ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 510, с. 18–22

МАТЕМАТИКА

УДК 511.4

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПЕРЕНОСА МАЛЕРА ДЛЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

© 2023 г. О. Н. Герман[1,2,*]

Представлено академиком РАН А.Л. Семёновым
Поступило 04.01.2023 г.
После доработки 13.01.2023 г.
Принято к публикации 07.03.2023 г.

Теоремы переноса Хинчина и Дайсона можно легко вывести из теоремы переноса Малера. В мультипликативной же постановке возникает препятствие, не позволяющее получить мультипликативную теорему переноса непосредственно из теоремы Малера. Требуются некоторые дополнительные соображения, например, индукция по размерности. В данной работе мы предлагаем аналог теоремы Малера, из которого мультипликативная теорема переноса следует мгновенно.

Ключевые слова: мультипликативные диофантовы приближения, мультипликативные диофантовы экспоненты, принцип переноса, теорема Малера

DOI: 10.31857/S2686954323600015, **EDN:** XHRKPY

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим матрицу

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix}, \quad \theta_{ij} \in \mathbb{R}, \quad m + n \geq 3,$$

и систему линейных уравнений

$$\Theta\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

с переменными $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Одним из основных вопросов теории диофантовых приближений является вопрос о том, насколько малым может быть вектор $\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}$ при $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ пробегающих независимо друг от друга $\mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbb{Z}^n$ соответственно. Существует несколько классических способов измерения “величины” вектора. Можно выбрать норму, например, sup-норму, можно ее несколько видоизменить, превратив ее в так называемую взвешенную норму, или можно рассмотреть произведение модулей координат вектора. Для каждой подобной постановки задачи существуют *теоремы переноса* – утверждения, отражающие связь аппроксимационных свойств матрицы Θ и матрицы $\Theta^\top$. Они обычно формулируются в терминах *диофантовых экспонент*, которые являются, возможно, простейшими количественными характеристиками, отвечающими за аппроксимационные свойства.

Для каждого натурального k и $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^k$ положим

$$|\mathbf{z}| = \max_{1 \leq i \leq k} |z_i|, \quad \Pi(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i \leq k} |z_i|^{1/k},$$
$$\Pi'(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i \leq k} \max(1, |z_i|)^{1/k}.$$

Определение 1. *Супремум вещественных чисел γ, таких что существует сколь угодно большое t, при котором система неравенств*

$$|\mathbf{x}| \leq t, \quad |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq t^{-\gamma} \tag{1}$$

имеет решение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$ с ненулевым $\mathbf{x}$, называется *диофантовой экспонентой* матрицы Θ и обозначается $\omega(\Theta)$.

Определение 2. *Супремум вещественных чисел γ, таких что существует сколь угодно большое t, при котором система неравенств*

$$\Pi'(\mathbf{x}) \leq t, \quad \Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq t^{-\gamma} \tag{2}$$

имеет решение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$ с ненулевым $\mathbf{x}$, называется *мультипликативной диофантовой экспонентой* матрицы Θ и обозначается $\omega_\times(\Theta)$.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**E-mail: german.oleg@gmail.com*

Для каждого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$ справедливо

$$\Pi(\mathbf{z}) \le |\mathbf{z}|,$$

а для каждого $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^k$ справедливо

$$|\mathbf{z}|^{1/k} \le \Pi'(\mathbf{z}) \le |\mathbf{z}|.$$

Стало быть,

$$m/n \le \omega(\Theta) \le \omega_\times(\Theta) \le \begin{cases} m\omega(\Theta) & \text{при} \quad n = 1 \\ +\infty & \text{при} \quad n \ge 2 \end{cases}, \quad (3)$$

где первое неравенство следует из теоремы Минковского о выпуклом теле.

Неравенства (3) можно назвать тривиальными. Теоремы переноса, упомянутые выше, дают следующие нетривиальные неравенства:

$$\omega(\Theta^\intercal) \ge \frac{n\omega(\Theta) + n - 1}{(m-1)\omega(\Theta) + m} \quad (4)$$

и

$$\omega_\times(\Theta^\intercal) \ge \frac{n\omega_\times(\Theta) + n - 1}{(m-1)\omega_\times(\Theta) + m}. \quad (5)$$

Неравенство (4) принадлежит Дайсону [1], неравенство (5) было доказано автором в работе [2]. Можно заметить, что эти неравенства выглядят одинаково, однако, в их доказательствах имеется существенное отличие. Неравенство Дайсона следует непосредственно из теоремы переноса Малера (см. [3, 4], а также [5, 6]), тогда как неравенство для мультипликативных экспонент, наряду с теоремой Малера, требует привлечения индукции по n. Грубо говоря, причина заключается в том, что функционалы $\Pi(\cdot)$ и $\Pi'(\cdot)$ отличаются друг от друга.

