ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 509, с. 46–49

МАТЕМАТИКА

УДК 519.175.4

СЛАБО НАСЫЩЕННЫЕ ПОДГРАФЫ СЛУЧАЙНОГО ГРАФА

© 2023 г. О. И. Калиниченко[1,*], Б. Тайфе-Реза[2,**], М. Е. Жуковский[1,***]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 28.11.2022 г.
После доработки 11.12.2022 г.
Принято к публикации 21.12.2022 г.

В работе исследуется значение числа слабого насыщения случайного графа. Мы доказали стабильность числа слабого насыщения для некоторых паттерн-графов, а также доказали асимптотическую стабильность для всех паттерн-графов.

Ключевые слова: случайный граф, число слабого насыщения, бутстрап перколяция

DOI: 10.31857/S268695432370008X, **EDN:** CTARUK

Пусть F, G — некоторые графы, а $H \subset G$ — остовный подграф G. Граф H *слабо F-насыщен в G*, если существует последовательность графов $H = H_0 \subset \cdots \subset H_m = G$ такая, что каждый граф H_i получен из H_{i-1} добавлением ребра, которое принадлежит некоторой копии F в H_i. Иначе говоря, все ребра графа $G \setminus H$ могут быть добавлены одно за другим таким образом, что при каждом добавлении создается хотя бы одна новая копия F. Наименьшее количество ребер в слабо F-насыщенном графе в G называется *числом слабого F-насыщения графа G* и обозначается $\mathrm{wsat}(G, F)$. Это понятие было впервые предложено Боллобашем в 1968 г. в работе [3].

Точное значение числа слабого насыщения $\mathrm{wsat}(K_n, K_s)$ (как обычно, K_n — полный граф на n вершинах) было найдено Ловасом в работе [9]: при всех $n \geq s \geq 2$

$$\mathrm{wsat}(K_n, K_s) = \binom{n}{2} - \binom{n-s+2}{2}.$$

Другим естественным паттерн-графом F является полный двудольный граф $K_{s,t}$. Значение $\mathrm{wsat}(K_n, K_{s,t})$ для произвольных s, t до сих пор не найдено. Наболее общий результат был получен Калаи [4] в 1985 г., а также Кроненбер, Мартинс и Моррисон [8] в 2020 г.: при $t \geq 2$ и $n \geq 3t-3$

$$\mathrm{wsat}(K_n, K_{t,t}) = (t-1)(n+1-t/2),$$

$$\mathrm{wsat}(K_n, K_{t,t+1}) = (t-1)(n+1-t/2)+1.$$

Кроме того, в [8] были получены следующие оценки для произвольных s и t:

$$\mathrm{wsat}(K_n, K_{s,t}) \leq (s-1)(n-s) + \binom{t}{2}, \quad t > s \geq 2, \quad n \geq 2(s+t)-3; \tag{1}$$

$$\mathrm{wsat}(K_n, K_{s,t}) \geq (s-1)(n-t+1) + \binom{t}{2}, \quad t > s \geq 2, \quad n \geq 3t-3. \tag{2}$$

При $s = 1$ несложно видеть, что $\mathrm{wsat}(K_n, K_{1,t}) = \binom{t}{2}$. Случай $s = 2$ гораздо сложнее. Тем не менее нам удалось найти точное значение числа слабого насыщения и в этом случае.

Теорема 1. *Для всех натуральных $t \geq 3$ и $n \geq t+2$ справедливо следующее.*

- *Если t нечетно или $n \geq 2t-1$, то* $\mathrm{wsat}(K_n, K_{2,t}) = n - 2 + \binom{t}{2}$.
- *Если t четно и $n \leq 2t-2$, то* $\mathrm{wsat}(K_n, K_{2,t}) = n - 1 + \binom{t}{2}$.

