ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 510, с. 3–7

УДК 510.652

ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИЯХ АРИФМЕТИКИ ПРЕСБУРГЕРА В АРИФМЕТИКАХ БЮХИ

© 2023 г. А. А. Запрягаев[1,*]

Представлено академиком РАН Л.Д. Беклемишевым
Поступило 14.11.2022 г.
После доработки 31.01.2023 г.
Принято к публикации 03.02.2023 г.

Арифметики Бюхи $\mathbf{BA}_n$, $n \geq 2$, являются расширениями арифметики Пресбургера унарным функциональным символом $V_n(x)$, обозначающим наибольшую степень n, делящую x. Определимость множества в $\mathbf{BA}_n$ эквивалентна распознаванию его конечным автоматом, принимающим числа в n-ичной записи. Мы рассматриваем интерпретации арифметики Пресбургера в стандартной модели $\mathbf{BA}_n$ и показываем, что для всякой такой интерпретации внутренняя модель изоморфна стандартной. Это дает ответ на вопрос А. Виссера, касающийся интерпретаций некоторых слабых арифметических теорий в себя.

Ключевые слова: формальные арифметики, интерпретации, автоматные структуры, автоматные абелевы группы

DOI: 10.31857/S2686954322600641, **EDN:** XHJOFS

1. ВВЕДЕНИЕ

Арифметической теорией называется первопорядковая теория, моделью которой служат натуральные числа $\mathbb{N}$ с некоторыми операциями над ними.

Согласно первой теореме Гёделя о неполноте, арифметика Пеано **PA**, язык которой содержит как сложение, так и умножение, является неполной и неразрешимой теорией. В связи с этим представляет интерес изучение арифметических теорий с менее выразительным языком, для которых устанавливаются полнота и разрешимость. Такие теории называют *слабыми арифметиками*. В частности, в литературе рассматриваются *арифметика Пресбургера* $\mathbf{PrA} = \mathbf{Th}(\mathbb{N}; =, +)$ [6] и *арифметика Сколема* $\mathbf{Th}(\mathbb{N}; =, \cdot)$.

Арифметики Бюхи являются важным классом расширений арифметики Пресбургера, поскольку сохраняют свойство разрешимости и находят применение в описании множеств, принимаемых конечными автоматами.

Определение 1. Арифметикой Бюхи $\mathbf{BA}_n$, $n \geq 2$, *называется элементарная теория* $\mathbf{Th}(\mathbb{N}, =, +, V_n)$, *где* V_n *— унарный функциональный символ такой, что* $V_n(x)$ *— наибольшая степень* n, *делящая* x. *Для определенности полагаем* $V_n(0) = 0$.

Серия теорий $\mathbf{BA}_n$ была предложена Ю. Бюхи [1] в качестве инструмента для описания распознаваемости подмножеств $\mathbb{N}$ в конечных автоматах на арифметическом языке. Эта связь явно устанавливается посредством следующего классического результата В. Брюйер [2, 3]:

Теорема 1.1. *Пусть* $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ *— формула в языке* $\mathbf{BA}_n$. *Тогда существует и эффективно строится автомат* $\mathcal{A}$ *такой, что* $(a_1, \ldots, a_m)$ *принимается* $\mathcal{A}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbb{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_m)$.

Наоборот, пусть $\mathcal{A}$ *— конечный автомат, обрабатывающий* m*-кортежи* n*-ичных натуральных чисел. Тогда существует и эффективно строится формула* $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ *в языке* $\mathbf{BA}_n$ *такая, что* $\mathbb{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_m)$ *тогда и только тогда, когда* $(a_1, \ldots, a_m)$ *принимается* $\mathcal{A}$.