Цель данной работы – найти аналог теоремы переноса Малера, из которого неравенство (5) выводится столь же непосредственно, как из классической теоремы Малера выводится (4).

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. В параграфе 2 мы формулируем теорему Малера и показываем, как из нее выводится неравенство Дайсона. В параграфе 3 мы формулируем и доказываем основной результат данной статьи. В параграфе 4 мы выводим из нашего результата неравенство (5).

2. ТЕОРЕМА МАЛЕРА И НЕРАВЕНСТВО ДАЙСОНА

Положим

$$d = m + n.$$

В своей оригинальной работе [7] Малер сформулировал свою знаменитую теорему в терминах билинейных форм с целыми коэффициентами (см. также [3] и [6])). В работе [6] теорема Малера проинтерпретирована в терминах псевдоприсоединенных параллелепипедов и двойственных решеток. Нам представляется, что эта интерпретация более удобна для приложений. Псевдоприсоединенный параллелепипед – понятие, предложенное в книге Шмидта [4], оно является некоторым упрощением того, что Малер в своих работах [8, 9] называет $(d-1)$-м присоединенным телом для параллелепипеда.

Определение 3. *Пусть заданы положительные вещественные числа* $\eta_1, \ldots, \eta_d$. *Рассмотрим параллелепипед*

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, |z_i| \le \eta_i, i = 1, \ldots, d\}. \quad (6)$$

Параллелепипед

$$\mathcal{P}^* = \left\{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, |z_i| \le \frac{1}{\eta_i} \prod_{j=1}^{d} \eta_j, \; i = 1, \ldots, d\right\}$$

называется псевдоприсоединенным для $\mathcal{P}$.

Напомним, что, если Λ – решетка полного ранга в $\mathbb{R}^d$, ее двойственная решетка Λ^* определяется как

$$\Lambda^* = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle \in \mathbb{Z} \text{ для каждого } \mathbf{z}' \in \Lambda\},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение.

Следующая версия теоремы переноса Малера предложена в работе [6].

Теорема 1. *Пусть* Λ *– решетка полного ранга в* $\mathbb{R}^d$ *с определителем* 1. *Пусть* $\mathcal{P}$ *– параллелепипед с центром в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям. Тогда*

$$\mathcal{P}^* \cap \Lambda^* \ne \{\mathbf{0}\} \Rightarrow c\mathcal{P} \cap \Lambda \ne \{\mathbf{0}\},$$

где $c = (\sqrt{d})^{1/(d-1)}$.

Теорема 1 на самом деле является некоторым усилением оригинальной теоремы Малера. Малер формулировал свою теорему с константой $d-1$ вместо c. Отметим, однако, что с точки зрения диофантовых экспонент годится любая константа (зависящая лишь от d).

Покажем, как неравенство (4) выводится из Теоремы 1. Напомним, что $d = m + n$.

Рассмотрим решетки

$$\Lambda = \Lambda(\Theta) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d, \quad \Lambda^* = \Lambda^*(\Theta) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\intercal \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d. \quad (7)$$

Ясно, что решетка Λ^* является двойственной к Λ. Далее, для каждых положительных t, γ, s, δ определим параллелепипеды

$$\mathcal{P}(t,\gamma) = \\ = \left\{ \mathbf{z} = (z_1,\ldots,z_d) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \begin{array}{l} |z_j| \le t,\, j = 1,\ldots,m \\ |z_{m+i}| \le t^{-\gamma}, i = 1,\ldots,n \end{array} \right\}, \quad (8)$$

$$\mathcal{Q}(s,\delta) = \\ = \left\{ \mathbf{z} = (z_1,\ldots,z_d) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \begin{array}{l} |z_j| \le s^{-\delta},\, j = 1,\ldots,m \\ |z_{m+i}| \le s, i = 1,\ldots,n \end{array} \right\}. \quad (9)$$

Тогда

$$\omega(\Theta) = \sup\left\{\gamma \ge \frac{m}{n} \,\middle|\, \forall t_0 \in \mathbb{R}\ \exists t > t_0 \colon \mathcal{P}(t,\gamma) \cap \Lambda \ne \{\mathbf{0}\}\right\},$$

$$\omega(\Theta^{\intercal}) = \\ = \sup\left\{\delta \ge \frac{n}{m} \,\middle|\, \forall s_0 \in \mathbb{R}\ \exists s > s_0 \colon \mathcal{Q}(s,\delta) \cap \Lambda^* \ne \{\mathbf{0}\}\right\}. \quad (10)$$

