.

Обозначим через $\pi : L_2(\Omega)^n \to V^0$ проектор Лере и рассмотрим в $\mathscr{V}$ оператор $A = -\pi\Delta$. Оператор A продолжается в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным. Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ – собственные значения оператора A. Обозначим через E_∞ множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство V^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме $\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2\right)^{1/2}$.

Также введем пространство, в котором будет исследована разрешимость изучаемой задачи. Для скорости v это пространство $W_1 = \{u : u \in C([0,T],V^1),\ u' \in L_2(0,T;V^1)\}$. Для плотности ρ введем пространство $E_1 = \{\varrho : \varrho \in L_\infty(Q_T),\ \varrho' \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}$.

Будем предполагать, что $a \in V^1$, $\rho_0 \in L_\infty(\Omega)$, а $f \in L_2(0,T,V^0)$.

Определение 1. *Пару функций* $(\rho, v) \in E_1 \times W_1$ *будем называть слабым решением начально-краевой задачи* (6)–(8), *если для любого* $\varphi \in V^1$ *и при почти всех* $t \in [0,T]$ *она удовлетворяет равенству*

$$\int_\Omega \rho v' \varphi dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \varphi_j dx + \\ + \mu_1 \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx + \mu_2 \int_\Omega \nabla v' : \nabla \varphi dx + \\ + \int_0^t \sum_{k=1}^{L} \beta_k e^{\alpha_k (t-s)} \int_\Omega \nabla v(s) : \nabla \varphi dx ds = \int_\Omega \rho f \varphi dx, \tag{9}$$

для любого $\psi \in H_0^1(\Omega)$ *и при почти всех* $t \in [0,T]$ *удовлетворяет равенству*

$$\langle \rho', \psi \rangle - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \rho v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0, \tag{10}$$

а также начальным условиям:

$$v(0) = a, \quad \rho(0) = \rho_0. \tag{11}$$

Замечание 1. *В силу непрерывного вложения* $E_1 \subset C_w([0,T], L_\infty(\Omega))$ (*см., например*, [15], *Глава* 3, *лемма* 1.4) *начальное условие для функции* ρ *имеет смысл.*

Основным результатом статьи является следующая теорема

Теорема 1. *Существует хотя бы одно слабое решение задачи* (6)–(8).

Для доказательства теоремы используется аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики (см. подробнее [16]). А именно, рассматривается задача, аппроксимирующая исходную, и на основе одного варианта теоремы Лере-Шаудера устанавливается ее разрешимость. После чего на основе априорных оценок решений показывается, что из последовательности решений этой задачи можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся слабо к решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00103, https://rscf.ru/project/22-11-00103/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кажихов А.В.* Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений движения неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216. № 5. С. 1008–1010.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А.* Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1975. Т. 52. С. 52–109.
3. *Lions P.-L.* Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Volume 1. Incompressible Models. Oxford: Clarendon Press, 1996. 256 p.
4. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта // СМФН. 2009. Т. 31. С. 3–144.
5. *Осколков А.П.* К теории нестационарных течений жидкостей Кельвина–Фойгта // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1982. Т. 115. С. 191–202.
6. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
7. *Kalantarov V.K., Levant B., Titi E.S.* Gevrey Regularity for the Attractor of the 3D Navier-Stokes-Voight Equations // Journal of Nonlinear Science. 2009. V. 19. P. 133–152.
8. *Zvyagin A.* Solvability of the Non-Linearly Viscous Polymer Solutions Motion Model // Polymers. 2022. V. 14. № 6. Artile 1264.
9. *Amrouche C., Berselli L.C., Lewandowski R., Nguyen D.D.* Turbulent flows as generalized Kelvin–Voigt materials: Modeling and analysis // Nonlinear Analysis. 2020. V. 196. Article 111790.
10. *Ustiuzhaninova A., Turbin M.* Feedback Control Problem for Modified Kelvin-Voigt Model // Journal of Dynamical and Control Systems. 2022. V. 28. P. 465–480.
11. *Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh.* Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids // Communications in Mathematical Sciences. 2019. V. 17. № 7. P. 1915–1948.
12. *Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh.* The classical Kelvin–Voigt problem for incompressible fluids with unknown non-constant density: existence,

uniqueness and regularity // Nonlinearity. 2021. V. 34. № 5. P. 3083–3111.

13. *Zvyagin V., Turbin M.* Optimal feedback control problem for inhomogeneous Voigt fluid motion model // Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2021. V. 23. № 4. Article 4.
14. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Задача оптимального управления с обратной связью для модели Фойгта с переменной плотностью // Известия вузов. Математика. 2020. Т. 4. С. 93–98.
15. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
16. *Звягин В.Г.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики // СМФН. 2012. Т. 46. С. 92–119.

SOLVABILITY OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE KELVIN–VOIGT FLUID MOTION MODEL WITH VARIABLE DENSITY

V. G. Zvyagin[a] and M. V. Turbin[a]

[a] *Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

Summary. In the paper the solvability of the initial-boundary value problem for the Kelvin–Voigt fluid motion model with variable density is investigated. First, using the Laplace transform, from the rheological relation for the Kelvin–Voigt fluid motion model and the fluid motion equation in the Cauchy form, a system of equations that describes the motion of the Kelvin–Voigt model with variable density is obtained. For the resulting system of equations, an initial-boundary value problem is posed, a definition of its weak solution is given, and its existence is proved. The proof is carried out on the basis of an approximation-topological approach to the study of fluid dynamic problems. Namely, the problem approximating the original one is considered and its solvability is proved on the basis of one version of the Leray-Schauder theorem. Then, on the basis of a priori estimates, it is proved that from the sequence of solutions of the approximation problem it is possible to extract a subsequence that weakly converges to the solutions of the original problem.

Keywords: Fluid dynamics, fluid with variable density, Kelvin–Voigt model, weak solution, existence theorem