Здесь подразумевается, что автомат $\mathcal{A}$ получает на вход m-кортежи натуральных чисел в виде последовательных m-кортежей последних, затем предпоследних и т.д. цифр их n-ичной записи. Теорема Кобхэма-Семёнова [4, 5] утверждает, что для мультипликативно независимых натуральных чисел n, m (пара чисел n, m называется мультипликативно независимой, если уравнение $n^k = m^l$ не имеет решений в целых числах, кроме $k = l = 0$), всякое множество, определимое в $\mathbf{BA}_n$ и $\mathbf{BA}_m$, на

[1] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия*
**E-mail: azapryagaev@hse.ru*

самом деле определимо в арифметике Пресбургера **PrA**.

Мы рассматриваем интерпретации $\mathbf{BA}_n$ в себя. А. Виссер поставил следующий вопрос: *если дана слабая арифметическая теория T, верно ли, что всякая интерпретация (одномерная или многомерная) T в себя изоморфна тождественной, и если так, то всегда ли возникающий изоморфизм выразим формулой T?* Этот вопрос был положительно разрешен в случае арифметики Пресбургера **PrA** в работе автора с Ф. Пахомовым [7]. Поскольку арифметики Бюхи являются консервативными расширениями **PrA** с добавлением нового функционального символа, они являются естественным классом теорий для дальнейшего рассмотрения.

В настоящей работе мы доказываем, что даже для всякой интерпретации **PrA** в $\mathbf{BA}_n$ внутренняя модель изоморфна стандартной, что дает частичный положительный ответ на вопрос Виссера. Остается открытым вопросом, обязательно ли этот изоморфизм является $\mathbf{BA}_n$-определимым.

Можно показать, что для всякой m-мерной интерпретации ι некоторой структуры A в $\mathbf{BA}_n$, существует одномерная интерпретация ι', изоморфная ι, но не обязательно определимо. Тем самым, в многомерном случае вопрос наличия изоморфизма (но не его $\mathbf{BA}_n$-определимости) также разрешен положительно.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Мы рассматриваем одномерные непараметрические интерпретации арифметик Бюхи согласно [8, с. 20–21]. Интерпретацией ι языка первого порядка $\mathcal{K}$ в структуре $\mathfrak{B}$ языка $\mathcal{L}$ называют следующую совокупность формул в языке $\mathcal{L}$:

1. $D_\iota(y)$, задающая множество $\mathbf{D}_\iota \subseteq \mathfrak{B}$ (*область определения*);

2. $P_\iota(x_1,\ldots,x_n)$ для всякого предикатного символа $P(x_1,\ldots,x_n)$ из $\mathcal{K}$;

3. $f_\iota(x_1,\ldots,x_n,y)$ для всякого функционального символа $f(x_1,\ldots,x_n)$ из $\mathcal{K}$.

Здесь от всех f_ι требуется, чтобы они задавали график некоторой функции (по модулю интерпретации предиката равенства).

Естественным образом ι и $\mathfrak{B}$ задают модель $\mathfrak{A}$ языка $\mathcal{K}$ с носителем $\mathbf{D}_\iota/\sim_\iota$, где отношение эквивалентности $\sim_\iota$ задается $=_\iota (x_1, x_2)$. $\mathfrak{A}$ называют *внутренней моделью* $\mathcal{K}$.

Если к тому же $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$, то ι называют *интерпретацией теории* $\mathbf{T}$ в $\mathfrak{B}$. Если для теории первого порядка $\mathbf{U}$ интерпретация ι является интерпретацией $\mathbf{T}$ вне зависимости от выбора $\mathfrak{B} \models \mathbf{U}$, то ι называют интерпретацией теории $\mathbf{T}$ в $\mathbf{U}$.

Мы будем рассматривать интерпретации $\mathbf{BA}_n$ в себя. Поскольку $\mathbf{BA}_n$ является элементарной теорией $(\mathbb{N};=,+,V_n)$, это эквивалентно рассмотрению интерпретаций в стандартной модели $\mathbf{BA}_n$, т.е. $\mathbb{N}$. Наша задача состоит в установлении, для всякой ли интерпретации ι теории $\mathbf{BA}_n$ получающаяся внутренняя модель изоморфна стандартной. Тем самым требуется определить, интерпретируема ли какая-либо нестандартная модель $\mathbf{BA}_n$ в арифметике Бюхи. Порядковые типы нестандартных моделей $\mathbf{BA}_n$ описывает следующий стандартный результат.

