ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 509, с. 28–35

МАТЕМАТИКА

УДК 519.179.1,519.179.4

О КОНЦЕНТРАЦИИ ЗНАЧЕНИЙ *j*-ХРОМАТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ СЛУЧАЙНЫХ ГИПЕРГРАФОВ

© 2023 г. И. О. Денисов[1], Д. А. Шабанов[2,3,*]

Представлено академиком А.Н. Ширяевым
Поступило 15.12.2022 г.
После доработки 20.12.2022 г.
Принято к публикации 28.12.2022 г.

Работа посвящена изучению предельного поведения j-хроматических чисел случайного k-однородного гиперграфа в биномиальной модели $H(n,k,p)$. Рассматривается разреженный случай, когда среднее число ребер является линейной функцией от числа вершин n, т.е. равно cn, где $c > 0$ не зависит от n. Доказано, что при всех достаточно больших значениях c величина j-хроматического числа $H(n,k,p)$ с вероятностью, стремящейся к 1, концентрируется в одном или двух соседних значениях.

Ключевые слова: случайный гиперграф, раскраски гиперграфов, j-хроматическое число, пороговые вероятности, метод второго момента

DOI: 10.31857/S2686954322600756, **EDN:** CSTOOB

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается известная задача теории случайных графов и гиперграфов, связанная с изучением предельных распределений хроматических чисел. Сначала мы напомним основные определения.

1.1. Определения

Гиперграфом $H = (V, E)$ в дискретной математике называется пара множеств, где V — некоторое конечное множество *вершин*, а E — это некоторая совокупность выделенных подмножеств V, называемых *ребрами* гиперграфа. Гиперграф является k-однородным, если все его ребра имеют мощность k, как подмножества V.

В работе изучаются вершинные раскраски гиперграфов. Формально раскраской множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$ в r цветов называется отображение $f : V \to \{1,\ldots,r\}$. Для раскраски f вводятся множества $V_i = f^{-1}(i)$, $i = 1,\ldots,r$, образующие разбиение V. Они называются *цветовыми классами* раскраски f. В теории графов широко известно понятие *правильной* раскраски графа, в которой любые две смежные вершины имеют разные цвета. Оно неоднозначно переносится на случай гиперграфов, здесь можно ввести целую серию j-правильных раскрасок, параметризуемую натуральной величиной j. А именно, для $j > 0$ раскраска множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$ в r цветов называется *j-правильной*, если в ней каждое ребро гиперграфа содержит не более j вершин каждого из r цветов. Например, при $j = 1$ это означает, что все вершины ребра должны быть покрашены в разные цвета. Если гиперграф k-однороден, то имеет смысл рассматривать только $1 \le j \le k-1$, иначе любая раскраска будет j-правильной.

Минимальное число цветов r, необходимое для j-правильного раскрашивания вершин гиперграфа H, называется *j-хроматическим числом* H и обозначается через $\chi_j(H)$. Отметим, что для графов (2-однородных гиперграфов) параметр j может быть равен только 1. В теории гиперграфов классическому понятию хроматического числа гиперграфа, $\chi(H)$, введенному Эрдешем и Хайналом, соответствует ситуация $j = k-1$.

В работе исследуется j-хроматическое число случайного k-однородного гиперграфа в биномиальной модели $H(n,k,p)$, где $n > k \ge 2$, $p \in (0,1)$. Напомним, что модель $H(n,k,p)$ пред-

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
[3] *Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
**E-mail: shabanov.da@mipt.ru*

ставляет собой схему Бернулли на ребрах полного k-однородного гиперграфа на n вершинах: каждое k-подмножество n-элементного множества вершин включается в $H(n,k,p)$ в качестве ребра независимо с вероятностью p. При $k=2$ мы получаем хорошо известную модель случайного графа $G(n,p)$, также называемую моделью Эрдеша—Реньи. Перечисленные модели являются центральными объектами изучения вероятностной комбинаторики. В рамках статьи мы предполагаем, что $k>2$ и $1\le j\le k-1$ фиксированы, n стремится к бесконечности и $p=p(n)\in(0,1)$ является функцией от n.

