ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 509, с. 8–12

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6+515.127

ОЦЕНКИ АЛЕКСАНДРОВСКОГО *n*-ПОПЕРЕЧНИКА КОМПАКТА БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2023 г. В. Н. Белых[1,*]

Представлено академиком РАН В.И. Бердышевым
Поступило 10.07.2022 г.
После доработки 12.11.2022 г.
Принято к публикации 21.12.2022 г.

Получены двусторонние оценки александровского n-поперечника компакта периодических бесконечно гладких функций, ограниченно вложенного в пространство непрерывных на единичной окружности функций.

Ключевые слова: компакт, n-поперечник, бесконечно дифференцируемая функция, класс Жевре

DOI: 10.31857/S2686954323700078, **EDN:** CSYAEH

При конструировании алгоритмов численного решения краевых задач речь всегда идет об аппроксимации континуальных объектов X конечномерными и о построении аналогов последних, отправляясь от понятий, допускающих дискретную формализацию [1]. При этом наилучшее финитное описание объекта X, определенным образом организованного в компакт X, приводит к понятию александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$, смысловые потенции которого, как показал К.И. Бабенко [1], далеко выходят за пределы того, что имел в виду П.С. Александров [2]. Введение числового параметра $\alpha_n(X)$ в обиход компьютерной практики сыграло ключевую роль в оценке предельных возможностей вычислительных методов и, в частности, привело к открытию принципиально новых – *ненасыщаемых* [3] – численных методов, практическая эффективность которых напрямую связана с асимптотикой убывания $\alpha_n(X)$ к нулю при $n \to \infty$. Определяя точность, с которой компакт X исчерпывается компактами топологической размерности $\le n$, александровский n-поперечник $\alpha_n(X)$, указывает погрешность финитного описания X с помощью n числовых параметров, руководствуясь информацией о "гладкостной" структуре X: чем большей гладкостью обладает компакт X, тем быстрее с ростом n убывает к нулю $\alpha_n(X)$. Оказавшись глубоким математическим фактом, понятие александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$ привело к переосмыслению статуса значимости для реальных вычислений экстраординарной (в том числе бесконечной) гладкости компакта X решений задач. При этом содержательная информация о компакте X извлекается средствами теории приближений, если найден и исследован подходящий для X аппроксимационный аппарат. В итоге качественная финитизация функционального компакта X определяется наследованием ею дифференциальных свойств X.

Существуют классы задач (например, эллиптические [4]), компакты X решений которых могут состоять из C^∞-гладких функций различной природы. Для оценки практической эффективности численных методов их решения нужна, как минимум, информация об асимптотике убывания $\alpha_n(X)$ к нулю при $n \to \infty$. Установление этой асимптотики $\alpha_n(X)$ и есть здесь основная математическая трудность, поскольку, если в нормированном пространстве метрика определяется в известном смысле единственным образом, то в ненормированном, но метризуемом пространстве C^∞, она определяется уже неоднозначно (например, счетным семейством). Для компактов X аналитических функций оценки александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$ были получены в [3, с. 291].

В работе указаны двусторонние оценки n-поперечника $\alpha_n(X)$ компакта X периодических C^∞-гладких функций, ограниченно вложенного в пространство непрерывных на единичной окружности функций. Результат основывается на предложенной ранее автором [5] характеризации C^∞-

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*

[*] *E-mail: belykh@math.nsc.ru*

гладких периодических функций, апеллирующей к ее наилучшему чебышёвскому описанию тригонометрическими многочленами.