Теорема 2.1. *Всякая нестандартная модель $\mathcal{A} \models \mathbf{BA}_n$ имеет порядковый тип $\mathbb{N} + \mathbb{Z}\cdot A$, где $\langle A, <_A\rangle$ — некоторый плотный линейный порядок без первой и последней точек. В частности, всякая счетная нестандартная модель $\mathbf{BA}_n$ имеет порядковый тип $\mathbb{N} + \mathbb{Z}\cdot\mathbb{Q}$.*

Забывая о $V_n(x)$, становится возможным рассматривать интерпретацию нестандартной модели $\mathbf{BA}_n$ в арифметике Бюхи как интерпретацию одного сложения (т.е., интерпретацию арифметики Пресбургера **PrA**). Согласно теореме 1.1, всякая интерпретация произвольной структуры A в $\mathbf{BA}_n$ является ее автоматным представлением; в частности, интерпретация $(\mathbb{N};=,+)$ индуцирует автоматный моноид в качестве своей внутренней модели.

Следующее необходимое условие для автоматных групп установили Браун и Штрюнгманн [9, теорема 10].

Теорема 2.2. *Пусть $(A,+)$ — автоматная абелева группа без кручения. Тогда в A существует подгруппа B, изоморфная $\mathbb{Z}^m$ для некоторого m такая, что факторгруппа $C = A/B$ является прямой суммой конечного числа групп вида $\mathbb{Z}(p^\infty)$. В частности, порядки элементов C могут делиться лишь на конечный список различных простых $p_1,\ldots,p_s$.*

Понятно, что внутренняя модель, индуцируемая интерпретацией **PrA**, является не абелевой группой, а лишь моноидом, поскольку ни один из элементов, кроме нуля, не наделен аддитивным обратным. Однако это легко исправить, введя отрицательные числа отдельно и определив покомпонентное сложение. Тем самым, всякая интерпретация **PrA** в $\mathbf{BA}_n$ на самом деле порождает интерпретацию соответствующей абелевой группы.

Лемма 2.1. *Пусть* **PrA** *интерпретируется в* $\mathbf{BA}_n$ *посредством интерпретации* ι. *Тогда она продолжается до интерпретации упорядоченной абелевой группы таким образом, что интерпретация* **PrA** *соответствует неотрицательным целым числам.*

3. ТЕОРЕМА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Лемма 3.1. *Пусть* ι *— интерпретация* **PrA** *в стандартной модели* $\mathbb{N}$ *арифметики Бюхи* $\mathbf{BA}_n$. *Тогда внутренняя модель* $\mathcal{A}$, *индуцированная* ι, *изоморфна тождественной.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть ι — такая интерпретация **PrA**, что внутренняя модель нестандартна. Поскольку $\mathbb{N}$ счетна, по теореме 2.1 получаем, что порядковый тип внутренней модели равен $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$.

Применяя лемму 2.1, можем перейти к интерпретации ι' упорядоченной абелевой группы $\mathcal{B}$, порядковый тип которой изоморфен $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$.

Поскольку порядковый тип упорядоченной абелевой группы $\mathcal{B}$ равен $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$, можно рассматривать галактики, т.е. множества вида $[c] := \{d \in \mathcal{B} \mid |c - d|$ – стандартное натуральное число$\}$. В частности, стандартные целые числа являются одной из галактик, а именно содержащей нуль (нейтральный элемент $\mathcal{B}$). Стандартным образом, по аналогии с доказательством теоремы 2.1, устанавливается следующая

Лемма 3.1. *Сложение на галактиках* $[c + d] := [c] + [d]$, *а также порядок* $[c] < [d] \overset{\text{def}}{=} c < d \wedge [c] \neq [d]$, *корректно определены.*