1.2. История задачи

Исследования асимптотического поведения хроматического числа случайного графа $G(n,p)$ начались еще в 70-е годы прошлого века. Здесь стоит отметить работы Дж. Гримметта, К. Макдиармида [1], Б. Боллобаша [2], Т. Лучака [3, 4], Н. Алона и М. Кривелевича [5]. Из работ [4, 5] в частности, следовало, что при достаточно быстро стремящейся к нулю функции $p(n)$ (например, $p(n)\le n^{-1/2-\varepsilon}$ для некоторого фиксированного $\varepsilon>0$) $\chi(G(n,p))$ с вероятностью, стремящейся к 1 с ростом n, принадлежит множеству из двух соседних значений $\{h,h+1\}$ для некоторой неизвестной функции $h=h(n,p)$. В дальнейшем поиску данной функции были посвящены работы Д. Аклиоптаса, А. Наора [6], А. Койя-Оглана, К. Панайоту, А. Штегер [7], С. Каргальцева, Д. Шабанова и Т. Шайхеевой [8]. В работе [6] искомая функция h была найдена в так называемом разреженном случае, когда среднее число ребер линейно по числу вершин, т.е. когда $p(n)=cn/\binom{n}{2}$ для $c>0$, не зависящего от n. А именно, если $c>1$ задано и $r_c=\min\{r\in\mathbb{N}: c<r\ln r\}$, то при $p=cn/\binom{n}{2}$

$$\mathsf{P}\left(\chi(G(n,p))\in\{r_c,r_c+1\}\right)\to 1 \quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

Тем не менее оказалось, что в разреженном случае для большинства значений параметра c имеет место даже одноточечная предельная концентрация значения хроматического числа случайного графа. Связан подобный эффект с наличием точной пороговой вероятности для свойства наличия правильной раскраски в r цветов при $r\ge 3$, ее наилучшие текущие оценки были получены в работах [9, 10].

Хроматические числа случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ стали активно изучаться с 1980-х. В работах Дж. Шмидт, Э. Шамира и Э. Упфола [11—13] было найдено асимптотическое поведение $\chi_j(H(n,k,p))$ при определенных условиях на величину $p=p(n)$. В дальнейшем наиболее общий результат был получен в работе М. Кривелевича и Б. Судакова [14]. Для его формулировки введем величину $d=p\binom{n-1}{k-1}$, равную математическому ожиданию степени вершины в $H(n,k,p)$, и положим $d_j=j\binom{k-1}{j}d$. Если $pn^{k-1}\to\infty$ и $pn^{k-1-j}\to 0$, то для j-хроматического числа случайного гиперграфа выполнена следующая сходимость по вероятности:

$$\chi_j(H(n,k,p))\cdot\left(\frac{d_j}{(j+1)\ln d_j}\right)^{-1/j} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Авторами [14] также было доказано, что в разреженном случае, когда снова среднее число ребер линейно по числу вершин, имеет место концентрация j-хроматического числа в ограниченном числе значений. А именно, если параметр d_j фиксирован, но достаточно велик, то с вероятностью, стремящейся к 1 при $n\to\infty$, выполнены следующие неравенства

$$\begin{aligned}\left(\frac{d_j}{(j+1)\ln d_j}\right)^{1/j} &\le \chi_j(H(n,k,p))\le\\ &\le\left(\frac{d_j}{(j+1)\ln d_j}\left(1+\frac{1}{\ln^{0.1}d_j}\right)\right)^{1/j}.\end{aligned}\qquad(1)$$

Дальнейшие продвижения в вопросе концентрации j-хроматического числа были сделаны в классическом случае $j=k-1$, т.е. для обычного хроматического числа. Нам снова будет удобно ввести параметр c, отвечающий пропорции среднего числа ребер по отношению к числу вершин, т.е. пусть $p=cn/\binom{n}{k}$. В разреженном случае, когда c не зависит от n, хроматическое число согласно (1) ограничено, но можно гораздо более точно указать его значения. Обозначим $r_c=\min\{r\in\mathbb{N}: c<r^{k-1}\ln r\}$. Тогда, конечно, $c\in[(r_c-1)^{k-1}\ln(r_c-1), r_c^{k-1}\ln r_c)$, но в зависимости от положения параметра c на отрезке хроматическое число будет равно r_c или r_c+1. А именно, в работах М. Дайера, А. Фриза и К. Гринхилл [15], П. Эйра, А. Койя-Оглана, К. Гринхилл [16] и Д. Шабанова [17] было доказано, что

- если $c>r_c^{k-1}\ln r_c-\frac{1}{2}\ln r_c$, то

$$\mathsf{P}\left(\chi_{k-1}(H(n,k,p))=r_c+1\right)\to 1 \quad \text{при} \quad n\to\infty;$$

