ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 510, с. 39–42

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА И КОМПАКТНОСТИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ НЕСЕКТОРИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ

© 2023 г. С. Н. Туманов[1,*]

Представлено академиком РАН И.А. Таймановым
Поступило 31.03.2023 г.
После доработки 23.04.2023 г.
Принято к публикации 29.04.2023 г.

Спектральные свойства оператора Штурма–Лиувилля на полуоси, когда потенциал принимает комплексные значения в более широкой области, чем полуплоскость, мало изучены. Оператор в этом случае, вообще говоря, несекториальный – числовой образ заметает всю комплексную плоскость. В этой ситуации предложены условия, обеспечивающие дискретность спектра и компактность резольвенты.

DOI: 10.31857/S2686954323700145, **EDN:** XJAIKI

Рассматривается оператор Штурма–Лиувилля в $L_2(\mathbb{R}_+)$, заданный дифференциальным выражением $l(y) = -y'' + q(x)y$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Здесь и далее $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$, $q = q(x)$ – комплекснозначная функция, принимающая значения при всех достаточно больших $x \geq x_0 \geq 0$ в открытом секторе

$$\Pi_\kappa = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0,\ \arg z \in (-\pi + \kappa, \pi - \kappa)\}, \quad \kappa \geq 0.$$

Введем *максимальную* область:

$$D = \{y \in L_2(\mathbb{R}_+) \mid y, y' \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+), l(y) \in L_2(\mathbb{R}_+)\}$$

и форму краевых условий: пусть $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$,

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0,$$
$$U(y) = \alpha_0 y(0) + \alpha_1 y'(0).$$

Сам оператор L_U будем рассматривать на области D_U, состоящей из таких $y \in D$, для которых $U(y) = 0$, где он действует как $L_U y = l(y)$.

В общем случае рассматриваемый оператор не является секториальным, а числовой образ заметает всю комплексную плоскость.

Вместе с оператором L_U введем L_U^0, определяемый на области D_U^0, состоящей из функций $y \in D_U$ с компактным носителем (своем для каждой такой функции y), где L_U^0 действует аналогично: $L_U^0 y = l(y)$.

Известно [1], что $D_U^0 \subset D_U$ плотна в $L_2(\mathbb{R}_+)$, исходный оператор L_U замкнут, а L_U^0 допускает замыкание. При этом может оказаться, что его замыкание $\widetilde{L_U^0} \neq L_U$ [2].

Случай, когда $\widetilde{L_U^0} = L_U$ называется определенным и представляет отдельный интерес. С одной стороны, как это следует из работы [1], реализация определенного случая эквивалентна тому, что $L_U^* = \overline{L}_{\overline{U}}$, где $\overline{L}_{\overline{U}}$ – оператор, определяющийся сопряженными краевыми условиями $\overline{U}(y) = \overline{\alpha_0} y(0) + \overline{\alpha_1} y'(0)$ и сопряженным дифференциальным выражением $\overline{l}(y) = -y'' + \overline{q(x)}y$ аналогично L_U. С другой стороны, реализация определенного случая позволяет записать формулу для резольвенты L_U. При вещественном q это соответствует реализации случая *предельной точки* Вейля [3] для однородного уравнения

$$-y'' + qy = 0. \quad (1)$$

Лидским [2] рассмотрены потенциалы с $\mathrm{Re}\, q \geq \mathrm{const}$, либо $\pm\mathrm{Im}\, q \geq \mathrm{const}$, и даны достаточные условия реализации определенного случая и

[1] *Московский Центр фундаментальной и прикладной математики при МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: sntumanov@yandex.ru*

компактности резольвенты L_U. Если при $\mathrm{Re}q \geq \mathrm{const}$ определенный случай реализуется всегда, то при неограниченной снизу вещественной части потенциала приходится прибегать к дополнительным условиям, например, условиям типа Сирса [2, 4].

Наличие ВКБ асимптотик решений (1) несколько упрощает исследование спектральных свойств L_U.

На этом пути были получены классические результаты Наймарка [6]. Недавно с помощью метода ВКБ были получены результаты Ишкиным [7] для несекториального оператора Штурма—Лиувилля. Стоит отметить, что случай несекториального оператора мало изучен, о чем более подробно сказано в [7].

Для существования ВКБ асимптотик достаточно, чтобы $q, q' \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и

$$\frac{1}{q^{1/4}}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{q^{1/4}} = \frac{5}{16}\frac{(q')^2}{q^{5/2}} - \frac{1}{4}\frac{q''}{q^{3/2}} \in L_1(\mathbb{R}_+),$$

см., например, [5], что обременительно и с точки зрения гладкости потенциала, и с точки зрения оценки роста его производных. Поэтому нас заинтересовал случай менее гладких q, когда решения (1), вообще говоря, таких асимптотик не имеют.

Договоримся через C обозначать произвольные положительные константы, возможно, различные в соседних формулах.

