ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 3–12

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ВЕКА

УДК 372.851

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЦИФРОВОЙ ВЕК

 Академик РАН А. Л. Семенов[1,2,*], А. Е. Абылкасымова[3,], С. А. Поликарпов[4,***]**

Поступило 18.12.2022 г.
После доработки 16.02.2023 г.
Принято к публикации 12.03.2023 г.

В статье формулируются основания современного математического образования, которые отвечают новым целям и задачам математического образования, продиктованным изменениями в самой математике за последний век, изменением ее роли в современном цифровом мире, изменениями самого мира. Описывается базовая система понятий, начиная с которой строятся вся современная математика конечного и начальное математическое образование. Для всех уровней математического образования и для всех обучающихся принципиальным является самостоятельное, при помощи и поддержке мотивирующего учителя, решение задач, которые ученику не известно, как решать. Существенную роль играют компьютерный математический эксперимент и передача компьютеру задач, способ решения которых найден учащимся. В статье также описывается реальное состояние дел в российской массовой школе и предлагаются необходимые действия для реализации сформулированных принципов современного математического образования в России. Описаны достигнутые результаты в этом направлении. Большинство статей данного выпуска – демонстрация и детализация реализации сформулированных принципов.

Ключевые слова: основания математического образования, математическая грамотность, цифровые инструменты поддержки математического открытия и доказательства, неожиданность задачи

DOI: 10.31857/S2686954323700157, **EDN:** RQEWAB

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблемы математического образования, в том числе школьного, всегда волнуют профессиональных математиков. Обычно они исходят из того, что школьная математика должна быть такой же, как в хорошей школе, где они учились, при этом нужно взять хорошие учебники (лучше всего – Киселева, столетней давности), найти хороших учителей и дать возможность хорошим математикам из лучших университетов набирать себе в студенты выпускников этих хороших школ. Отдельно обсуждаются и механизмы привлечения школьников в математику – как заинтересовать математикой детей – потенциальных будущих математиков, как отобрать сильных мотивированных учеников при приеме в хорошую школу и пр. Проблема подготовки учителей для массовой, неэлитарной, школы остается обычно за рамками этой дискуссии: для хороших школ учителей скорее подыскивают среди тех выпускников сильных математических факультетов, кто счел привлекательной для себя работу в школе. При этом студенты и выпускники педагогических вузов – т.е., те, кто образует основную массу учителей, практически не рассматриваются.

В 1960–70-е гг., в процессе создания специализированных школ для высокомотивированных детей, ряд известных математиков, в том числе и сильнейших в стране, погрузились в проблему школьного образования более серьезно, лично участвовали и в создании учебных материалов, и в преподавании. К их числу относились А.Н. Колмогоров [1], И.М. Гельфанд [2], Д.К. Фаддеев [3], А.С. Кронрод [4], Е. Б. Дынкин [5], М. И. Башмаков [6], М. А. Лаврентьев [7] и др. В этом направлении были достигнуты значительные успехи, признанные на мировом уровне [8].

[1] Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[2] Институт кибернетики и образовательной информатики им. А.И. Берга, Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия
[3] Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы, Республика Казахстан
[4] Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия
**E-mail: alsemno@ya.ru*
***E-mail: aabylkassymova@mail.ru*
****E-mail: polik@mi-ras.ru*

Тем не менее некоторые попытки обновления математического образования предпринимались и для массовой школы. Наиболее значимыми стали т.н. “Колмогоровская реформа” [9, 10] и последовавшие за ней попытки математиков создать учебники, альтернативные к “колмогоровским”. Но несмотря даже на эти попытки, независимо от их удачности, изменения за последние 100 лет в школьной математике – чему и как учат – оказываются несопоставимыми с изменениями в самой математике, с ее ролью в современном цифровом мире, и, наконец – с изменениями самого мира! Исключениями являются введение в практику массовой школы курсов алгоритмики [11, 12] и теории вероятностей.

Сегодня ясно, что больше эти изменения в мире нельзя не учитывать: современная цивилизация формирует новые цели и задачи математического образования и дает совершенно новые возможности для их достижения [13, 14].

Сегодня необходимость формирования нового видения развития математического образования осознается и коллегами из Казахстана, для которых это видение включает, с одной стороны, построение единых методологических основ математического образования, с другой стороны, гибкого, дифференцированного проектирования учебной деятельности для отдельных учащихся и отдельных их категорий [15, 16].

Данный специальный выпуск посвящен работе ряда профессиональных математиков в области школьной математики, включающей преподавание в школе и подготовку учителей в течение ряда десятилетий – с начала 1990-х гг. Работа эта продолжает продуктивные традиции математического образования предшествующих десятилетий и одновременно учитывает указанные современные реалии [8].