• если $c < r_c^{k-1}\ln r_c - \frac{1}{2}\ln r_c - \psi(k,r)$, где $\psi(k,r)$ – некоторая ограниченная функция, которую можно выбрать равной $\psi(k,r) = \frac{r-1}{r} + o_{k,r}(1)$ и которую можно уменьшить до $\psi(k,r) = \ln 2 + o_{k,r}(1)$ при $r > r_0(k)$, то

$$\mathsf{P}\left(\chi_{k-1}(H(n,k,p)) = r_c\right) \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Внутри же небольшого отрезка $\left[r_c^{k-1}\ln r_c - \frac{1}{2}\ln r_c - \psi(k,r),\ r_c^{k-1}\ln r_c - \frac{1}{2}\ln r_c\right]$ известно лишь, что хроматическое число с вероятностью, стремящейся к 1, равно r_c или $r_c + 1$. Концентрация $\chi_{k-1}(H(n,k,p))$ в неразреженном случае изучалась в работе [18], где было доказано, что при не слишком медленно убывающей функции $p(n)$ хроматическое число случайного гиперграфа сконцентрировано в некоторых двух соседних значениях, а также были найдены эти два значения в определенных случаях.

В общем случае, когда $j < k-1$, концентрация j-хроматического числа изучалась, помимо уже упомянутого результата (1), только в разреженном случае. В работе [19] исследовалась пороговая вероятность j-правильной r-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ в ситуации, когда значение параметра однородности k сильно превышает значение числа цветов r. Авторы [19] показали, что в разреженном случае, когда $p = cn/\binom{n}{k}$ и где $c > 0$ не зависит от n, для любого $r > 2$ существуют такие положительные числа $C_l = C_l(r)$, $C_u = C_u(r)$ и $k_0 = k_0(r)$, что при $k > k_0$ и $1 < k - j < k^{1/4}$ выполнено следующее: если

$$c > \frac{r^{k-1}\ln r}{\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^s} - \frac{\ln r}{2} + C_u \cdot \binom{k}{j+1} \cdot r^{-j}, \tag{2}$$

то $\mathsf{P}\left(\chi_j\left(H\left(n,k,p\right)\right) > r\right) \to 1$ при $n \to +\infty$, а если

$$c < \frac{r^{k-1}\ln r}{\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^s} - \frac{\ln r}{2} - C_l \cdot k^{(j-k+1)/2}, \tag{3}$$

то $\mathsf{P}\left(\chi_j\left(H\left(n,k,p\right)\right) \leqslant r\right) \to 1$ при $n \to \infty$.

Отметим несколько моментов относительно этой теоремы. Во-первых, параметр j должен быть примерно равен k, $j \sim k$, но, все-таки, j должно быть меньше $k-1$. Во-вторых, зазор между оценками (2) и (3) стремится к нулю с ростом k. В-третьих, параметр r, отвечающий за ограничение на j-хроматическое число, должен быть заметно меньше k. Тем самым, данная теорема не позволяет сделать выводы о концентрации хроматического числа, но дает очень точные оценки пороговой вероятности для j-правильной r-раскрашиваемости при больших k.

Целью настоящей работы было получение схожих результатов, но для обратного случая, когда параметр однородности k фиксирован, а параметр r может быть сколь угодно большим. Единственный подобный результат был ранее получен также А. Семеновым и Д. Шабановым в [20] для случая $j = k-2$. Авторами [20] было показано, что если $p = cn/\binom{n}{k}$, $c > 0$ не зависит от n, $k \geq 9$ и $r > r_0(k)$, то при

$$\begin{aligned} c &> -\frac{\ln r}{\ln(1 - r^{1-k}(kr - k + 1))} = \\ &= \frac{r^{k-1}\ln r}{kr - k + 1} - \frac{\ln r}{2} + O(kr^{2-k}), \end{aligned} \tag{4}$$

выполнено $\mathsf{P}(\chi_{k-2}(H(n,k,p)) > r) \to 1$ при $n \to \infty$, а при

$$\begin{aligned} c &< \frac{r^{k-1}\ln r}{kr-k+1} - \frac{\ln r}{2} - \frac{r-1}{k(r-1)+1} r^{\frac{k-1}{k(r-1)+1}} + \\ &+ O(k^2 r^{-k/3}\ln r), \end{aligned} \tag{5}$$

выполнено $\mathsf{P}(\chi_{k-2}(H(n,k,p)) \leq r) \to 1$ при $n \to \infty$. Тем самым, при фиксированном k и растущем r, получается зазор порядка $1/k + o_r(1)$. Целью нашей работы было получить аналоги результатов (4)–(5) для общей ситуации, когда $k/2 \leq j < k-2$.

2. НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основные результаты настоящей работы дополняют результаты (2)–(5) и дают новые оценки пороговой вероятности свойства j-правильной r-раскрашиваемости у случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ в ранее не рассмотренных областях изменений параметров. Первая теорема дополняет (2) и (4).