Введем условие на потенциал q, центральное для настоящей работы. Скажем, что q удовлетворяет условию **A** при $x \geq x_0$, если:

- потенциал $q \in C^1(\mathbb{R}_+)$;
- образ $q([x_0, +\infty)) \subset \Pi_\kappa$, $\kappa \geq 0$;
- при $x \geq x_0$ имеет место оценка

$$\mathrm{Re}p(x) \geq C + \frac{1}{2}\left|\frac{p'(x)}{p(x)}\right|, \quad C > 0, \tag{2}$$

где $p(x) = \sqrt{q(x)}$, а ветвь корня выбрана так, чтобы $\mathrm{Re}p(x) > 0$ при $x \geq x_0$.

Проясним наш интерес к (2): как легко заметить, в случаях, рассмотренных Наймарком и Ишкиным, когда $|q| \to +\infty$, $\kappa > 0$, $|q'/q^{3/2}| \to 0$, при $x \to +\infty$, выполняется не только (2), но и даже более сильная оценка при $x \gg 1$:

$$\mathrm{Re}p(x) \geq C + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\left|\frac{p'(x)}{p(x)}\right|, \quad C, \varepsilon > 0. \tag{3}$$

Положим

$$\rho = \rho(x) = \mathrm{Re}p(x) - \frac{1}{2}\left|\frac{p'(x)}{p(x)}\right|.$$

В ряде наших утверждений ρ, $1/|q|$, $\rho/|q|$ участвуют в определении весовых L_2-пространств. Отметим, что (3) дает возможность получить оценки:

$$\left|\frac{p'}{p}\right| \leq \frac{1}{1/2 + \varepsilon}\mathrm{Re}p,$$

$$\rho \geq \mathrm{Re}p - \frac{1/2}{1/2 + \varepsilon}\mathrm{Re}p = \frac{\varepsilon}{1/2 + \varepsilon}\mathrm{Re}p,$$

а в итоге:

$$C\mathrm{Re}p(x) \leq \rho(x) \leq \mathrm{Re}p(x),$$

что позволяет перейти от весов ρ, $1/|q|$, $\rho/|q|$ к более понятным $\mathrm{Re}p$, $1/|q|$, $\mathrm{Re}p/|q|$.

Заметим, что дополнительное условие $\kappa > 0$ безотносительно к (2) или (3) приводит к неравенству при $x \geq x_0$:

$$\mathrm{Re}p \leq |p| \leq C\mathrm{Re}p,$$

что вместе с (3) позволяет перейти уже к весам $|q|^{1/2}$, $1/|q|$, $1/|q|^{1/2}$.

Определим множество $\mathcal{N}$ тех $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых условие **A** выполнено для $q_\lambda = q - \lambda$ при всех $x \geq x_0(\lambda)$ (для каждого λ возможно свое $x_0(\lambda)$).

Лемма 1. *Пусть для q условие* **A** *выполнено при всех $x \geq x_0$. Тогда*

Множество $\mathcal{N}$ открыто [и не пусто] в $\mathbb{C}$.

Условия $\mathcal{N} = \mathbb{C}$ и $|q(x)| \to +\infty$ при $x \to +\infty$ эквивалентны.

В формулировках результатов штрихом обозначаем дифференцирование по x.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{N} \neq \varnothing$, тогда реализуется определенный случай: $\widetilde{L_U^0} = L_U$.*

Пусть $\Omega \subset \mathcal{N}$ — область. Существует функция $\eta(x, \lambda)$ ($x \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \Omega$) нетривиальная при всех $\lambda \in \Omega$ со следующими свойствами:

- *обе функции $\eta(x, \lambda)$ и $\eta'(x, \lambda)$ непрерывны по совокупности аргументов $(x, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$;*
- *при каждом $x \in \mathbb{R}_+$ функции $\eta(x, \lambda)$ и $\eta'(x, \lambda)$ однозначные аналитические в Ω как функции λ;*
- *при любом $\lambda \in \Omega$ функция $\eta(x, \lambda) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ как функция x, является единственным нетривиальным решением уравнения*

$$-y'' + (q(x) - \lambda)y = 0 \tag{4}$$

в классе решений из $L_2(\mathbb{R}_+)$ *с точностью до постоянного множителя (не зависящего от* x*, но, возможно, зависящего от* λ*);*

Спектр L_U *в* Ω *дискретный (собственные пространства одномерны, корневые — конечномерны), собственные значения определяются условием* $\mathcal{W}(\lambda) = 0$*, где*

$$\mathcal{W}(\lambda) = \alpha_0\eta(0,\lambda) + \alpha_1\eta'(0,\lambda),$$

а размерности корневых подпространств — кратностями нулей $\mathcal{W}(\lambda)$.

