ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 510, с. 29–32

МАТЕМАТИКА

УДК 511.36

ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ *p*-АДИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ТРАНСЦЕНДЕНТНЫМИ ПОЛИАДИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2023 г. В. Г. Чирский[1,*]

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 18.01.2023 г.
После доработки 19.03.2023 г.
Принято к публикации 25.03.2023 г.

Устанавливается, что если $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ – полиадические числа Лиувилля, а число ξ – натуральное или Ξ – полиадическое число Лиувилля и если $\Psi_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_m)_n z^n$, $\Psi_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1+1)_n\ldots(\alpha_m+1)_n z^n$, то существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле p – адических чисел хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\xi)$, $\Psi_1(\xi)$ (соответственно, $\Psi_0(\Xi)$, $\Psi_1(\Xi)$) – трансцендентное.

Ключевые слова: полиадические числа Лиувилля, трансцендентные p – адические числа
DOI: 10.31857/S2686954323600039, **EDN:** XHSLUS

Рассмотрим формальные обобщенные гипергеометрические ряды

$$F_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n\ldots(\beta_s)_n}z^n,$$
$$F_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1+1)_n\ldots(\alpha_r+1)_n}{(\beta_1+1)_n\ldots(\beta_s+1)_n}z^n,$$

где символ Похгаммера $(\gamma)_n$ определяется равенствами $(\gamma)_0=1$, $(\gamma)_n=\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)$ при $n\geq 1$. Имеет место очевидное формальное тождество

$$F_0(z)=1+\frac{\alpha_1\ldots\alpha_r}{\beta_1\ldots\beta_s}zF_1(z), \tag{1}$$

из которого следует, что если все числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, $\beta_1,\ldots,\beta_s$ и число ξ – алгебраические и если ряды $F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$ – сходятся, то либо оба числа $F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$ являются алгебраическими, либо оба они – трансцендентные числа. Если же число $\frac{\alpha_1\ldots\alpha_r}{\beta_1\ldots\beta_s}\xi$ является трансцендентным и $F_1(\xi)\neq 0$, то из соотношения (1) следует, что хотя бы одно из чисел $F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$ – трансцендентное. Эти замечания относятся как к случаю поля комплексных чисел, так и к любому алгебраическому расширению любого поля p – адических чисел. Таким образом, если в поле p – адических чисел удастся доказать, что $F_1(\xi)\neq 0$, то из соотношения (1) следует, что хотя бы одно из чисел $F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$ – трансцендентное p – адическое число.

В работе рассматриваются ряды

$$\Psi_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_m)_n z^n,$$
$$\Psi_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1+1)_n\ldots(\alpha_m+1)_n z^n \tag{2}$$

и с использованием результатов из [1] устанавливается, что если $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ – полиадические числа Лиувилля, а число ξ – натуральное или Ξ – полиадическое число, то существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле p – адических чисел хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\xi)$, $\Psi_1(\xi)$ (соответственно, $\Psi_0(\Xi)$, $\Psi_1(\Xi)$) – трансцендентное.

Следует отметить, что исследование арифметической природы значений гипергеометрических рядов в комплексной области является классической задачей и в этом направлении получено большое количество результатов (см., например, [2–8]). Однако в p – адических областях ситуация иная. Ранее удавалось лишь доказать бесконечную трансцендентность или бесконечную линейную независимость значений таких рядов (см. [9–14]).

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: vgchirskii@yandex.ru*

Бесконечная трансцендентность ряда означала, что для любого ненулевого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что при подстановке в этот многочлен значения рассматриваемого ряда в поле p — адических чисел, получится отличное от нуля p — адическое число. Это не означает даже иррациональности значения этого ряда в конкретном поле p — адических чисел. Так что доказываемые ниже теоремы, по-видимому, представляют собой первый результат о трансцендентности значений обобщенных гипергеометрических рядов в поле p — адических чисел.

Перейдем к точным формулировкам. Результат является следствием теорем, доказанных в [1] с использованием аппроксимаций Эрмита-Паде из работы [15], поэтому напомним использованные обозначения и основные определения.

Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p — адических чисел по всем простым числам p. Каноническое представление элемента θ кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда $\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}$, $0 \le a_n \le n$. Этот ряд сходится по всем полям p — адических чисел. Поэтому его можно рассматривать как бесконечномерный вектор, координаты которого в соответствующем кольце целых p — адических чисел обозначаем $\theta^{(p)}$. Основы теории полиадических чисел изложены в [16].

Будем обозначать символом $\operatorname{ord}_p a$ степень, в которой простое число p входит в разложение рационального числа a на простые множители и полагаем $|a|_p = p^{-\operatorname{ord}_p a}$.

Будем называть полиадическое число θ *полиадическим числом Лиувилля* (или *лиувиллевым полиадическим числом*), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству $p \le P$, выполнено неравенство $|\theta - A|_p < A^{-n}$. Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля p — адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Пусть λ_0 — произвольное натуральное число. Положим $s_0 = [\exp\lambda_0] + 1$. Пусть λ_1 — произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \le s_0 + 2\lambda_0^2$ выполняется неравенство $\operatorname{ord}_p \lambda_1 \ge m s_0 \ln s_0$ и пусть $s_1 = [\exp\lambda_1] + 1$.

При $k \ge 1$ пусть λ_{k+1} — произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \le s_k + 2\lambda_k^2$ выполняется неравенство

$$\operatorname{ord}_p \lambda_{k+1} \ge m s_k \ln s_k \tag{3}$$

и пусть

$$s_{k+1} = [\exp\lambda_{k+1}] + 1. \tag{4}$$

Пусть $\mu_{i,0}$, $i = 1,\ldots,m$ — натуральные числа. Пусть для любых $i = 1,\ldots,m$, $k \ge 1$, числа $\mu_{i,k}$ — неотрицательные целые и удовлетворяют неравенству

$$\mu_{i,k} \le \lambda_k. \tag{5}$$

Пусть $\alpha_i = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_{i,l}\lambda_l$, $i = 1,\ldots,m$. Если при некотором k для всех $l \ge k$ выполняются равенства $\mu_{i,l} = 0$, то α_i — натуральное число. В любом другом случае этот ряд представляет собой полиадическое число Лиувилля и пусть хотя бы одно из чисел $\alpha_i, i = 1,\ldots,m$, является полиадическим числом Лиувилля.

Пусть M — натуральное число. Рассмотрим приведенную систему вычетов по $\operatorname{mod}(M)$. Как обычно, число элементов этой системы обозначается $\varphi(M)$, где $\varphi(M)$ – функция Эйлера. Пусть произвольным образом выбраны ρ различных элементов a_1, ..., a_ρ этой приведенной системы вычетов. Будем обозначать $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho$ множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями $a_1 + Mk$, $k \in \mathbb{Z}$. Используя стандартное обозначение $\mathbf{P}$ для множества простых чисел, будем обозначать $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho)$ множество простых чисел, входящих в объединение множеств $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho$. Пусть $\varphi(M) > m + 1$.

Теорема 1. *Пусть M, ρ — натуральные числа. Пусть $(m+1)\rho > \varphi(M)m$. Тогда для любого натурального числа ξ существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho)$ таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\xi)$, $\Psi_1(\xi)$ — трансцендентное.*

Пусть натуральные числа μ_k удовлетворяют при любом k неравенству $\mu_k \le \lambda_k$.

Пусть $\Xi = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l \lambda_l$.