Если t, γ, s, δ связаны соотношениями

$$t = s^{((n-1)\delta+n)/(d-1)}, \quad \gamma = \frac{m\delta + m - 1}{(n-1)\delta + n}, \quad (11)$$

то параллелепипед $\mathcal{Q}(s,\delta)$ является псевдоприсоединенным для $\mathcal{P}(t,\gamma)$, т.е. $\mathcal{Q}(s,\delta) = \mathcal{P}(t,\gamma)^*$. По Теореме 1 получаем, что

$$\mathcal{Q}(s,\delta) \cap \Lambda^* \ne \{\mathbf{0}\} \Rightarrow c\mathcal{P}(t,\gamma) \cap \Lambda \ne \{\mathbf{0}\}.$$

Стало быть, ввиду (10),

$$\omega(\Theta^{\intercal}) \ge \delta \Rightarrow \omega(\Theta) \ge \gamma = \frac{m\delta + m - 1}{(n-1)\delta + n}.$$

Таким образом,

$$\omega(\Theta) \ge \frac{\omega(m\Theta^{\intercal}) + m - 1}{(n-1)\omega(\Theta^{\intercal}) + n}.$$

Меняя тройку (Θ, m, n) на $(\Theta^{\intercal}, n, m)$, приходим к неравенству (4).

3. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МАЛЕРА

Для каждого набора $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1,\ldots,\mu_n) \in \mathbb{R}_+^d$ определим параллелепипед $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ как

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \\ = \left\{ \mathbf{z} = (z_1,\ldots,z_d) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \begin{array}{l} |z_j| \le \lambda_j, j = 1,\ldots,m \\ |z_{m+i}| \le \mu_i, i = 1,\ldots,n \end{array} \right\}. \quad (12)$$

Положим также

$$\begin{aligned} \lambda_j^* &= \lambda_j^{-1} \prod_{k=1}^{m} \lambda_k \prod_{k=1}^{n} \mu_k, \quad j = 1,\ldots,m, \\ \mu_i^* &= \mu_i^{-1} \prod_{k=1}^{m} \lambda_k \prod_{k=1}^{n} \mu_k, \quad i = 1,\ldots,n. \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно, что тогда $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})^* = \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$. Наконец, определим набор $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_m)$ следующим образом. Упорядочим элементы $\boldsymbol{\lambda}$ по возрастанию: $\lambda_{j_1} \le \ldots \le \lambda_{j_m}$. Если $\lambda_{j_1} \ge 1$, положим $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}$. Если же $\lambda_{j_1} < 1$, обозначим через p наибольший индекс, такой что $\lambda_{j_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{j_p} < 1$, и определим $\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_m$ как

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{j_i} &= 1, \quad i = 1,\ldots,p, \\ \hat{\lambda}_{j_i} &= \lambda_{j_i}(\lambda_{j_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{j_k})^{1/(m-p)}, \quad i = p+1,\ldots,m. \end{aligned} \quad (14)$$

Следующая теорема является главным результатом данной работы.

Теорема 2. *Пусть решетки* Λ *и* Λ^* *заданы соотношениями* (7). *Рассмотрим произвольные наборы* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \mathbb{R}_+^m$ *и* $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$. *Пусть*

$$\Pi(\boldsymbol{\lambda}) \ge 1. \quad (15)$$

Пусть наборы $\boldsymbol{\lambda}^*$, $\boldsymbol{\mu}^*$ *определены соотношениями* (13), *а набор* $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ *– соотношениями* (14). *Тогда*

$$\min_{1 \le j \le m} \hat{\lambda}_j \ge 1, \quad \Pi'(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \Pi(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \Pi(\boldsymbol{\lambda}) \quad (16)$$

и

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*) \cap \Lambda^* \ne \{\mathbf{0}\} \Rightarrow c_1\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}},\boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda \ne \{\mathbf{0}\}, \quad (17)$$

где $c_1 = (\sqrt{n+1})^{1/n}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_m.$$

Если $\lambda_1 \ge 1$, то $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}$, (16) очевидно, а (17) следует из теоремы 1 ввиду того, что $c \le c_1$. Предположим, что $\lambda_1 < 1$. Тогда p корректно определено и $p < m$, поскольку справедливо (15). Отсюда немедленно следует (16).