В ходе практической работы в школах – и в тех, которые ориентируются на высокомотивированных детей, и в массовых школах, – выявился ряд принципов, образующих целостную систему, отвечающую указанным выше традициям и тенденциям. Естественно, что наиболее эффективной является реализация именно целостной системы, в которой реализуются все принципы. Однако и отдельные элементы такой системы, и сочетания нескольких элементов – принципов, также могут отвечать потребностям какого-то круга родителей и детей, и педагогических коллективов.

2. ОСНОВАНИЯ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Мы начинаем с оснований, касающихся содержания математического образования, учитывающих специфику начальной школы, очень важной для формирования начальных математических представлений и видов деятельности, и затем указываем принципы, относящиеся к различным уровням образования (впрочем, в какой-то степени, практически все принципы имеют отношение ко всем уровням образования – от детского сада до университета):

Для начальной школы (отдельные элементы важны уже для дошкольного образования, но мы их не выделяем):

1. Базовые *математические объекты и структуры* – бусины (символы), цепочки (конечные последовательности), совокупности (конечные мультимножества), таблицы, геометрические фигуры на клетчатой бумаге, графы, представленные в виде изображений на бумаге и экране, телесных объектов – манипулятивов; роботы, выполняющие цепочки команд и реагирующие на внешний мир; приборы для измерения времени, длины (расстояния), веса, объема в механическом и цифровом исполнении. Свойства этих объектов и структур и операции над ними, действия при решении задач наглядны.

2. Базовые объекты и структуры служат основой для *всей конечной* (дискретной) современной *математики* (включая, конечно, и арифметику) и базисом для построения в этой математике *моделей реальности*, в том числе, моделей языка, игры, человеческой деятельности и взаимодействия различных видов. Эти объекты и структуры естественно обобщаются в математике бесконечного, являются основой для формирования основных представлений всей математики и математической информатики – Computer Science, общих когнитивных навыков и стратегий, включая традиционные тщательность, трудолюбие, умение понять и выполнить инструкцию, и более важные – современные – готовность учитывать обратную связь, исправлять ошибки и решать задачи, которые не известно, как решать.

3. *Натуральные числа* – цепочки цифр: с учетом арифметических операций – это важнейший пример одного из видов объектов. Данный вид – не самый простой и наглядный с точки зрения свойств и операций: эти свойства и операции при любом подходе (как современном, так и традиционном) обращаются к свойствам упомянутых выше объектов (цепочек, совокупностей, геометрических фигур), операциям над ними, измерениям и т.д. Числовая интуиция (“чувство числа”) развивается у каждого ребенка с индивидуальной скоростью; важную роль играет практическая работа учеников: подсчет предметов, геометрическое представление чисел (например, площадями многоугольников), измерение размеров реальных объектов, промежутков времени и т.д.

4. С самого начала используется минимальный, четко зафиксированный *логико-алгоритми-*

ческий язык – его использование, понимание и развитие поддерживаются наглядностью и разнообразием задач (см. далее). Повторение данного учителем вербального клише (заучивание текстов “чтобы найти вычитаемое, нужно...”) не приветствуется, ученику надо самому изобретать свои формулировки и, желательно, объяснять что-то другим. В логическом языке систематически вместо конструкций “и”, “или” используются “кванторные” конструкции типа: “высказывание... верно для всех цепочек на листе...”, “все высказывания из списка... верны”, “среди высказываний... есть истинное”. Это позволяет избежать некоторых неоднозначностей естественного языка.

5. Основные определения понятий даются на графических примерах, почти без вербальных пояснений. Понимание определения также проверяется на решении наглядных задач.

6. Графические определения и формулировки задач требуют большего места, чем арифметические или алгебраические формулы или обычные “текстовые задачи”. Это приводит к тому, что бумажные учебники и задачники имеют большой объем и являются еще одной причиной использования экранных сред. В случае экранных объектов и заданий может быть использовано и устное взаимодействие ребенка с заданием (без участия учителя), что дает возможность гибко подходить к уровню освоения ребенком письменной речи.

Для всех уровней общего образования (и, с соответствующими уточнениями, для различных направлений высшего образования):

7. Новизна, *неожиданность задачи*, посильная для конкретного ученика, используется как мощная положительная мотивация для него. Источником для широкого спектра неожиданных заданий являются, в существенной степени, систематизированные задачи “занимательной”, “развлекательной”, олимпиадной математики прошедших столетий [17, 18]. Необходимо отметить, что многие из таких заданий – математически глубже и ближе к современной математике, чем используемый сегодня школьный материал.