Теорема 2. *Пусть M, ρ — натуральные числа. Пусть $(m+1)\rho > \varphi(M)m$. Тогда существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho)$ таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\Xi)$, $\Psi_1(\Xi)$ – трансцендентное.*

Доказательства обеих теорем практически одинаковы. В работе [1] рассмотрены ряды

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \ldots (\alpha_m)_n z^n,$$

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1+1)_n \ldots (\alpha_i+1)_n (\alpha_{i+1})_n \ldots (\alpha_m)_n z^n,$$

$$i = 1,\ldots,m.$$

В обозначениях (2) настоящей работы имеем: $f_0(z) = \Psi_0(z)$, $f_m(z) = \Psi_1(z)$. Равенство (1) принимает вид

$$\Psi_0(z) = 1 + \alpha_1,\ldots,\alpha_m z \Psi_1(z).$$

Приведем формулировку теоремы 1 из [1]:

Пусть M, ρ – натуральные числа. Пусть $(m+1)\rho > \varphi(M)m$. Тогда для любых целых чисел $h_0,\ldots h_m$, не равных нулю одновременно и любого натурального числа ξ существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho)$ таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство

$$|L(\xi)|_p = |h_0 f_0(\xi) + \ldots + h_m f_m(\xi)|_p > 0.$$

(Теорема 2 из [1] вполне аналогична; она относится к случаю точки Ξ.)

Из теорем 1 и 2 работы [1] следует, что как для точки ξ, так и для точки Ξ существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполнено неравенство $\Psi_1(\xi) \neq 0$ (соответственно, $\Psi_1(\Xi) \neq 0$). Действительно, достаточно рассмотреть линейную форму $L(\xi) = f_m(\xi)$ (соответственно, $L(\Xi) = f_m(\Xi)$) и применить вышеупомянутые теоремы.

Согласно сделанным выше замечаниям, осталось только доказать, что число $\alpha_1 \ldots \alpha_m \xi$ (соответственно, $\alpha_1 \ldots \alpha_m \Xi$) является полиадическим числом Лиувилля. Для этого рассмотрим натуральные числа

$$\alpha_{i,k} = \sum_{l=0}^{k} \mu_{i,l} \lambda_l, \quad i = 1,\ldots,m. \tag{6}$$

Пусть $A = \alpha_{1,k} \ldots \alpha_{m,k} \xi$. Тогда

$$\begin{aligned}\alpha_1 \ldots \alpha_m \xi - \alpha_{1,k} \ldots \alpha_{m,k} \xi &= (\alpha_1 - \alpha_{1,k})\alpha_2 \ldots \alpha_m \xi + \\ &+ \alpha_{1,k}(\alpha_2 - \alpha_{2,k})\alpha_3 \ldots \alpha_m \xi + \\ &+ \alpha_{1,k}\alpha_{2,k}(\alpha_3 - \alpha_{3,k})\alpha_4 \ldots \alpha_m \xi + \ldots + \\ &+ \alpha_{1,k} \ldots (\alpha_{m-1} - \alpha_{m-1,k})\alpha_m \xi + \alpha_{1,k} \ldots (\alpha_m - \alpha_{m,k})\xi.\end{aligned}$$

Поскольку все числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_m, \alpha_{1,k},\ldots,\alpha_{m,k}, \xi$ – целые p – адические,

$$|\alpha_1 \ldots \alpha_m \xi - \alpha_{1,k} \ldots \alpha_{m,k} \xi|_p \le \max_{i=1,\ldots,m} |\alpha_i - \alpha_{i,k}|_p. \tag{7}$$

Для заданных чисел n, P выберем число K_0 так, чтобы при $k \ge K_0$ выполнялись неравенства

$$\begin{gathered} P \le s_k + 2\lambda_k^2, \\ n \le \frac{m s_k \ln s_k}{\ln 2(\ln \xi + m \ln k + 2m \ln \ln s_k)}. \end{gathered} \tag{8}$$

Тогда для любого простого числа p с условием $p \le P$ согласно (3) имеем:

$$\max_{i=1,\ldots,m} |\alpha_i - \alpha_{i,k}|_p \le p^{-\operatorname{ord}_p \lambda_{k+1}} \le p^{-m s_k \ln s_k}. \tag{9}$$

