ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 509, с. 50–53

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ОБОБЩЕННЫМ УСЛОВИЕМ САМАРСКОГО–ИОНКИНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. А. И. Кожанов[1,2,*]

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым
Поступило 02.09.22 г.
После доработки 28.10.2022 г.
Принято к публикации 23.12.2022 г.

В работе изучается разрешимость нелокальных по пространственной переменной краевых задач для одномерных параболических уравнений, а также для некоторых уравнений соболевского типа. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений – именно, решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Ключевые слова: параболические уравнения, уравнения соболевского типа, нелокальные задачи, обобщенное условие Самарского–Ионкина, регулярные решения, существование, единственность

DOI: 10.31857/S2686954323700091, **EDN:** CTHUQW

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений – именно, задачи, в которых вместо обычных локальных (точечных) граничных условий задаются условия, связывающие значения решения и (или) его производных в граничных точках со значениями решения и (или) его производных в точках иных граничных или внутренних многообразий – исследуются с давних времен, причем как с математической точки зрения, так и с точки зрения математического моделирования. Современный этап в развитии теории таких задач начался, по-видимому, с работы А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [1], опубликованной в 1969 г. В этой работе был предложен новый подход к постановке нелокальных краевых задач; этот подход с тех пор активно используется многими авторами. Среди многочисленных работ, посвященных задаче Бицадзе–Самарского и близких к ней задачам, выделим сыгравшие особую роль работы [2–5]. В первой из них – работе Н.И. Ионкина [2], опубликованной в 1977 г. – изучалась нелокальная задача для одномерного параболического уравнения, возникающая при моделировании некоторых неклассических тепловых процессов, и был предложен метод, основанный на разложении решения по специальной биортогональной системе функций, с помощью которого удалось доказать существование и в дальнейшем в работе [3] – устойчивость решений.

В 1980 г. была опубликована работа А.А. Самарского [4], в которой также для параболического уравнения с одной пространственной переменной была предложена постановка нелокальной краевой задачи, включающая в себя как постановку классических начально-краевых задач, так и задачу Н.И. Ионкина работ [2] и [3]. Исследованию разрешимости нелокальных задач с условиями А.А. Самарского посвящены работы Н. Лажетича, А.И. Кожанова, Л.С. Пулькиной и многих других.

Как сыгравшую особую роль, отметим также работу [5], принадлежащую Н.И. Юрчуку. В этой работе изучалась задача Н.И. Ионкина для одномерных параболических уравнений с переменными коэффициентами, метод исследования отличался от метода работ [2, 3], но ее разрешимость была установлена лишь в весовых пространствах.

Заметим также следующее. Как уже говорилось выше, работы Н.И. Ионкина [2, 3] появились во многом благодаря некоторым потребностям математического моделирования. Но впервые, по-видимому, на связь теории нелокальных краевых задач с задачами математического моделирования обратил внимание В.А. Стеклов еще в конце XIX века в работе [6] (см. также [7]), посвя-

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
**E-mail: kozhanov@math.nsc.ru*

щенной изучению некоторых процессов теплопроводности.

Именно нелокальная задача Н.И. Ионкина, но в более общей постановке – с условием, которое можно назвать обобщенным условием Самарского–Ионкина – и будет основной целью настоящей работы. Более точно, будут изучаться некоторые нелокальные краевые задачи с обобщенным условием Самарского–Ионкина для параболических уравнений с переменными коэффициентами, а также для уравнений, которые в последнее время – см., например, [8–10] – называют уравнениями соболевского типа. Уточним, что метод исследования при этом будет отличаться как от метода работ [2, 3], так и от метода работы [5].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega\times(0,T)$, $0<T<+\infty$, переменных x и t. Далее, пусть $a(x)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ и $\gamma(t)$ есть заданные функции, определенные при $x\in\bar{\Omega}$, $t\in[0,T]$.

Нелокальная задача I: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_t-\frac{\partial}{\partial x}\big(a(x)u_x\big)+c(x,t)u=f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0)=0,\quad x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u(0,t)=\gamma(t)u(1,t),\quad u_x(1,t)=0,\quad t\in(0,T). \tag{3}$$

Нелокальная задача II: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условие*

$$u_x(0,t)=\gamma(t)u_x(1,t),\quad u(1,t)=0,\quad t\in(0,T). \tag{4}$$

Нелокальная задача III: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt}-u_{xxt}+b(x,t)u_{xx}+c(x,t)u=f(x,t) \tag{5}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3), *а также условие*

$$u_t(x,0)=0,\quad x\in\Omega. \tag{6}$$

Нелокальная задача IV: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (5) *и такую, что для нее выполняются условия* (2), (4) *и* (6).