1. Пусть $\tilde{C}[0,2\pi]$ – класс 2π-периодических непрерывных на всей оси R функций с нормой $\|\varphi\| = \max\limits_{t\in[0,2\pi]}|\varphi(t)|$. Пространство $\tilde{C}[0,2\pi]$ будем трактовать как пространство $C \equiv C[S]$ непрерывных на единичной окружности S функций, которые остаются непрерывными при 2π-периодическом продолжении на всю ось R. По аналогии, если $k \geq 0$ целое и $\varphi \in \tilde{C}^k[0,2\pi]$ – пространство 2π-периодических k раз дифференцируемых на R функций, то $C^k \equiv C^k[S]$ – банахово пространство k раз непрерывно дифференцируемых на S функций с нормой (см. [5])

$$p_k(\varphi) \equiv \|\varphi\|_k = \max_{0\le\alpha\le k}\max_{t\in[0,2\pi]}|\varphi^{(\alpha)}(t)| < \infty,\quad \varphi^{(\alpha)}(t) \equiv \frac{d^\alpha\varphi(t)}{dt^\alpha}. \tag{1}$$

Пусть $\mathcal{T}^m \subset \tilde{C}[0,2\pi]$ – класс тригонометрических полиномов порядка не выше m и

$$e_m(\varphi) = \inf_{\iota_m\in\mathcal{T}^m}\|\varphi - \iota_m\| = \|\varphi - R_m\|, \quad R_m \in \mathcal{T}^m. \tag{2}$$

При $k = 0$ норма (1) переходит в норму в $C \equiv C^0[S]$. И, согласно определению (1):

$$\|\varphi\|_{k'} \leq \|\varphi\|_k, \quad k' \leq k. \tag{3}$$

Пространство C^∞-гладких 2π-периодических на S функций определим как $C^\infty = \bigcap_{k\geq 0}C^k$, введя на нем топологию проективного предела τ. Базис окрестностей нуля в C^∞ составляют множества $U_{l,\varepsilon} = \{\varphi \in C^\infty: \|\varphi\|_l < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ и l – натуральное. Топология τ превращает C^∞ в линейное локально выпуклое пространство, метризуемое с полной трансляционно инвариантной метрикой ρ, порождающей исходную топологию τ (пространство Фреше). Пространство C^∞ обладает абсолютным топологическим базисом $\{\pi_0(t) = 1/2,\ \pi_{2l-1}(t) = \sin lt,\ \pi_{2l}(t) = \cos lt,\ \forall l \geq 1\}$ [6]. Причем понятия ограниченности, фундаментальности и сходимости в $C^\infty \equiv \bigcap_{k\geq 0}C^k$ понимаются так же, как они понимаются в каждом метрическом пространстве C^k из указанной совокупности. При этом замкнутые ограниченные части C^∞ компактны [6], т.е. множество

$$K^\infty_{c,G} \equiv \left\{f \in C^\infty: \|f\| \leq c = G(0),\ \left\|f^{(k)}(t)\right\| \leq G(k), \forall k > 0\right\} \tag{4}$$

с фиксированной константой $c > 0$ и заданной числовой последовательностью $\{G(k)\}$ – компакт в C^∞. Пространство C^∞ плотно в C^k, его замыкание при любом $k \geq 0$ совпадает с пополнением (и метрическим расширением) C^∞ по норме (1); пополнения эти упорядочены по включению и, в силу (3), одно является частью другого, если $k \geq k'$. И, поскольку компакт $K^\infty_{c,G}$ вкладывается в C непрерывно, а запас компактных множеств при ослаблении топологии не уменьшается, $K^\infty_{c,G}$ – компакт и в C.

Наличие абсолютного базиса означает, что в C^∞ допустимо рассмотрение рядов $\sum_{l=0}^\infty c_l\pi_l(t)$ со следующим соглашением о сходимости: ряд абсолютно сходится в топологии τ, задаваемой системой норм $p = \{p_k(\cdot)\}$, т.е. $\sum_{l=0}^\infty p_k(c_l\pi_l) < \infty\ \forall k \geq 0$, и своей суммой имеет элемент φ из C^∞. Причем соответствие $\varphi \to \{c_k\}$, ассоциированное с разложением функции φ по базису $\{\pi_k(t)\}$, порождает на C^∞ линейные непрерывные [7] функционалы f_k: $\langle\varphi, f_k\rangle = c_k(\varphi) \equiv c_k$ и $\langle\pi_l, f_m\rangle = \delta_{lm}$ (δ_{lm} – обычный символ Кронекера). При этом запись $\varphi(t) = \sum_{l=0}^\infty c_l\pi_l(t)$ означает, что суммы $\varphi_n(t) = \sum_{l=0}^n c_l\pi_l(t)$ сходятся к функции $\varphi(t)$ из C^∞ при $n \to \infty$.