Теорема 1. *Пусть $H(n,k,p)$ – случайный k-однородный гиперграф на n вершинах, где $p = cn/\binom{n}{k}$, $c > 0$ не зависит от n. Для любого $k \geq 7$ существуют такие положительные числа $C_u = C_u(k)$ и $r_0 = r_0(k)$, что для любых $r > r_0$, $k/2 \leq j < k$ и*

$$c > \frac{r^{k-1}\ln r}{\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^s} - \frac{\ln r}{2} + C_u \cdot r^{-j}\ln r \tag{6}$$

выполнено $\mathsf{P}(\chi_j(H(n,k,p)) > r) \to 1$ *при* $n \to \infty$.

Вторая теорема дополняет результаты (3) и (5)

Теорема 2. *Пусть* $H(n,k,p)$ *— случайный* k*-однородный гиперграф на* n *вершинах, где* $p = cn/\binom{n}{k}$, $c > 0$. *Для любого* $k \geq 7$ *существуют такие положительные числа* $C_l = C_l(k)$ *и* $r_0 = r_0(k)$, *что при* $r > r_0$ *и* $k/2 \leq j \leq k-3$ *выполнено следующее: если*

$$c < \frac{r^{k-1}\ln r}{\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^s} - \frac{\ln r}{2} - \frac{1}{\binom{k}{j+1}} - C_l \cdot \frac{\ln^3 r}{r}, \quad (7)$$

то

$$\mathsf{P}(\chi_j(H(n,k,p)) \leq r) \to 1$$

при $n \to \infty$.

Прокомментируем полученные результаты:

1. По сравнению с результатами из [20] удалось значительно расширить область изменения параметра j. В теоремах 1 и 2 требуется лишь, чтобы $j \geq k/2$, в то время как в работе [20] рассматривалось значение j асимптотически то же самое, что и у k.

2. Условие $j \geq k/2$, в некотором смысле, является граничным. В этом случае j-хроматические числа k-однородных гиперграфов также называют *слабыми*. Суть в том, что если ребро оказалось плохо раскрашено, то это обеспечивается лишь одним большим набором вершин одного цвета. В то время, как при $j < k/2$ таких наборов может быть несколько, и, значит, необходимое для j-правильной раскраски число цветов уже не может быть произвольным. Для таких раскрасок требуется несколько другой анализ. Подобные результаты могут быть найдены, например, в [21].

3. Условие $k \geq 7$ является техническим, для меньших значений можно получить похожие результаты, но это потребует некоторого дополнительного анализа при применении метода второго момента. С учетом работ [15] и [20] получается, что среди пар значений (k,j), $j \geq k/2$ формально результаты отсутствуют только для наборов (8,6), (7,5), (6,4), (6,3), (5,3), (4,2).

4. Выведем следствие о концентрации значений j-хроматического числа. Обозначим

$$u_k(r) = \frac{r^{k-1}\ln r}{\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^s} - \frac{\ln r}{2}.$$

Заметим, что при всех достаточно больших r функция $u_k(r)$ является возрастающей, причем разность $u_k(r+1) - u_k(r)$ растет по порядку как $r^{j-1}\ln r$.

Следствие 1. *Пусть* $k \geq 7$, $k/2 \leq j \leq k-3$, *а* $r \geq r_0(k)$ *достаточно велико. Пусть* $p = cn/\binom{n}{k}$.

1) *Если*

$$c \in \left(u_k(r-1) + C_u \cdot (r-1)^{-j}\ln(r-1),\; u_k(r) - \frac{1}{\binom{k}{j+1}} - C_l(\ln r)^{3/r}\right),$$

то $\mathsf{P}(\chi_j(H(n,k,p)) = r) \to 1$ *при* $n \to \infty$.

2) *Если*

$$c \in \left[u_k(r) - \frac{1}{\binom{k}{j+1}} - C_l(\ln r)^{3/r}, u_k(r) + C_u \cdot r^{-j}\ln r\right],$$

то $\mathsf{P}(\chi_j(H(n,k,p)) \in \{r, r+1\}) \to 1$ *при* $n \to \infty$.

3) *Если*

$$c \in \left(u_k(r) + C_u \cdot r^{-j}\ln r,\; u_k(r+1) - \frac{1}{\binom{k}{j+1}} - C_l(\ln(r+2))^{3/(r+1)}\right),$$

то $\mathsf{P}(\chi_j(H(n,k,p)) = r+1) \to 1$ *при* $n \to \infty$.

Следствие 1 показывает, что при почти всех значениях параметра c в разреженном случае j-хроматическое число имеет одноточечное предельное распределение, а для всех достаточно больших значений оно сконцентрировано в двух соседних значениях.