Как обычно, $G(n, p)$ — это биномиальный случайный граф на множестве вершин $[n] := \{1, \ldots, n\}$, где каждая пара различных вершин $i, j \in [n]$ смеж-

[1] *Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет), лаборатория комбинаторных и геометрических структур, Москва, Россия*
[2] *School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), Tehran, Iran*
* *E-mail: s15b1_kalinichenko@179.ru*
** *E-mail: tayfeh-r@ipm.ir*
*** *E-mail: zhukmax@gmail.com*

на с вероятностью p независимо от всех других пар. Здесь и далее мы будем говорить, что свойство графов выполнено *асимптотически почти наверное*, если его вероятность стремится к 1 при $n \to \infty$. В 2017 г. Коранди и Судаков [6] доказали, что если $s \geq 3$, то $\mathrm{wsat}(K_n, K_s)$ *стабильно*, т.е. при постоянной вероятности $p \in (0, 1)$ асимптотически почти наверное

$$\mathrm{wsat}(G(n, p), K_s) = \mathrm{wsat}(K_n, K_s),$$

и задали вопрос о существовании пороговой вероятности для свойства стабильности и о ее значении. Нам удалось доказать, что пороговая вероятность существует и предъявить нетривиальные оценки ее значения [2].

Теорема 2. *Существует такое c, что при $p < cn^{-\frac{2}{s+1}}(\ln n)^{\frac{2}{(s-2)(s+1)}}$ асимптотически почти наверное $\mathrm{wsat}(G(n, p), K_s) \neq \mathrm{wsat}(K_n, K_s)$, а при $p > n^{-\frac{1}{2s-3}}(\ln n)^2$ асимптотически почти наверное $\mathrm{wsat}(G(n, p), K_s) = \mathrm{wsat}(K_n, K_s)$.*

Естественно задаться вопросом о существовании графа F, для которого свойство стабильности не выполнено. Мы предполагаем, что такого графа не существует.

Гипотеза 1. *Пусть $p \in (0, 1)$ — некоторая константа. Тогда для каждого графа F асимптотически почти наверное*

$$\mathrm{wsat}(G(n, p), F) = \mathrm{wsat}(K_n, F). \qquad (3)$$

В подтверждение этой гипотезы мы установили достаточно общее достаточное условие стабильности [5]. Обозначим $\delta(H)$ минимальную степень вершины в графе H. Без потери общности положим $V(K_n) = [n]$.

Теорема 3. *Пусть F — граф без изолированных вершин, $p \in (0, 1)$, $C \geq \delta(F) - 1$ — константы. Для каждого $n \in \mathbb{N}$, пусть H_n^0 — слабо F-насыщенный подграф K_n, содержащий такое множество вершин $S_n^0 \subset [n]$ с $|S_n^0| \leq C$, что каждая вершина из $[n] \setminus S_n^0$ смежна с хотя бы $\delta(F) - 1$ вершинами из S_n^0. Тогда асимптотически почти наверное найдется подграф $F_n \subset G(n, p)$, являющийся слабо F-насыщенным, и у него $\min\{|E(G(n, p))|, |E(H_n^0)|\}$ ребер.*

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. *Пусть $p \in (0, 1)$ — константа. Для произвольного графа F без изолированных вершин асимптотически почти наверное равенство (3) выполнено, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует наименьший (с $\mathrm{wsat}(K_n, F)$ ребрами) слабо F-насыщенный подграф K_n, обладающий свойством, описанным в теореме 3.*

Действительно, условие из теоремы 3 влечет неравенство $\mathrm{wsat}(G(n, p), F) \leq \mathrm{wsat}(K_n, F)$ асимптотически почти наверное. Так как асимптотически почти наверное каждая пара вершин $G(n, p)$ имеет хотя бы $|V(F)|$ попарно смежных общих соседей [10], то асимптотически почти наверное $G(n, p)$ слабо (K_n, F)-насыщен, что влечет ограниченность снизу числа слабого насыщения в $G(n, p)$ числом слабого насыщения в K_n.

Легко видеть, что следствие 1 влечет свойство стабильности (3) для $F = K_s$ и $F = K_{s,t}$ асимптотически почти наверное для всех возможных значений s, t (несмотря на тот факт, что, вообще говоря, точное значение $\mathrm{wsat}(K_n, K_{s,t})$ неизвестно). Заметим, что в силу (1) и (2) асимптотически почти наверное $\mathrm{wsat}(G(n, p), K_{s,t}) = (s-1)n + C(s,t)$ для некоторой константы $C = C(s,t)$.