В работе [5] указан новый подход к описанию периодических C^∞-гладких на S функций, состоящий в указании пары эффективно конструируемых по набору $\{G(k)\}$ монотонных функций $\mu(r)$ и $\vartheta(r)$ вещественного аргумента $r \geq 0$, связанных посредством классического неравенства Джексона (см., например, [3])

$$e_m(f) \leq \frac{\pi\left\|f^{(k)}\right\|}{2\ m^k}, \quad k \geq 0 \tag{5}$$

с мажорантой $G(k)$ и обладающих на полуоси $r \geq 0$ рядом полезных свойств.

Пусть $\{G(k)\}_{k=0}^\infty$ – последовательность вещественных чисел и $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{G(k)} = \infty$. Сопоставим последовательности $\{G(k)\}_{k=0}^\infty$ пару функций числового аргумента $r \in [0,\infty)$:

$$\mu(r) = \begin{cases} G(0) & \text{при} \quad 0 \leq r < 1, \\ \inf\limits_{k\geq 0}\dfrac{G(k)}{r^k} & \text{при} \quad r \geq 1, \end{cases}$$

$$\vartheta(r) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad 0 \le r < 1, \\ \max\left\{k \middle| \mu(r) = \dfrac{G(k)}{r^k}\right\} \quad \text{при} \quad r \ge 1. \end{cases}$$

При этом знак inf в определении $\mu(r)$ всегда можно заменить на min и потому

$$\mu(r) = \min_{k\ge 0} \frac{G(k)}{r^k} = \frac{G[\vartheta(r)]}{r^{\vartheta(r)}} \quad \text{и} \quad e_m(f) \le \frac{\pi}{2}\mu(m).$$

Теорема 1 (см. [5]). *При $r \ge 1$ функция $\vartheta(r)$ целочисленна, неотрицательна, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с r. Функция $\mu(r)$ строго монотонно убывает, непрерывна и стремится к нулю при $r \to \infty$. При этом*

$$\mu(r) = ce^{-\int_1^r \frac{\vartheta(t)}{t}dt}, \quad r \ge 1.$$

Следствие 1. *Функция $\mu(r)$ стремится к нулю при $r \to \infty$ быстрее любой степени числа r, т.е. для $\forall p \ge 0$ справедливо равенство $\lim\limits_{r\to\infty} r^p\mu(r) = 0$.*

Упомянутые классы C^∞-гладких функций не пусты: им принадлежат известные классы Жевре, имеющие мажоранту $G(k) = cA^k k^{\alpha k}$ ($c > 0$, $\alpha \ge 1$, $A > 0$ — константы).

Наличие базиса позволяет любую функцию $\varphi(t)$ из C^∞ отождествить с ее рядом

$$\varphi(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p\pi_p(t) \equiv \\ \equiv \frac{c_0}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty}(c_{2p}\cos pt + c_{2p-1}\sin pt). \tag{6}$$

Ряд (6) сходится в τ-топологии (т.е. равномерно !); сходится он и в смысле гильбертова пространства $L_2[S]$. Ввиду полноты и ортогональности базиса $\{\pi_p(t)\}$, ряд (6) является рядом Фурье своей суммы $\varphi(t)$:

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt, \quad \begin{pmatrix} c_{2p} \\ c_{2p-1}\end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\begin{pmatrix}\cos pt \\ \sin pt\end{pmatrix}dt, \\ \forall p \ge 1.$$

Компакты $K_{c,G}^\infty \subset C^\infty$ задаются (см. (4)) явным указанием мажоранты их k-х производных $G(k)$, зависящей от целого параметра $k \ge 0$. И, поскольку $K_{c,G}^\infty$ вкладывается в пространство равномерно сходящихся рядов (6), возникает вопрос: насколько порядки убывания к нулю коэффициентов c_p разложения элементов φ из $K_{c,G}^\infty$ по базису $\{\pi_p(t)\}$ согласованы с порядком роста мажоранты $G(k)$, задающей компакт $K_{c,G}^\infty$?