Важным вспомогательным результатом, лежащим в основании доказательства теоремы 2, является решение следующей оптимизационной задачи для дважды стохастических матриц. Обозначим через $\mathbf{M}_r$ множество матриц размера $r \times r$ с неотрицательными элементами и следующим свойством: для любой $M = (m_{ij}, i, j = 1,\ldots,r) \in \mathbf{M}_r$ для любых $i, u = 1,\ldots,r$ выполнено

$$\sum_{u'=1}^{r} m_{iu'} = \frac{1}{r}, \quad \sum_{i'=1}^{r} m_{i'u} = \frac{1}{r},$$

т.е. сумма элементов матрицы по любому столбцу и любой строке равны $1/r$. Далее, для $M \in \mathbf{M}_r$ введем две функции:

$$\mathcal{H}(M) = -\sum_{i,u=1}^{r} m_{iu}\ln(m_{iu}), \qquad (8)$$
$$\mathcal{E}(M) = \ln(1 - Q(M)),$$

где

$$Q(M) = 2q -$$
$$-\sum_{i,u=1}^{r}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=0}^{k-s}\sum_{t=0}^{s-j-1+h}\binom{k-s}{h}\binom{s}{t}\left(\frac{1}{r} - m_{iu}\right)^{h+t} \times$$
$$\times m_{iu}^{s-t}\left(\frac{r-2}{r} + m_{iu}\right)^{k-h-s},$$
$$q = r^{1-k}\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^s.$$

Отметим, что функция $Q(M)$ и, следовательно, функция $\mathcal{E}(M)$ являются параметрическими и зависят от выбранных ранее параметров j и k.

Наконец, для $c > 0$ введем $G_c(M) = \mathcal{H}(M) + c \cdot \mathcal{E}(M)$. Обозначим через J_r матрицу, все элементы которой равны $1/r^2$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если выполнено условие* (7), *то существует такая функция* $b = b(r,k,j) > 0$, *что для любой матрицы* $M \in M_r$ *выполнено неравенство*

$$G_c(J_r) - G_c(M) \geq b\sum_{i,u=1}^{r}\left(m_{iu} - \frac{1}{r^2}\right)^2. \qquad (9)$$

Результаты в духе теоремы 3 весьма полезны и могут быть применены для исследования j-хроматических чисел случайных гиперграфов даже в неразреженном случае, см., например, [7, 18].

3. ИДЕИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

3.1. Идеи доказательств теорем 1 *и* 2

Доказательство теоремы 1 следует методу первого момента. Мы переходим к равномерной модели случайного гиперграфа $H'(n,k,m)$, где $m = \left\lfloor p\binom{n}{k}\right\rfloor$ и $c > 0$ удовлетворяет неравенству (6). В модели $H'(n,k,m)$ независимо, равновероятно и с возвращением выбираются m ребер из всевозможных k-подмножеств множества вершин. С помощью метода каплинга можно показать, что при $p' = c'n/\binom{n}{k}$, где $c' > c$, будет выполнено неравенство

$$\mathsf{P}(\chi_j(H'(n,k,m)) > r) \leq \mathsf{P}(\chi_j(H(n,k,p')) > r) + o(1).$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что левая часть неравенства стремится к 1. Далее, рассматривается случайная величина X_n, равная числу j-правильных раскрасок $H'(n,k,m)$ в r цветов. С помощью нижеприведенной комбинаторной леммы можно оценить математическое ожидание X_n.

Лемма 1. *Пусть* $k \geq 7$, $k/2 \leq j < k$. *Существует такое* $r_0 = r_0(k)$, *что при* $r \geq r_0$ *и всех достаточно больших* n *выполнено: для любых* $v_1,\ldots,v_r$ *с условием* $\sum_{i=1}^{r} v_i = n$ *верно неравенство*

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{v_i}{k-s}\binom{n-v_i}{s} \geq$$
$$\geq r\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{n/r}{k-s}\binom{n-n/r}{s} + o(n^k).$$

Применяя лемму 1, можно показать, что при условии (6) выполнено $\mathsf{E}\, X_n \to 0$ при $n \to +\infty$, что завершает доказательство теоремы 1.