Иными словами, на множестве $\mathcal{B}/\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — стандартные целые числа, индуцируется структура группы, упорядоченной в соответствии с индуцированным порядком. Более того, выполнена следующая лемма:

Лемма 3.2. $\mathcal{B}/\mathbb{Z}$ *содержит подгруппу* Q, *изоморфную* $(\mathbb{Q}, +)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную положительную нестандартную галактику $[c]$. Мы определим изоморфизм $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathcal{B}/\mathbb{Z}$ следующим образом. Для всякого $n \in \mathbb{Z}$ положим $\varphi(n) := [nc]$. Согласно лемме 3.1, это корректно определенное вложение $\mathbb{Z}$ в $\mathcal{B}/\mathbb{Z}$.

Пусть теперь k/l — рациональное число. Зададим $\varphi(k/l)$ как такую галактику $[x]$, что $l \cdot x = kc + t$ для некоторого стандартного t. Поскольку в арифметике Пресбургера ровно одно из чисел kc, $kc + 1$, ..., $kc + l - 1$ всегда делится l, такие t и x всегда возможно подобрать. Теперь покажем, что определение $\varphi(k/l)$ корректно.

Класс $[x]$ *не зависит от выбора t.* В самом деле, пусть t и t' — разные стандартные числа, и $lx = kc + t$, $lx' = kc + t'$. Тогда $l(x - x') = (t - t')$ — стандартное число. Поэтому $x - x'$ стандартно, откуда $[x] = [x']$.

Класс $[x] = \varphi(k/l)$ *не зависит от представления* k/l. Пусть $k_1/l_1 = k_2/l_2$, т.е., $l_2 k_1 = l_1 k_2$, и $\varphi(k_i/l_i) = [x_i]$, $i = 1, 2$. Это означает, что $l_i \cdot x_i = k_i c + t_i$. Поэтому

$$l_1 l_2 (x_1 - x_2) = (l_2 k_1 - l_1 k_2) c + (l_2 t_1 - l_1 t_2) = l_2 t_1 - l_1 t_2.$$

Поскольку $l_2 t_1 - l_1 t_2$ стандартно, $x_1 - x_2$ тоже стандартно, и $[x_1] = [x_2]$.

Сложение согласовано со сложением на $\mathbb{Q}$. Пусть $k_1/l_1, k_2/l_2 \in \mathbb{Q}$, и $\varphi(k_i/l_i) = [x_i]$, $i = 1, 2$. В $\mathbb{Q}$ мы имеем $k_1/l_1 + k_2/l_2 = (k_1 l_2 + k_2 l_1)/l_1 l_2$. Пусть y — такой элемент $\mathcal{B}/\mathbb{Z}$, что для некоторого t выполнено $l_1 l_2 y = k_1 l_2 c + k_2 l_1 c + t$. Требуется показать, что $[x_1] + [x_2] = [y]$. Запишем $l_i \cdot x_i = k_i c + t_i$. Умножая равенства на l_2 и l_1 соответственно и складывая, получаем

$$l_1 l_2 (x_1 + x_2) = k_1 l_2 c + k_2 l_1 c + (l_1 t_2 + l_2 t_1).$$

Следовательно, $y - (x_1 + x_2) = t - (l_1 t_2 + l_2 t_1)$, что является стандартным числом φ *инъективно.* Пусть $k_1/l_1 \neq k_2/l_2$, $\varphi(k_i/l_i) = [x_i]$, $i = 1, 2$. Нужно показать, что $[x_1] \neq [x_2]$. Предположим, что $[x_1] = [x_2]$. Тогда $x_1 - x_2$ стандартно. Но в таком случае $[0] = [x_1 - x_2] = \varphi(k_1/l_1 - k_2/l_2)$, где $k_1/l_1 - k_2/l_2$ — ненулевое рациональное число. По определению это означает, что $0 = (k_1 l_2 - l_1 k_2) c + t$ для некоторого t. Но t — стандартно, а $(k_1 l_2 - l_1 k_2) c$ — нет, поэтому указанное равенство невозможно. Доказательство леммы завершено.