Лемма 1. *Если функция φ принадлежит компакту $K_{c,G}^\infty$, то*

$$|c_0| \le c, \quad |c_p| \le 2\mu(p), \quad \forall p > 0.$$

Обратно, если коэффициенты разложения функции φ из C^∞ удовлетворяют условиям

$$|c_0| \le c, \quad |c_p| \le \frac{1}{8}\frac{\mu(p)}{p^2}, \quad \forall p > 0,$$

то функция φ принадлежит компакту $K_{c,G}^\infty$ (см. (4)).

2. Пусть $X \subset C$ — компакт и $\Upsilon = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_N)$ — его конечное замкнутое ε-покрытие; по определению ε-покрытие Υ имеет кратность k, если любые $(k+1)$ элементов Υ не пересекаются, и существует k элементов, имеющих непустое пересечение (см. [3, 8]). Ранее, говоря о финитизации X, мы несколько неопределенно характеризовали ее, говоря, что элементы X определяются конечным числом параметров. Можно придать точный смысл этому наблюдению, если использовать понятие топологической размерности компакта X, определяемое через кратность замкнутого ε-покрытия X.

Определение (см. [3, 9]). *Компакт X имеет топологическую размерность n ($\dim X = n$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует его замкнутое ε-покрытие кратности, не большей $(n+1)$, но для достаточно малого ε уже не существует замкнутого ε-покрытия, кратность которого не превосходит n.*

Александровские m-поперечники (проекционный и интерполяционный) компакта $X \subset C$ определяются соответственно следующими способами (см. [3, 9]):

$$\alpha_m(X) = \inf_{(X^m,\psi)} \sup_{f\in X\subset C} \|f - \psi(f)\|, \\ \beta_m(X) = \inf_{(X^m,\psi)} \sup_{f\in X\subset C} \operatorname{diam}[\psi^{-1}\circ\psi(f)], \tag{7}$$

где inf берется по всевозможным парам (X^m, ψ), состоящим из лежащего в C компакта X^m размерности $\le m$ и непрерывного отображения $\psi: X \to X^m$. Добавим к этому, что интерполяционный m-поперечник $\beta_m(X)$, но определенный по Урысону (см. [9]), совпадает с нижней гранью тех ε, для которых существует замкнутое ε-покрытие X кратности $m+1$ (теорема Александрова [9]). В предположении, что X — компакт в банаховом пространстве, в работах [2, 8] были установлены следующие неравенства

$$\alpha_m(X) \le \beta_m(X) \le 2\alpha_m(X), \quad X \subset C.$$

Оценка сверху для величины $\alpha_m(K_{c,G}^{\infty})$ следует из первого определения (7) (см. (2)):

$$\alpha_m(K_{c,G}^{\infty}) = \inf_{(X^m,\psi)} \sup_{f\in K_{c,G}^{\infty}\subset C} \|f-\psi(f)\| \leq \leq \sup_{f\in K_{c,G}^{\infty}\subset C} e_m(f) \leq \frac{\pi}{2}\mu(m). \tag{8}$$

Для оценки снизу воспользуемся монотонностью $\alpha_m(K_{c,G}^{\infty})$ относительно перехода к компактным X_0 подмножествам [9, с. 16]: если $X_0 \subseteq K_{c,G}^{\infty}$, то $\alpha_m(X_0) \leq \alpha_m(K_{c,G}^{\infty})$.