Утверждение теоремы 2 обосновывается с помощью метода второго момента. Возможность применения данного метода следует из наличия точной пороговой вероятности для свойства j-правильной раскрашиваемости в заданное число цветов у случайного гиперграфа $H(n,k,p)$. По определению функция $\hat{p}_{r,k,j} = \hat{p}_{r,k,j}(n)$ является *точной пороговой вероятностью* для свойства j-правильной раскрашиваемости в r цветов, если для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выполнено, что

$$\lim_{n\to+\infty}\mathsf{P}(\chi_j(H(n,k,p)) \leq r) = \begin{cases} 1, & \text{если } p < (1-\varepsilon)\hat{p}; \\ 0, & \text{если } p > (1+\varepsilon)\hat{p}. \end{cases}$$

Существование точной пороговой вероятности в нашей задаче вытекает из работы Х. Хатами и М. Моллоя из [22], в которой утверждается, что любое свойство, выражаемое как наличие гомоморфизма из изучаемого гиперграфа в некоторый фиксированный (может быть, содержащий неправильные ребра) связный гиперграф, имеет точную пороговую вероятность. Существование точной пороговой вероятности заметно облегчает нашу задачу. Теперь нам не нужно доказывать напрямую, что вероятность наличия искомой раскраски стремится к единице, достаточно лишь показать, что в условиях теоремы 2 она отделена от нуля.

Как и в доказательстве теоремы 1, нам снова будет удобно перейти к равномерной модели случайного гиперграфа. Но в этот раз модель будет немного другая, а именно, мы вводим случайный гиперграф $H''(n,k,m)$, где $m = \lceil cn\rceil$, состоящий из m независимых случайных k-подмножеств множества вершин, причем и в каждом таком k-подмножестве все k вершин выбираются случайно, независимо и равновероятно. Конечно, в подобном гиперграфе мы можем получить и совпадающие ребра, и ребра размера меньше, чем k, когда нам выпали повторяющиеся вершины. Поясним, как будем раскрашивать ребра, в которых встречаются повторяющиеся вершины: по-прежнему будет говорить, что ребро раскрашено j-правильно, если оно с учетом кратности повторяющихся вершин содержит не более j вершин каждого цвета. Снова с помощью техники каплинга можно показать при $c' < c$ и $p' = c'n/\binom{n}{k}$ будет выполнено соотношение

$$\mathsf{P}(\chi_j(H(n,k,p')) \le r) \ge \mathsf{P}(\chi_j(H''(n,k,m)) \le r) + o(1).$$

Следовательно, остается проверить, что в модели $H''(n,k,m)$

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}(\chi_j(H''(n,k,m)) \le r) > 0. \tag{10}$$

Остается свести задачу к вычислению моментов некоторой случайной величины. В этом качестве качестве мы будем использовать X_n — число j-правильных сбалансированных раскрасок случайного гиперграфа $H''(n,k,m)$. Напомним, что раскраска называется *сбалансированной*, если все ее цветовые классы имеют одинаковую мощность. В лемме 1.4 работы [15] было доказано, что соотношение (10) достаточно проверить только по подпоследовательности тех n, что делятся на r, так что всюду далее мы будем считать, что n делится на r.

Применяя неравенство Пэли–Зигмунда, мы получаем следующую цепочку неравенств

$$\mathsf{P}(\chi_j(H''(n,k,m)) \le r) \ge \mathsf{P}(X_n > 0) \ge \frac{(\mathsf{E}\, X_n)^2}{\mathsf{E}\, X_n^2}.$$

В итоге остается проверить, что в условиях теоремы имеет место следующее соотношение между моментами случайной величины X_n:

$$\mathsf{E}\, X_n^2 = O_{k,j,r}\left((\mathsf{E}\, X_n)^2\right). \tag{11}$$

Комбинаторными вычислениями и применением формулы Стирлинга можно получить следующее выражение для отношения моментов случайной величины X_n:

$$\frac{\mathsf{E}\, X_n^2}{(\mathsf{E}\, X_n)^2} = \Theta_{k,j,r}\left(n^{r-1/2}\sum_{T=(\tau_{iu})\in\mathbf{T}_r}\left(\prod_{i,u=1}^{r}\sqrt{\tau_{iu}+1}\right)^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[n\left(G_c(T/n)-G_c(J_r)\right)\right]\right), \tag{12}$$

где функция G_c определялась в теореме 3, как $G_c(M) = \mathcal{H}(M) + c\cdot\mathcal{E}(M)$, а функции $\mathcal{H}$ и $\mathcal{E}$ были определены в (8). Кроме того, $\mathbf{T}_r$ в формуле (12) обозначает множество матриц размера $r\times r$, у которых все элементы являются целыми неотрицательными числами, а сумма в каждой строке и в каждом столбце равна n/r. Для завершения обоснования соотношения (11) остается применить теорему 3 и аппроксимировать получившуюся сумму гауссовским интегралом.