Вне точек спектра в Ω *формула для резольвенты* L_U *имеет вид*:

$$(R_\lambda f)(x) = \frac{\eta(x,\lambda)}{\mathcal{W}(\lambda)}\int_0^x \chi(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi + \frac{\chi(x,\lambda)}{\mathcal{W}(\lambda)}\int_x^{+\infty}\eta(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi,$$

где $\chi(x,\lambda) = \alpha_0\varphi(x,\lambda) - \alpha_1\psi(x,\lambda)$*, а* $\varphi(x,\lambda)$ *и* $\psi(x,\lambda)$ *— решения задачи Коши для уравнения* (4) *с начальными условиями*

$$\varphi(0,\lambda) = 0, \quad \varphi'(0,\lambda) = 1,$$

$$\psi(0,\lambda) = 1, \quad \psi'(0,\lambda) = 0.$$

Функцию $\eta(x,\lambda)$ мы называем решением *Вейля* однородного уравнения (4).

Следствие. *Пусть для* q *условие* **А** *выполнено при всех* $x \ge x_0$*, и* $|q(x)| \to +\infty$ *при* $x \to +\infty$*. Тогда спектр* $\sigma(L_U)$ *дискретный.*

Отметим, что в условиях Следствия мы утверждаем только дискретность спектра. Более сильное условие — компактность резольвенты — дается следующей Теоремой:

Теорема 2. *Пусть для* q *условие* **А** *выполнено при всех* $x \ge x_0$*, и* $\rho \to +\infty$ *при* $x \to +\infty$*. Тогда резольвента* R_λ *оператора* L_U *— вполне непрерывный оператор при* $\lambda \notin \sigma(L_U)$.

Следующая Теорема может быть полезной при исследовании полноты системы СПФ оператора L_U (см., например, [8]).

Теорема 3. *Пусть* $q \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $|q(x)| \to +\infty$ *при* $x \to +\infty$*, пусть* $\kappa > 0$ *и для некоторого* $0 < \delta < 1$ *при всех* $x \ge x_0$*:*

$$q(x) \in \Pi_\kappa,$$

$$\left|\frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)}\right| < 4\delta\tan^{3/2}\kappa\sin\frac{\kappa}{2}.$$

Тогда

• *спектр* $\sigma(L_U)$ *дискретный, а резольвента* R_λ *оператора* L_U *— вполне непрерывный оператор при* $\lambda \notin \sigma(L_U)$.

• *функция* $\eta(x,\lambda)$*, доставляемая Теоремой* 1*, целая по* λ *при каждом* $x \ge 0$*, и является замкнутым ядром в смысле Левина* [9]*, т.е. если для некоторой* $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$ *при всех* $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\int_0^{+\infty}\eta(x,\lambda)f(x)dx \equiv 0,$$

то $f \equiv 0$.

При (2) справедливо вложение весовых пространств: $L_2(\rho) \subset L_2 \subset L_2(1/|q|)$, в этой связи интерес представляет следующая

Теорема 4. *Пусть для* q *условие* **А** *выполнено при всех* $x \ge 0$*, тогда* $R_0 = L_U^{-1}$ *— ограниченный оператор из* $L_2(\mathbb{R}_+,1/|q|)$ *в* $L_2(\mathbb{R}_+,\rho)$, а dR_0/dx *(действующий как* $d[(R_0f)(x)]/dx$*) — ограниченный оператор из* $L_2(\mathbb{R}_+,1/|q|)$ в $L_2(\mathbb{R}_+,\rho/|q|)$.

Следствие. *Пусть для* q *условие* **А** *выполнено при всех* $x \ge 0$*, тогда для любой* $y \in D$ *следует, что* $y \in L_2(\mathbb{R}_+,\rho)$, $y' \in L_2(\mathbb{R}_+,\rho/|q|)$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность члену-корреспонденту РАН профессору Андрею Андреевичу Шкаликову за внимание к работе и поддержку.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при содействии РНФ, грант 20-11-20261.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М.А.* // Тр. ММО 1954. Т. 3. С. 181–270.
2. *Лидский В.Б.* // Тр. ММО 1960. Т. 9. С. 45–79.
3. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Oxford, 1946. “Издательство иностранной литературы”, Москва, 1960.
4. *Sears D.B.* // Canadian journ. math. 1950. V. 2. № 3. P. 314–325.
5. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. Academic Press, 1974. “Наука”, Физматлит, 1990.
6. *Наймарк М.А.* ДАН 1952. Т. 85. С. 41–44.
7. *Ишкин Х.К.* // Мат. заметки 2023. Т. 113.
8. *Титанов S.N.* // JDE 2022. V. 319. P. 80–99.
9. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. Гос. Изд. Техн.-Теор. Лит., Москва, 1956.

ON ONE CONDITION FOR THE DISCRETENESS OF THE SPECTRUM AND THE COMPACTNESS OF THE RESOLVENT OF A NONSECTORIAL STURM–LIOUVILLE OPERATOR ON THE SEMIAXIS

S. N. Tumanov[a]

[a] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Taimanov

The spectral properties of the Sturm–Liouville operator on the semi-axis with the complex-valued potential with the range exceeding the half-plane, has been little studied. The operator in this case can be non-sectorial, the numerical range can coincide with the entire complex plane. In this situation we propose the conditions ensuring the discreteness of the spectrum and the compactness of the resolvent.