Как было замечено выше, для $F = K_s$ мы до сих пор не знаем значение пороговой вероятности для свойства стабильности (даже в простейшем случае $s = 3$). Тем не менее нам удалось найти пороговую вероятность для звезд $F = K_{1,t}$ [5].

Теорема 4. *Пусть $t \geq 3$. Обозначим $p_t = n^{-\frac{1}{t-1}}[\ln n]^{-\frac{t-2}{t-1}}$.*

- *Существует такая константа $c > 0$, что при $\frac{1}{n^2} \ll p < cp_t$ асимптотически почти наверное $\mathrm{wsat}(G(n, p), K_{1,t}) \neq \mathrm{wsat}(K_n, K_{1,t})$.*
- *Существует такая константа $C > 0$, что при $p > Cp_t$ асимптотически почти наверное $\mathrm{wsat}(G(n, p), K_{1,t}) = \mathrm{wsat}(K_n, K_{1,t})$.*

Заметим, что теорема 4 не покрывает случай $t = 2$, как и случай $p = O\left(1/n^2\right)$. Тем не менее эти случаи гораздо проще. Во-первых, если $t \geq 3$ и $p < \frac{Q}{n^2}$ для некоторого $Q > 0$, то асимптотически почти наверное $G(n, p)$ не содержит $K_{1,t-1}$, и поэтому асимптотически почти наверное стабильность выполнена, если количество ребер в случайном графе строго равно $\binom{t}{2}$, что не выполнено асимптотически почти наверное при $p \ll \frac{1}{n^2}$ и выполнено с вероятностью, отделенной от 0 и 1, при $\frac{q}{n^2} < p < \frac{Q}{n^2}$ для некоторых $0 < q < Q$. Случай $t = 2$ тоже прост. Если $p > (1+\varepsilon)\frac{\ln n}{2n}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то асимптотически почти наверное

$\mathrm{wsat}(G(n,p),K_{1,2}) = \mathrm{wsat}(K_n,K_{1,2})$. Если $\frac{1}{n^2} \ll p < (1-\varepsilon)\frac{\ln n}{2n}$, то асимптотически почти наверное $\mathrm{wsat}(G(n,p),K_{1,2}) \neq \mathrm{wsat}(K_n,K_{1,2})$. Если $\frac{q}{n^2} < p < \frac{Q}{n^2}$ для некоторых $0 < q < Q$, то

$$\mathsf{P}\left[\mathrm{wsat}\left(G(n,p),K_{1,2}\right) = \mathrm{wsat}\left(K_n,K_{1,2}\right)\right] = \\ = \mathsf{P}\,(G(n,p) \text{ содержит ровно 1 ребро}) + o(1) = \\ = \binom{n}{2} p(1-p)^{\binom{n}{2}-1} + o(1)$$

отделена от 0 и 1. Если же $p \ll \frac{1}{n^2}$, то асимптотически почти наверное $\mathrm{wsat}\left(G(n,p),K_{1,2}\right) = 0 \neq \mathrm{wsat}\left(K_n,K_{1,2}\right)$.

Заметим, наконец, что выполнена асимптотическая версия гипотезы 1.

Теорема 5. *Для любой константы $p \in (0,1)$ и всякого графа F асимптотически почти наверное*

$$\mathrm{wsat}(G(n,p),F) = \mathrm{wsat}(K_n,F)(1+o(1)).$$

Коротко изложим основные этапы доказательства. Зафиксируем граф F и $p \in (0,1)$. Напомним, что (см. [1]) найдется константа c_F такая, что $\mathrm{wsat}(K_n,F) = (c_F + o(1))n$. Более того, $c_F > 0$ тогда и только тогда, когда F не содержит вершин степени 1. Если же F содержит вершину степени 1, то несложно видеть, что для некоторой константы w_F асимптотически почти наверное