Вернемся к доказательству Теоремы 3.1 и покажем, что $\mathcal{B}$ не может быть автоматной. Предположим противное: пусть $\mathcal{B}$ автоматна. Тогда она удовлетворяет условиям Теоремы 2.2. Таким образом, в $\mathcal{B}$ существует подгруппа $\mathcal{E}$, изоморфная $\mathbb{Z}^m$, такая, что $\mathcal{F} = \mathcal{B}/\mathcal{E}$ — группа кручения, и порядки всех ее элементов делятся только на простые из списка $p_1, \ldots, p_s$. Мы покажем, что это противоречит лемме 3.2 о существовании подгруппы $Q \subseteq \mathcal{B}/\mathbb{Z}$, изоморфной $\mathbb{Q}$. Далее под $\mathbb{Z}$ понимается конкретная подгруппа стандартных целых чисел в $\mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{G} = \langle \mathbb{Z}, \mathcal{E} \rangle$ – подгруппа $\mathcal{B}$, порожденная $\mathbb{Z}$ и $\mathcal{E}$, и $\pi : \mathcal{B}/\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{G}$ – естественный сюръективный гомоморфизм, переводящий всякий из классов эквивалентности в содержащий его класс из $\mathcal{B}/\mathcal{G}$. Рассмотрев цепочку сюръективных гомоморфизмов $\mathcal{B} \xrightarrow{\rho} \mathcal{B}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}/\mathcal{G}$, мы видим, что $\mathcal{G} = Ker(\pi \circ \rho) = \rho^{-1}(Ker(\pi))$, откуда $Ker(\pi) = \mathcal{G}/\mathbb{Z}$.

Теперь установим образ Q под действием π. В общем случае, если имеется сюръективный гомоморфизм между группами $\sigma : A \twoheadrightarrow B$ и S – подгруппа A, то выполнено $\sigma(S) \cong S/(S \cap Ker(\sigma))$. В самом деле, два элемента $a, b \in S$ попадают в один и тот же класс $S/(S \cap Ker(\sigma))$ тогда и только тогда, когда $(a - b) \in Ker(\sigma)$, что эквивалентно $\sigma(a) = \sigma(b)$. В нашем случае, находим, что $\pi(Q) \cong Q/(Q \cap Ker(\pi)) = Q/(Q \cap \mathcal{G}/\mathbb{Z})$.

Группа $\mathcal{G}/\mathbb{Z}$ конечно порождена как фактор-группа конечно порожденной. Она не обязательно свободна, но, согласно теореме о классификации конечно порожденных абелевых групп, может быть представлена в виде прямой суммы $\mathbb{Z}^r$ для некоторого r и компонента кручения $T = \mathbb{Z}_{q_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{q_t}$. Поскольку $Q \cap T = \{0\}$, имеем $Q/(Q \cap \mathcal{G}/\mathbb{Z}) \cong Q/\mathbb{Z}^r$. Следующая лемма показывает, что $Q/\mathbb{Z}^r$ изоморфно $Q/h\mathbb{Z}$ для некоторого рационального h:

Лемма 3.3. *Множество, порожденное в* $(\mathbb{Q}, +)$ *набором элементов*

$$\{(k_1/l_1, \ldots, k_r/l_r) \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\},$$

изоморфно $\mathbb{Z}$ *и может быть порождено единственным* $d/(l_1 \ldots l_r)$, *где* $d :=$ НОД$(k_1 l_2 l_3 \ldots l_r, l_1 k_2 l_3 \ldots l_r, \ldots, l_1 l_2 \ldots k_r)$.