Выберем в качестве компакта X_0 куб $\mathbb{Q}^{m+1} \subset \subset K_{c,G}^{\infty}$ топологической размерности $\dim \mathbb{Q}^{m+1} = = m+1$, для которого величина $\alpha_m(\mathbb{Q}^{m+1})$ вычисляется явно. Действительно, пусть $f \in K_{c,G}^{\infty}$ и $f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \pi_r(t)$. Тогда $\forall k \geq 0$:

$$\left\|f^{(k)}\right\| \leq G(k), \quad \mu(r) = \min_{k\geq 0}\frac{G(k)}{r^k},$$
$$\left\|\pi_r^{(k)}(t)\right\| = \left\|\begin{pmatrix}\cos rt\\ \sin rt\end{pmatrix}^{(k)}\right\| \leq r^k.$$

Введя число $\gamma = 6/\pi^2$ и функции $\phi_r(t) = = \gamma\mu(r)(r+1)^{-2}\pi_r(t)$ $(0 \leq r \leq m)$, получим:

$$\left\|\phi_r^{(k)}(t)\right\| = \gamma\mu(r)\left\|\frac{\pi_r^{(k)}(t)}{(r+1)^2}\right\| \leq \gamma\frac{G(k)\mu(r)}{(r+1)^2}\cdot\frac{r^k}{G(k)} \leq$$
$$\leq \gamma\frac{G(k)\mu(r)}{(r+1)^2}\cdot\left(\min_{k\geq 0}\frac{G(k)}{r^k}\right)^{-1} =$$
$$= \gamma\frac{G(k)\mu(r)}{(r+1)^2}\cdot(\mu(r))^{-1} \leq \frac{6}{\pi^2}\frac{G(k)}{(r+1)^2}\cdot\frac{\mu(r)}{\mu(r)} \leq$$
$$\leq \frac{6}{\pi^2}\frac{G(k)}{(r+1)^2} < G(k), \quad \forall k \geq 0.$$

Функции $\phi_r(t)$ $(0 \leq r \leq m)$ линейно независимы и принадлежат $K_{c,G}^{\infty}$; их линейная комбинация $\omega(t) = \sum_{r=0}^{m}\xi_r\phi_r(t)$ при $|\xi_r| \leq 1$ также принадлежит компакту $K_{c,G}^{\infty}$:

$$\left\|\omega^{(k)}(t)\right\| \leq \sum_{r=0}^{m}\left\|\xi_r\phi_r^{(k)}(t)\right\| \leq \frac{6}{\pi^2}\sum_{r=0}^{m}\frac{G(k)}{(r+1)^2} \leq$$
$$\leq \frac{6}{\pi^2}G(k)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(r+1)^2} < G(k), \quad \forall k \geq 0.$$

Рассмотрим теперь множество функций:

$$\mathbb{Q}^{m+1} = \left\{\gamma\sum_{r=0}^{m}\frac{\mu(r)}{(r+1)^2}\xi_r\pi_r(t) : \right. \left. : \gamma\frac{\mu(r)}{(r+1)^2}|\xi_r| \leq 1, r = 0,1,\ldots,m\right\}, \tag{9}$$

где $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$ – произвольные вещественные числа.

Куб

$$\mathbb{I}^{m+1} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{m+1} : \gamma\frac{\mu(r)}{(r+1)^2}|\xi_r| \leq 1, r = 0,1,\ldots,m\right\}$$

линейно и гомеоморфно вкладывается в компакт $K_{c,G}^{\infty}$, и его образом является множество (9), поскольку

$$\gamma\max_{0\leq r\leq m}\left|\frac{\mu(r)}{(r+1)^2}\xi_r\right| \leq \gamma\max_{0\leq t\leq 2\pi}\left|\sum_{r=0}^{m}\frac{\mu(r)}{(r+1)^2}\xi_r\pi_r(t)\right|.$$

По теореме Лебега–Брауэра (см. [9, с. 17]): $\dim \mathbb{I}^{m+1} = = m+1$. В силу изометрического вложения I^{m+1} в куб Q^{m+1}, получаем

$$\alpha_m(\mathbb{Q}^{m+1}) = \alpha_m(\mathbb{I}^{m+1}) \geq \frac{1}{2}\beta_m(\mathbb{I}^{m+1}) = \gamma\frac{\mu(m)}{(m+1)^2},$$

поскольку урысоновский m-поперечник куба I^{m+1} равен длине его ребра (см. [10], с. 11).