3.2. Идеи доказательств теоремы 3

Итак, пусть дана матрица $M\in\mathbf{M}_r$. Несложными преобразованиями можно получить следующее представление исследуемого выражения:

$$G_c(J_r) - G_c(M) = \sum_{i,u=1}^{r} m_{iu}\ln(r^2 m_{iu}) - c\ln\frac{1-Q(M)}{(1-q)^2}.$$

Для каждого $i = 1,\ldots,r$ введем следующие функции:

$$\mathcal{H}_i(M) = \sum_{u=1}^{r} m_{iu}\ln(r^2 m_{iu}),$$

$$\mathcal{E}_i(M) = \frac{1}{(1-q)^2}\left[\sum_{u=1}^{r}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=0}^{k-s}\sum_{t=0}^{s-j-1+h}\binom{k-s}{h}\binom{s}{t}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{r}-m_{iu}\right)^{h+t}(m_{iu})^{s-t}\left(\frac{r-2}{r}+m_{iu}\right)^{k-h-s} - q^2/r\right].$$

Тогда в силу (8) будут выполнены следующие соотношения:

$$\mathcal{H}(J_r) - \mathcal{H}(M) = \sum_{i=1}^{r}\mathcal{H}_i(M),$$

$$\mathcal{E}(M) - \mathcal{E}(J_r) = \ln\left(1 + \sum_{i=1}^{r}\mathcal{E}_i(M)\right) \le \sum_{i=1}^{r}\mathcal{E}_i(M).$$

В связи с этим удобно рассматривать разности $\mathcal{H}_i(M) - c\mathcal{E}_i(M)$ для всех $i = 1,\ldots,r$. Отметим очень важный факт: функции $\mathcal{H}_i(M)$ и $\mathcal{E}_i(M)$ зависят не от всей матрицы, а только лишь от ее i-й строки.

Основная идея анализа состоит в разбиении множества строк матрицы M на центральные, хорошие и плохие в зависимости от максимального значения элемента. Строку с номером i будем называть

- *центральной*, если

$$0 \le \max_{u=1,\ldots,r} m_{iu} < \frac{1}{r} - \frac{2}{r\ln r}.$$

- *хорошей*, если

$$\max_{u=1,\ldots,r} m_{iu} \in \left[\frac{1}{r} - \frac{2}{r\ln r}, \frac{1}{r} - r^{-k/2}\ln r\right].$$

• *плохой*, если

$$\max_{u=1,\ldots,r} m_{iu} > \frac{1}{r} - r^{-k/2}\ln r.$$

Следующие три леммы оценивают разности $\mathcal{H}_i(M) - c\cdot\mathcal{E}_i(M)$ для разных типов строк.

Лемма 2. *Если r достаточно велико, то для любой центральной строки с номером i выполнено*

$$\mathcal{H}_i(M) - c\cdot\mathcal{E}_i(M) \geq$$
$$\geq \frac{r^2}{4}\sum_{u:m_{iu}<r^{-2}}\left(m_{iu} - \frac{1}{r^2}\right)^2 + \frac{r}{2}\sum_{u:m_{iu}>r^{-2}}\left(m_{iu} - \frac{1}{r^2}\right)^2.$$

Лемма 3. *Если r достаточно велико, то для любой хорошей строки с номером i выполнено*

$$\mathcal{H}_i(M) - c\cdot\mathcal{E}_i(M) \geq \frac{1}{2}r^{-k/2}\ln^2 r.$$

Лемма 4. *Если r достаточно велико, то для любой плохой строки с номером i выполнено*

$$\mathcal{H}_i(M) - c\cdot\mathcal{E}_i(M) \geq -f(k)r^{-1-j}\ln r,$$

где $f(k) > 0$ — некоторая положительная функция от k.

С помощью лемм 2–4 можно вывести необходимое неравенство (9), если в матрице M есть хотя бы одна центральная строка или одна хорошая. Единственный непокрываемый ими случай — это одни плохие строки в матрице M. Данный случай рассматривается отдельно и именно в нем выводится ограничение (6).