Доказательство. Приведем дроби к общему знаменателю:

$$k_i/l_i = (l_1 \ldots k_i \ldots l_r)/(l_1 \ldots l_r).$$

Для d из формулировки леммы согласно алгоритму Евклида существует представление в виде линейной комбинации $a_1 \cdot k_1 l_2 l_3 \ldots l_r + a_2 \cdot l_1 k_2 l_3 \ldots l_r + \ldots + a_r \cdot l_1 l_2 \ldots k_r = d$, причем любая линейная комбинация с другими коэффициентами равна кратному d. Поэтому $a_1 \cdot k_1/l_1 + \ldots + a_r \cdot k_r/l_r = d/(l_1 \ldots l_r)$, и всякая прочая линейная комбинация равна кратному $d/(l_1 \ldots l_r)$.

Итак, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}^r = \mathbb{Q}/h\mathbb{Z}$, где $h := d \,/\, (l_1 \ldots l_r)$ найдено в доказательстве Леммы 3.3. Пусть q – простое, отсутствующее в списке $p_1, \ldots, p_s$. Тогда элемент $[h/q] \in Q/(Q \cap \mathcal{G}/\mathbb{Z}) \subseteq \mathcal{B}/\mathcal{G}$ имеет в точности порядок q. Однако, поскольку $\mathcal{F} = \mathcal{B}/\mathcal{E}$ является группой кручения с ограничением на порядки элементов, это же выполнено и для $\mathcal{B}/\mathcal{G}$, где отождествлено больше элементов. Следовательно, мы указали элемент $\mathcal{B}/\mathcal{G}$ с порядком, разложение которого не ограничено $p_1, \ldots, p_s$. Противоречие с Теоремой 2.2.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен Л.Д. Беклемишеву за предложение темы для исследования и многочисленные полезные обсуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Büchi J.R.* Weak second-order arithmetic and finite automata // Mathematical Logic Quarterly. 1960. V. 6. № 1–6. P. 66–92. https://doi.org/10.1002/malq.19600060105
2. *Bruyère V.* Entiers et automates finis // Mémoire de fin d’études, Université de Mons (1985).
3. *Bruyère V. et al.* Logic and p-recognizable sets of integers // Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin. 1994. V. 1. № 2. P. 191–238. https://doi.org/10.36045/bbms/1103408547
4. *Cobham A.* On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata // Mathematical systems theory. 1969. V. 3. № 2. P. 186–192. https://doi.org/10.1007/BF01746527
5. *Семёнов А.Л.* Пресбургеровость предикатов, регулярных в двух системах счисления // Сибирский математический журнал. 1977. Т. 18. № 2. С. 403–418. https://doi.org/10.1007/BF00967164
6. *Presburger M.* Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt // Comptes Rendus du I congrès de Mathématiciens des Pays Slaves 92–101, 1929.
7. *Pakhomov F., Zapryagaev A.* Multi-dimensional interpretations of Presburger arithmetic in itself // Journal of Logic and Computation. 2020. V. 30. № 8. P. 1681–1693. https://doi.org/10.1093/logcom/exaa050
8. *Tarski A., Mostowski A., Robinson R.M.* Undecidable theories. North-Holland, 1953. 98 p.
9. *Braun G., Strüngmann L.* Breaking up finite automata presentable torsion-free abelian groups // International Journal of Algebra and Computation. 2011. V. 21. № 08. P. 1463–1472. https://doi.org/10.1142/S0218196711006625

ON INTERPRETATIONS OF PRESBURGER ARITHMETIC IN BÜCHI ARITHMETICS

A. A. Zapryagaev[a]

[a] *National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS L.D. Beklemishev

Büchi arithmetics $\mathbf{BA}_n$, $n \geq 2$, are extensions of Presburger arithmetic with an unary functional symbol $V_n(x)$ denoting the largest power of n that divides x. Definability of a set in $\mathbf{BA}_n$ is equivalent to its recognizability by a finite automaton receiving numbers in their n-ary expansion. We consider the interpretations of Presburger Arithmetic in the standard model of $\mathbf{BA}_n$ and show that each such interpretation has an internal model isomorphic to the standard one. This answers a question by A. Visser on the interpretations of certain weak arithmetical theories in themselves.

Keywords: formal arithmetics, interpretations, automatic structures, automatic abelian groups