$$\mathrm{wsat}(G(n,p),F) = \mathrm{wsat}(K_n,F) = w_F.$$

Предположим, что F содержит $s \geq 3$ вершин, и ни одна из них не имеет степень, равную 1. Хорошо известно [7], что множество вершин $G(n,p)$ может быть покрыто кликами размера $\log_{1/p} n$. Более строго, асимптотически почти наверное найдутся такие непересекающиеся множества $V_1,\ldots,V_m \subset [n]$, что $V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_m = [n]$, каждое множество V_i имеет размер $v_i \in \left\{\left\lfloor \log_{1/p} n \right\rfloor, \left\lceil \log_{1/p} n \right\rceil\right\}$, и V_i индуцирует клику в $G(n,p)$. Стандартным образом можно показать, что V_i могут быть выбраны таким образом, что двудольные графы с частями (V_i,V_{i+1}) псевдослучайны в следующем смысле: для каждого $i \in [m]$ существуют непересекающиеся множества $S_i^1, S_i^2 \subset V_i$ размера $s-2$, удовлетворяющие условиям

- $S_i^2 \sqcup S_{i+1}^1$ индуцируют полные подграфы в $G(n,p)$;
- каждая вершина из $V_{i+1} \backslash S_{i+1}^1$ имеет хотя бы $s-2$ соседа $v_1,\ldots,v_{s-2}$ в V_i таких, что каждая вершина v_i смежна со всеми вершинами из S_{i+1}^1.

Каждый индуцированный подграф $G(n,p)[V_i]$ содержит подграф H_i с $\mathrm{wsat}(K_{v_i},F)$ ребрами. Рассмотрим граф H, полученный объединением H_i с $m-1$ полными двудольными графами с частями $\left(S_i^2, S_{i+1}^1\right)$, $i \in [m-1]$. Заметим, что у H не более

$$m(c_F + o(1))\log_{1/p} n + (m-1)(s-2)^2 = (c_F + o(1))n$$

ребер, и что он является слабо F-насыщенным в $G(n,p)$. Остается заметить, что асимптотически почти наверное $G(n,p)$ является слабо F-насыщенным в K_n, и поэтому асимптотически почти наверное $\mathrm{wsat}(G(n,p),F) \geq \mathrm{wsat}(K_n,F)$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена за счет гранта РФФИ 20-51-56017 и гранта Iran National Science Foundation, номер проекта 99003814.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alon N.* An extremal problem for sets with applications to graph theory // J. Combin. Theory Ser. A. 1985. V. 40. № 1. P. 82–89.
2. *Bidgoli M.R., Mohammadian A., Tayfeh-Rezaie B., Zhukovskii M.* Threshold for weak saturation stability // arXiv:2006.06855. 2020.
3. *Bollobás B.* Weakly k-saturated graphs // Beiträge zur Graphen–theorie. 1968. P. 25–31.
4. *Kalai G.* Hyperconnectivity of graphs // Graphs Combin. 1985 V. 1. P. 65–79.
5. *Kalinichenko O., Zhukovskii M.* Weak saturation stability // arXiv:2107.11138. 2022.
6. *Korándi D., Sudakov B.* Saturation in random graphs // Random Structures Algorithms. 2017. V. 51. № 1. P. 169–181.
7. *Krivelevich M., Patkós B.* Equitable coloring of random graphs // Random Structures Algorithms. 2009. V. 35. № 1. P. 83–99.
8. *Kronenberg, G., Martins T., Morrison N.* Weak saturation numbers of complete bipartite graphs in the clique // J. Combin. Theory Ser. A. 2021. V. 178. 105357.
9. *Lovász, L.* Flats in matroids and geometric graphs // Combinatorial Surveys. 1977. P. 45–86.
10. *Spencer J.* Threshold Functions for Extension Statements // J. Combin. Theory Ser. A. 1990. V. 53. P. 286–305.

WEAKLY SSATURATED SUBGRAPHS OF RANDOM GRAPHS

O. Kalinichenko[a], B. Tayfeh-Rezaie[b], and M. Zhukovskii[a]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology, Laboratory of Combinatorial and Geometric Structures, Moscow, Russia*

[b] *School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), Tehran, Iran*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In this paper, we study weak saturation numbers of binomial random graphs. We proved stability of the weak saturation for several pattern graphs, and proved asymptotic stability for all pattern graphs.

Keywords: random graph, weak saturation, bootstrap percolation