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа второго автора выполнена в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grimmett G.R., McDiarmid C.J.* On colouring random graphs // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1975. V. 77. P. 313–324. https://doi.org/10.1017/S0305004100051124
2. *Bollobás B.* The chromatic number of random graphs // Combinatorica. 1988. V. 8. P. 49–56. https://doi.org/10.1007/BF02122551
3. *Łuczak T.* The chromatic number of random graphs // Combinatorica. 1991. V. 11. № 1. P. 45–54. https://doi.org/10.1007/BF01375472
4. *Łuczak T.* A note on the sharp concentration of the chromatic number of random graphs // Combinatorica. 1991. V. 11. № 3. P. 295–297. https://doi.org/10.1007/BF01205080
5. *Alon N., Krivelevich M.* The concentration of the chromatic number of random graphs // Combinatorica. 1997. V. 17. № 3. P. 303–313. https://doi.org/10.1007/BF01215914
6. *Achlioptas D., Naor A.* The two possible values of the chromatic number of a random graph // Annals of Mathematics. 2005. V. 162. № 3. P. 1335–1351. https://doi.org/10.4007/annals.2005.162.1335
7. *Coja-Oghlan A., Panagiotou K., Steger A.* On the chromatic number of random graphs // Journal of Combinatorial Theory Series B. 2008. V. 98. P. 980–993. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2007.11.009
8. *Kargaltsev S.A., Shabanov D.A., Shaikheeva T.M.* Two values of the chromatic number of a sparse random graph // Acta Mathematica Universitatis Comenianae. 2019. V. 88. № 3. P. 849–854.
9. *Coja-Oghlan A., Vilenchik D.* The Chromatic Number of Random Graphs for Most Average Degrees // International Mathematics Research Notices. 2015. V. 2016. No.19. P. 5801–5859. https://doi.org/10.1093/imrn/rnv333
10. *Coja-Oghlan A.* Upper-bounding the k-colorability threshold by counting cover // Electronic Journal of Combinatorics. 2013. V. 20. № 3. Research paper № 32. https://doi.org/10.37236/3337
11. *Schmidt-Pruzan J., Shamir E., Upfal E.* Random hypergraph coloring algorithms and the weak chromatic number // J. Graph Theory. 1985. V. 8. P. 347–362. https://doi.org/10.1002/jgt.3190090307
12. *Schmidt J.* Probabilistic analysis of strong hypergraph coloring algorithms and the strong chromatic number // Discrete Mathematics. 1987. V. 66. P. 258–277. https://doi.org/10.1016/0012-365X(87)90101-4
13. *Shamir E.* Chromatic number of random hypergraphs and associated graphs // Adv. Comput. Res. 1989. V. 5. P. 127–142.
14. *Krivelevich M., Sudakov B.* The chromatic numbers of random hypergraphs // Random Structures and Algorithms. 1998. V. 12. № 4. P. 381–403. https://doi.org/10.1002/(sici)1098-2418(199807)12:4<381::aid-rsa5>3.0.co;2-p
15. *Dyer M., Frieze A., Greenhill C.* On the chromatic number of a random hypergraph // Journal of Combinatorial Theory, Series B. 2015. V. 113. P. 68–122. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2015.01.002
16. *Ayre P., Coja-Oghlan A., Greenhill C.* Hypergraph coloring up to condensation // Random Structures and Algorithms. 2019. V. 54. № 4. P. 615–652. https://doi.org/10.1002/rsa.20824
17. *Shabanov D.A.* Estimating the r-colorability threshold for a random hypergraph // Discrete Applied Mathematics. 2020. V. 282. P. 168–183. https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.10.031
18. *Демидович Ю.А., Шабанов Д.А.* О двух предельных значениях хроматического числа случайного ги-

перграфа // Теория вероятностей и ее применения. 2022. Т. 67. № 2. С. 223–246. https://doi.org/10.1137/S0040585X97T990861

19. *Семенов А.С., Шабанов Д.А.* Оценки пороговых вероятностей для свойств раскрасок случайных гиперграфов // Проблемы передачи информации. 2022. Т. 58. № 1. С. 72–101. https://doi.org/10.1134/S0032946022010057

20. *Semenov A., Shabanov D.* On the weak chromatic number of random hypergraphs // Discrete Applied Mathematics. 2020. V. 276. P. 134–154. https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.03.025

21. *Матвеева Т.Г., Хузиева А.Э., Шабанов Д.А.* О сильном хроматическом числе случайных гиперграфов // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 502. С. 37–41. https://doi.org/10.1134/s1064562422010094

22. *Hatami H., Molloy M.* Sharp thresholds for constraint satisfaction problems and homomorphisms // Random Structures and Algorithms. 2008. V. 33. № 3. P. 310–332. https://doi.org/10.1002/rsa.20225

ON THE CONCENTRATION OF VALUES OF *j*-CHROMATIC NUMBERS OF RANDOM HYPERGRAPHS

I. O. Denisov[a] **and D. A. Shabanov**[b,c]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *HSE University, Moscow, Russian Federation*

[c] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

Presented by Academician A.N. Shiryaev

The paper deals with the study of the limit distribution of the j-chromatic numbers of a random k-uniform hypergraph in the binomial model $H(n,k,p)$. We consider the sparse case when the expected number of edges is a linear function of the number of vertices n, i.e. is equal to cn for $c > 0$ not depending on n. We prove that for all large enough values of c, the j-chromatic number of $H(n,k,p)$ is concentrated in one or two consecutive numbers with probability tending to 1.

Keywords: random hypergraph, colorings of hypergraphs, j-chromatic number, probability thresholds, second moment method