Рассмотрим укороченные наборы

$$\boldsymbol{\lambda}_{\downarrow} = (\lambda_{p+1},\ldots,\lambda_m), \quad \boldsymbol{\lambda}_{\downarrow}^* = (\lambda_{p+1}^*,\ldots,\lambda_m^*), \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\downarrow} = (\hat{\lambda}_{p+1},\ldots,\hat{\lambda}_m).$$

Тогда

$$\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\downarrow},\boldsymbol{\mu})^* = \\ = \left\{ (z_{p+1},\ldots,z_d) \in \mathbb{R}^{d-p} \,\middle|\, \begin{array}{l} |z_j| \le \varkappa\lambda_j^*, j = p+1,\ldots,m \\ |z_{m+i}| \le \mu_i^*, i = 1,\ldots,n \end{array} \right\},$$

где $\varkappa = (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_p)^{-1/(m-p)}$. Поскольку $\varkappa > 1$, справедливо

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}_{\downarrow}^*,\boldsymbol{\mu}^*) \subset \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\downarrow},\boldsymbol{\mu})^*. \quad (18)$$

Рассмотрим также матрицу

$$\Theta_{\downarrow} = \begin{pmatrix} \theta_{1\,p+1} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n\,p+1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix},$$

полученную из матрицы Θ удалением первых p столбцов, и решетки

$$\Lambda_{\downarrow} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-p} & \\ -\Theta_{\downarrow} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^{d-p}, \quad \Lambda_{\downarrow}^{*} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-p} & \Theta_{\downarrow}^{\intercal} \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^{d-p}.$$

Сделаем два ключевых наблюдения: во-первых, множество

$$\{(0,\ldots,0,z_{p+1},\ldots,z_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, (z_{p+1},\ldots,z_d) \in \Lambda_{\downarrow}\}$$

является подрешеткой решетки Λ; во-вторых, множество

$$\{(0,\ldots,0,z_{p+1},\ldots,z_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, (z_{p+1},\ldots,z_d) \in \Lambda_{\downarrow}^{*}\}$$

является ортогональной проекцией решетки Λ^* на плоскость координат $z_{p+1},\ldots,z_d$. Отсюда получаем, что

$$\begin{gathered} \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}_{\downarrow}^*,\boldsymbol{\mu}^*) \cap \Lambda_{\downarrow}^* \neq \{\mathbf{0}\}, \\ \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\downarrow},\boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda_{\downarrow} \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}},\boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}. \end{gathered} \tag{19}$$

Наконец, по Теореме 1

$$\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\downarrow},\boldsymbol{\mu})^* \cap \Lambda_{\downarrow}^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow c_2\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\downarrow},\boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda_{\downarrow} \neq \{\mathbf{0}\}, \tag{20}$$

где $c_2 = (\sqrt{d-p})^{1/(d-p-1)}$. Собирая вместе (18)–(20) и учитывая тот факт, что $c_2 \le c_1$, получаем следующую цепочку импликаций:

$$\begin{gathered} \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}_{\downarrow}^*,\boldsymbol{\mu}^*) \cap \Lambda_{\downarrow}^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\downarrow},\boldsymbol{\mu})^* \cap \Lambda_{\downarrow}^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \\ \Rightarrow c_2\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\downarrow},\boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda_{\downarrow} \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \\ \Rightarrow c_2\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}},\boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow c_1\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}},\boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}, \end{gathered}$$

откуда и следует (17).

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО НЕРАВЕНСТВА ПЕРЕНОСА

Покажем, как вывести неравенство (5) из Теоремы 2. Для каждых положительных t, γ, s, δ определим следующие два семейства параллелепипедов:

$$\mathcal{F}(t,\gamma) = \{\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \,|\, \Pi(\boldsymbol{\lambda}) = t, \Pi(\boldsymbol{\mu}) = t^{-\gamma}, \min_{1\le j\le m}\lambda_j \ge 1\},$$

$$\mathcal{G}(s,\delta) = \{\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \,|\, \Pi(\boldsymbol{\lambda}) = s^{-\delta}, \Pi(\boldsymbol{\mu}) = s, \min_{1\le i\le n}\mu_i \ge 1\}.$$

Каждый параллелепипед $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$, удовлетворяющий условиям

$$\Pi'(\boldsymbol{\lambda}) \le t, \quad \Pi(\boldsymbol{\mu}) \le t^{-\gamma}, \tag{21}$$