В данных задачах условие (4) в случае $\gamma(t)\equiv 1$ есть условие Ионкина (в дифференциальной форме), и тем самым задачи II и IV можно назвать обобщением задачи Ионкина. Нелокальные задачи I и III имеют самостоятельное значение, но в то же время ниже будет показано, что они тесно связаны с задачами II и IV.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ I И II

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$a(x)\in C^1(\bar{\Omega}),\quad c(x,t)\in C(\bar{Q}),\quad \gamma(t)\in C([0,T]),$$

$$a(x)\ge a_0>0,\quad a'(x)\le 0\quad \text{при}\quad x\in\bar{\Omega}.$$

Тогда нелокальная задача I *не может иметь в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ более одного решения.*

Доказательство. Умножим уравнение (1) с нулевой правой частью на функцию xu и проинтегрируем по прямоугольнику $\Omega\times(0,t)$. Используя далее неравенство

$$\psi^2(1)\le\delta^2\int_\Omega x\psi'^2(x)dx+\left(2+\frac{1}{\delta^2}\right)\int_\Omega x\psi^2(x)dx, \tag{7}$$

в котором $\psi(x)\in W_2^1(\Omega)$, δ есть произвольное положительное число, и применяя лемму Гронуолла, получим, что для решения $u(x,t)$ нелокальной задачи I в случае $f(x,t)\equiv 0$ при $t\in(0,T)$ выполняется равенство $u(0,t)=0$. Другими словами, функция $u(x,t)$ будет решением однородной начально-краевой задачи со смешанными условиями для параболического уравнения второго порядка. Как хорошо известно [11], функция $u(x,t)$ будет тождественно нулевой в Q функцией. А это и означает требуемое.

Определим пространство V_0:

$$V_0=\{v(x,t): v(x,t)\in W_2^{2,1}(Q),\ v_x(x,t)\in W_2^{2,1}(Q)\}.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$a(x)\in C^2(\bar{\Omega}),\quad c(x,t)\in C^2(\bar{Q}),\quad \gamma(t)\in C([0,T]),$$

$$a(x)\ge a_0>0,\quad \big(xc_x(x,t)\big)_x\le 0$$

$$\text{при}\quad x\in\bar{\Omega},\quad t\in[0,T],\quad a'(1)=0.$$

Тогда нелокальная задача II не *может иметь в пространстве V_0 более одного решения.*

Доказательство. Если $u(x,t)$ есть решение из пространства V_0 нелокальной задачи II в случае $f(x,t)\equiv 0$, то для функции $v=u_x$ будет выполняться уравнение

$$v_t-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(a(x)v\big)+c(x,t)v+c_x(x,t)u=0.$$

Умножая это уравнение на функцию xv, интегрируя по прямоугольнику $\Omega\times(0,t)$, применяя неравенство (7) и лемму Гронуолла, получим $v(x,t)\equiv 0$ в Q. Отсюда и следует требуемое.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$a(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad c(x,t) \in C^1(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C^2([0,T]),$$

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad a'(x) \leq 0 \quad c(x,t) \geq 0, \quad c_{xx}(x,t) \leq 0,$$

$$2c(x,t) - a''(x) \geq 0 \quad при \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \in [0,T].$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, *нелокальная задача* I *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* $W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью метода регуляризации. Именно, для положительных чисел ε и μ рассматривается задача: *найти функцию* $v(x,t)$, *являющуюся в прямоугольнике* Q *решением уравнения*

$$v_t - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)v_x\right) + c(x,t)v + \varepsilon(v_{xxtt} - \mu v_{tt}) = g(x,t) \quad (*)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3), *а также условие*

$$v_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Как для доказательства существования регулярного решения этой задачи, так и для организации предельного перехода необходимы априорные оценки. Эти оценки выводятся с помощью анализа равенств, полученных умножением уравнения (*) на функции $(T_0 - t)xv(x,t)$, $-x(T_0 - t)v_{tt}(x,t)$, $-v_{xx}(x,t)$, $v_t(x,t)$ и $\varepsilon v_{xxtt}(x,t)$ $(T_0 > T)$, с последующим интегрированием по прямоугольнику Q.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия*

$$a(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad c(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C^2([0,T]),$$

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad c(x,t) \geq 0, \quad 2c(x,t) - a''(x) \geq 0,$$

$$(xc_x(x,t))_x \leq 0$$

$$при \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \in [0,T], \quad a'(1) = 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_x(x,t) \in L_2(Q)$, $f_{xt}(x,t) \in L_2(Q)$, *нелокальная задача* II *имеет решение* $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $u_x(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью перехода к продифференцированному по переменной x уравнению (*).

4. РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ III И IV

Определим пространства V_1 и V_2:

$$V_1 = \left\{v(x,t)\colon v(x,t) \in L_\infty\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right),\right.$$

$$\left. v_t(x,t) \in L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right), v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\right\},$$

$$V_2 = \left\{v(x,t)\colon v(x,t) \in V_1, \quad v_x(x,t) \in V_1\right\}.$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия*

$$b(x,t) \in C(\bar{Q}), \quad c(x,t) \in C(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C([0,T]).$$

Тогда нелокальная задача III *не может иметь в пространстве* V_1 *более одного решения.*

Теорема 6. *Пусть выполняются условия*

$$b(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \quad c(x,t) \in C^1(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C([0,T]),$$

$$\left(xb_x(x,t)\right)_x \leq 0 \quad при \quad (x,t) \in \bar{Q}.$$

Тогда нелокальная задача IV *не может иметь в пространстве* V_2 *более одного решения.*

Уравнение (5) на функциях из пространства V_1 можно записать в виде

$$u_t - u_{xx} + b(x,t)u = \int_0^t R(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f_1(x,t),$$

$$R(x,t,\tau) = e^{\int_0^t b(x,\tau)d\tau - \int_0^\tau b(x,\xi)d\xi}[b_\tau(x,\tau) - b^2(x,\tau) - c(x,\tau)], \quad (8)$$

$$f_1(x,t) = \int_0^t e^{\int_0^t b(x,\tau)d\tau - \int_0^\tau b(x,\xi)d\xi} f(x,\tau)d\tau.$$

Повторяя для уравнения (8) доказательство теорем 1 и 2, получим требуемое.

Используя представление (8), нетрудно установить и разрешимость нелокальных задач III и IV.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия*

$$b(x,t) \in C^1(\bar{Q}), \quad c(x,t) \in C(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C^2([0,T]),$$

$$b(x,t) \geq 0 \quad при \quad (x,t) \in \bar{Q}.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *из пространства* $L_2(Q)$ *нелокальная задача* III *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* V_1.

Теорема 8. *Пусть выполняются условия*

$$b(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \quad c(x,t) \in C^1(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C^2([0,T]),$$

$$b(x,t) \geq 0, \quad \left(xb_x(x,t)\right)_x \leq 0 \quad при \quad (x,t) \in \bar{Q}.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_x(x,t) \in L_2(Q)$, *нелокальная задача* IV *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* V_2.

Сделаем несколько заключительных замечаний:

1. Уравнения (1) и (5) имеют модельный вид. Представленные в работе результаты можно получить и в более общих ситуациях – например, функция a в уравнении (1) может зависеть и от переменной t, в уравнениях (1) и (5) могут присутствовать слагаемые с первой производной по переменной x, и т.д. Соответствующие условия разрешимости (существования и единственности) легко выводятся.

2. Краевые условия (3) и (4) также можно "пошевелить" — второе условие (3) можно заменить условием $u_x(1,t) + \alpha(t)u(1,t) = 0$, первое условие (4) можно заменить условием $u_x(0,t) + \beta(t)u(0,t) = \gamma(t)u_x(1,t)$.

3. Теоремы 1 и 2, 4 и 5 говорят о единственности регулярных решений соответствующих нелокальных задач для любой функции $\gamma(t)$. Вместе с тем для близкого к изученным уравнения

$$u_t - u_{xxt} + b(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f \tag{9}$$

(называемого в некоторых источниках псевдопараболическим) это не так. В случае $b(x,t) \equiv c(x,t) \equiv 0$, $\gamma = \frac{1}{2}\left(e + e^{-1}\right)$, $f(x,t) \equiv 0$ нелокальная задача I для уравнения (9) имеет ненулевое решение $u(x,t) = t\left(e^x + e^{-x}\right)$, что и говорит о неединственности решений.

4. Краевые и начальные условия в нелокальных задачах можно задавать неоднородными. Суть полученных результатов от этого не изменится.

5. И последнее замечание: разрешимость нелокальных задач I и II для гиперболических уравнений второго порядка с одной пространственной переменной с произвольной функцией $\gamma(t)$ доказана в работе [12].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075–15–2022–282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
2. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
3. *Ионкин Н.И.* Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1279–1283.
4. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
5. *Юрчук Н.И.* Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2117–2126.
6. *Стеклов В.А.* Задача об охлаждении неоднородного твердого тела. Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1897. Т. 5. № 3–4. С. 136–181.
7. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
8. *Демиденко Г.В., Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
9. *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, the Netherlands: VSP, 2003.
10. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
11. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
12. *Кожанов А.И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Математическиезаметки. 2011. Т. 90. Вып. 2. С. 254–268.

NONLOCAL PROBLEMS WITH GENERALIZED SAMARSKY-IONKIN CONDITION FOR SOME CLASSES OF NONSTATIONARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. I. Kozhanov[a,b]

[a] *Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

[b] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

In this paper, we study the solvability of boundary value problems that are nonlocal with respect to the spatial variable for one-dimensional parabolic equations, as well as for some equations of the Sobolev type. Existence and uniqueness theorems are proved regular solutions — namely, solutions having all the derivatives generalized in the sense of S.L. Sobolev entering the corresponding equation.

Keywords: parabolic equations, Sobolev type equations, nonlocal problems, generalized Samarskii–Ionkin condition, regular solutions, existence, uniqueness