В свою очередь, из (4), (5), (6) следует, что

$$|\alpha_{i,k}| \le k\lambda_k^2 \le k \ln^2 s_k.$$

Поэтому

$$\begin{gathered} |A| = |\alpha_{1,k} \ldots \alpha_{m,k} \xi| \le |\xi| k^m \ln^{2m} s_k = \\ = p^{\frac{\ln \xi + m \ln k + 2m \ln \ln s_k}{\ln p}} \le p^{\frac{\ln \xi + m \ln k + 2m \ln \ln s_k}{\ln 2}}. \end{gathered} \tag{10}$$

Из (7)–(10) следует доказываемое неравенство

$$|\alpha_1 \ldots \alpha_m \xi - A|_p \le A^{-n}.$$

Рассуждения для числа $\alpha_1 \ldots \alpha_m \Xi$ вполне аналогичны.

В заключение еще раз заметим, что проверка неравенства $\Psi_1(\xi) \neq 0$ (соответственно, $\Psi_1(\Xi) \neq 0$) для конкретного простого числа p позволяет утверждать, что хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\xi)$, $\Psi_1(\xi)$ (соответственно, $\Psi_0(\Xi)$, $\Psi_1(\Xi)$ – трансцендентное p – адическое. Целью работы было доказательство того, что таких простых чисел бесконечное множество.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чирский В.Г.* Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел // ДАН. 2022. Т. 505. С. 63–65. https://doi.org/10.31857/S2686954322040075
2. *Шидловский А.Б.* Трансцендентные числа М.: Наука. 1987. 448 с.
3. *Салихов В.Х.* Критерий алгебраической независимости одного класса гипергеометрических E-функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 2. С. 189–211.
4. *Салихов В.Х.* Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E-функций // Acta Arithm. 1990. V. 53. P. 453–471.
5. *Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G.* Siegel normality // Ann. Math. 1988. Ser. 127. P. 279–308.
6. *Bombieri E.* On G-functions // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 2. London: Academic Press. 1981. P. 1–68.

7. *Chudnovsky G.V.* On application of Diophantine approximations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1985. V. 81. P. 7261–7265.
8. *Иванков П.Л.* О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 1. С. 53–62.
9. *Bertrand D., Chiskii V., Yebbou J.* Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. V. 13. № 2. P. 241–260.
10. *Chirskii V.G.* Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers //Russ. J. Math. Phys. 2019. V. 26. № 3. P. 286–305. https://doi.org/10.1134/S1061920821030031
11. *Чирский В.Г.* Арифметические свойства рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром // ДАН. 2020. Т. 494. № 2. С. 69–70. https://doi.org/10.31857/S268695432005032X
12. *Chirskii V.G.* Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter / /Russ. J. Math. Phys. 2021.V. 28. № 3. P. 294–302. https://doi.org/10.1134/S1061920819030051
13. *Ernvall-Hytonen A.-M., Matala-aho T.,Seppela L.* Euler's divergent series in arithmetic progressions// J. Integer Sequences. 2019. V. 22. Article 19.2.2. 10 p.
14. *Matala-aho T., Zudilin W.* Euler factorial series and global relations// J. Number Theory. 2018. V. 186. P. 202–210. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2017.09.026
15. *Нестеренко Ю.В.* Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 3. С. 39–72.
16. *Постников А.Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971. 416 с.

TRANSCENDENCE OF *p*-ADIC VALUES OF GENERALIZED HYPERGEOMETRIC SERIES WITH TRANSCENDENTAL POLYADIC PARAMETERS

V. G. Chirskii[a]

[a] *Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

It is established that if $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ are polyadic Liouville numbers, and the number ξ is a positive integer or Ξ is a polyadic Liouville number and if $\Psi_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1)_n\dots(\alpha_m)_n z^n$, $\Psi_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1+1)_n\dots(\alpha_m+1)_n z^n$, then there are infinitely many primes *p* such that the at least one of the *p*-adic integers $\Psi_0(\xi)$, $\Psi_1(\xi)$ (respectively, $\Psi_0(\Xi)$), $\Psi_1(\Xi)$ is transcendental.

Keywords: polyadic Liouville numbers, transcendental *p*-adic numbers