Теорема 2. *Верны следующие оценки александровского m-поперечника $\alpha_m(K_{c,G}^{\infty})$ компакта $K_{c,G}^{\infty}$ периодических C^{∞}-гладких функций, ограниченно вложенного в пространство C непрерывных на единичной окружности S функций*:

$$\frac{6}{\pi^2}\frac{\mu(m)}{(m+1)^2} \leq \alpha_m(K_{c,G}^{\infty}) \leq \frac{\pi}{2}\mu(m),$$
$$\mu(m) = ce^{-\int_1^m \frac{\vartheta(t)}{t}dt}, \quad m \geq 1 - \textit{целое}.$$

Следствие 2. *Пусть* $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{G(k)}/k^{\alpha} < \infty$, *где* $\alpha \geq 1$. *Это условие выполнено для классов Жевре*: $G(k) = = cA^k k^{\alpha k}$ $(c > 0,\ A > 0)$. *Тогда*

$$c\frac{6}{\pi^2(m+1)^2}e^{-\varrho\sqrt[\alpha]{m}} \leq \alpha_m(K_{c,G}^{\infty}) \leq c\frac{\pi}{2}\beta e^{-\varrho\sqrt[\alpha]{m}},$$
$$m \geq 1 - \textit{целое},$$

здесь $\varrho = \alpha e^{-1}/\sqrt[\alpha]{A}$ *и* $\beta = \exp(\alpha e\sqrt[\alpha]{A}/2)$ – *константы*.

Полученный в работе результат возник как реакция на реальную потребность вычислительной гидродинамики [4, 11, 12].

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен проф. В.С. Белоносову, тщательно просмотревшему статью и сделавшему ряд ценных уточнений.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Babenko K.I.* // Computer methods in applied and engineering. 1976. V. 7. P. 47–73, 135–152. North-Holland Publishing Company.
2. *Александров П.С.* // Fund. Math. 1933. V. 20. P. 140–150.
3. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск: РХД, 2002. 847 с.
4. *Белых В.Н.* // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 4. С. 553–566. https://doi.org/10.31857/S0044466920040031
5. *Белых В.Н.* // СМЖ. 2005. Т. 46. № 3. С. 483–499.
6. *Митягин Б.С.* // УМН. 1961. Т. 16 (4). С. 63–132.
7. *Newns W.F.* // Phil. Trans. Roy. Soc. London. A. 1953. V. 245. P. 429–468.
8. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. Изд-во МГУ, 1976. 304 с.
9. *Анучина Н.Н., Бабенко К.И., Годунов С.К. и др.* Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М.: Наука, 1977. 295 с.
10. *Бабенко К.И.* Об одном подходе к оценке качества вычислительных алгоритмов. Препринт № 7. Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1974. 68 с.
11. *Белых В.Н.* // ДАН. 2017. Т. 473. № 6. С. 650–654. https://doi.org/10.7868/S0869565217120052
12. *Белых В.Н.* // Прикл. мех. и техн. физ. 2019. Т. 60. № 2. С. 226–237. https://doi.org/10.15372/PMTF20190219

THE ESTIMATES OF ALEXANDROV’S *n*-WIDTH OF A COMPACT SET FOR SOME INFINITELY DIFFERENTIABLE PERIODIC FUNCTIONS

V. N. Belykh[a]

[a] *Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

In this paper, we obtain two-way estimates of the Alexandrov’s n-width of a compact set of infinitely smooth periodic functions that are bounded embedded in the space of continuous functions on the unit circle.

Keywords: compact set, *n*-width, infinitely smooth functions, Gevrey’s class