содержится в некотором параллелепипеде из семейства $\mathcal{F}(t,\gamma)$. Наоборот, каждый параллелепипед $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ из семейства $\mathcal{F}(t,\gamma)$ удовлетворяет условиям (21). Аналогично, каждый параллелепипед $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$, удовлетворяющий условиям

$$\Pi(\boldsymbol{\lambda}) \le s^{-\delta}, \quad \Pi'(\boldsymbol{\mu}) \le s, \tag{22}$$

содержится в некотором параллелепипеде из семейства $\mathcal{G}(s,\delta)$. И наоборот, каждый параллелепипед $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ из семейства $\mathcal{G}(s,\delta)$ удовлетворяет условиям (22). Таким образом, для мультипликативных экспонент справедлив следующий аналог равенств (10):

$$\begin{aligned} \omega_{\times}(\Theta) = \sup\Big\{\gamma \ge \frac{m}{n} \,\Big|\, &\forall t_0 \in \mathbb{R}\ \exists t > t_0: \\ &\exists \mathcal{P} \in \mathcal{F}(t,\gamma): \mathcal{P} \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}\Big\}, \\ \omega_{\times}(\Theta^{\intercal}) = \sup\Big\{\delta \ge \frac{n}{m} \,\Big|\, &\forall s_0 \in \mathbb{R}\ \exists s > s_0: \\ &\exists \mathcal{P} \in \mathcal{G}(s,\delta): \mathcal{P} \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\}\Big\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Предположим опять, что t, γ, s, δ связаны соотношениями (11). Рассмотрим произвольный параллелепипед $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$, такой что $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*) \in \mathcal{G}(s,\delta)$. Тогда

$$\Pi(\boldsymbol{\lambda}) = t, \quad \Pi(\boldsymbol{\mu}) = t^{-\gamma}.$$

Мы не можем гарантировать, что в наборе $\boldsymbol{\lambda}$ нет компонент, строго меньших 1, поэтому, вообще говоря, неверно, что $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{F}(t,\gamma)$. Тем не менее, если $t \ge 1$, по теореме 2 справедливо $\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}},\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{F}(t,\gamma)$ и, более того,

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow c_1\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}},\boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Стало быть, ввиду (23)

$$\omega_{\times}(\Theta^{\intercal}) \ge \delta \Rightarrow \omega_{\times}(\Theta) \ge \gamma = \frac{m\delta + m - 1}{(n-1)\delta + n}.$$

Таким образом,

$$\omega_{\times}(\Theta) \ge \frac{\omega_{\times}(m\Theta^{\intercal}) + m - 1}{(n-1)\omega_{\times}(\Theta^{\intercal}) + n}.$$

Меняя тройку (Θ, m, n) на $(\Theta^{\intercal}, n, m)$, приходим к неравенству (5).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00079, https://rscf.ru/project/22-21-00079/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dyson F.J. On simultaneous Diophantine approximations* // Proc. London Math. Soc. 1947. V. 49. № 2. P. 409–420.
2. German O.N. *Transference inequalities for multiplicative Diophantine exponents* // Труды МИРАН. 2011. Т. 275. С. 227–239.
3. *Касселс Дж.В.С. Введение в теорию диофантовых приближений.* М.: ИИЛ, 1961.
4. *Шмидт В. Диофантовы приближения.* М.: “Мир”, 1983.
5. *German O.N. On Diophantine exponents and Khintchine's transference principle* // Moscow J. Comb. Number Theory. 2012. V. 2. № 2. P. 22–51.
6. *Герман О.Н., Евдокимов К.Г. Усиление теоремы переноса Малера* // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79. № 1. С. 63–76.
7. *Mahler K. Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen* // Čas. Pešt. Mat. Fys. 1939. V. 68. P. 85–92.
8. *Mahler K. On compound convex bodies, I.* Proc. London Math. Soc. 1955. V. 5. № 3. P. 358–379.
9. *Mahler K. On compound convex bodies. II.* Proc. London Math. Soc. 1955. V. 5. № 3. P. 380–384.

AN ANALOGUE OF MAHLER'S TRANSFERENCE THEOREM FOR MULTIPLICATIVE DIOPHANTINE APPROXIMATION

O. N. German[a,b]

[a] *Moscow Lomonosov State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

Khintchine's and Dyson's transference theorems can be very easily deduced from Mahler's transference theorem. In the multiplicative setting an obstacle appears, which does not allow deducing the multiplicative transference theorem immediately from Mahler's theorem. Some extra considerations are required, for instance, induction by the dimension. In this paper we propose an analogue of Mahler's theorem which implies the multiplicative transference theorem immediately.

Keywords: multiplicative Diophantine approximation, multiplicative Diophantine exponents, transference principle, Mahler's theorem