8. При этом успех в быстром и безошибочном решении очередной “серийной” задачи повышающейся технической сложности также может быть положительным мотивом в индивидуальных ситуациях, но никак не является универсальной целью. Неуспех не используется как отрицательный мотиватор. С учетом указанных мотивов и индивидуальных жизненных и образовательных целей, возможностей групповой работы, ученик и учитель совместно строят для ученика индивидуальную последовательность заданий оптимальной новизны и сложности для достижения индивидуальных целей. Индивидуальные цели включают выполнение образовательной программы школы в соответствии с ФГОС и могут значительно его дополнять.

9. Основным мотивом в текущем процессе учения является не максимальное соответствие каким-то внешним требованиям “проверочных работ”, не стигматизация полученной за такую работу “тройки” и даже – не соответствие общим для всего класса требованиям учителя. Как предполагает сама природа ФГОС, индивидуальная цель может состоять в достижении “удовлетворительного” результата, что вовсе не является причиной для огорчения или порицания. Каждый ученик ориентирован на соответствие *индивидуальным целям*, этими целями могут являться честное получение оценки “удовлетворительно” и надежное прохождение государственной итоговой аттестации; их достижение является основанием для *удовлетворения* учащегося, семьи, учителя и школы. Естественно, если целью является: “стать инженером, или программистом, или профессионалом в фундаментальных математических исследованиях”, то и индивидуальные пути ее достижения должны быть соответствующими.

10. Ключевыми элементами учебной деятельности являются самостоятельное создание, изобретение учеником и группами учеников способов и процедур действий, алгоритмов; наблюдение и (почти) самостоятельное открытие свойств, законов, фактов. К этому добавляется и самостоятельное создание определений – выбор подходящих общих понятий и терминов для объектов и ситуаций.

11. *Компьютер* используется как инструмент, высвобождающий время и энергию учащегося для творческой интеллектуальной деятельности высокого уровня. Например, при проектировании индивидуальных целей и путей их достижения школьником используется возможность (но не обязательность) передачи калькулятору операций над числами и алгебраическими выражениями.

Благодаря цифровым технологиям возникают принципиально новые, широкие возможности [19]. Например, системы динамической геометрии позволяют обнаруживать новые геометрические закономерности, подтверждаемые доказательствами. Понятия математического анализа в цифровой среде приобретают наглядный смысл, обеспечивающий их реальное освоение и использование. Накопленные в физическом или биологическом эксперименте данные получают наглядное представление, могут быть проанализированы и сопоставлены с математической моделью. Запрограммированный учащимся перебор вариантов может дать нужный ответ, доказать его отсутствие, или подсказать направление поиска. Системы компьютерной алгебры позволяют находить точные решения и строить графики для всех школьных и университетских уравнений и еще многое другое. В алгебре можно передать компьютеру решение уравнений конкретного вида после того, как ученику удалось изобрести, при поддержке учителя, способ решения этих уравнений.

Провозглашаемые сегодня результаты школьной математики (ориентированные, прежде всего, на инженерное образование первой половины XX в.), могут быть достигнуты большей долей учащихся, на более высоком уровне и для более широкого круга задач, если, как и “во взрослой жизни”, для их решения школьникам будет разрешено использование компьютера [20].

12. В системе подготовки профессиональных математиков необходимо предусмотреть освоение компьютерных инструментов поддержки математического открытия и доказательства [21]. То же следует предусмотреть в подготовке учителей математики и информатики. При этом, как и для учащихся, уровень сложности решаемых задач для разных студентов может быть весьма различным, важным является освоение на индивидуальном уровне общей методологии и моделей интеллектуальной деятельности.

13. В системе инженерной подготовки речь должна идти о приобретении опыта использования всех инструментов компьютерных вычислений, в том числе — алгебраических, аналитических; математики, лежащей в основе систем моделирования и проектирования для соответствующей инженерной области. В системе гуманитарного образования математическая деятельность может быть направлена, помимо профессиональных применений, например, в обработке естественного языка, медицинской диагностики, или юридических баз, на формирование представлений о том, “как это работает”, “демистификацию” искусственного интеллекта.

14. Принципиально возрастает роль *доказательств*. В существующей школьной математике доказательства в алгебре рудиментарны, практически отсутствуют. Не используется возможность дать ученикам самостоятельно построить в последовательности задач микро-“теорию”, например, решения квадратных уравнений; цель другая — как можно скорее и надежнее выучить готовые формулы или “приемы” решения классов уравнений. Точные доказательства в анализе не могут быть освоены большинством школьников, — помимо необходимости освоения непривычного понятийного аппарата, даже процесс понимания доказательства требует способности удерживать внимание на монотонных математических выкладках в течение длительного времени. Доказательства в геометрии, наследующие почтенную двухтысячелетнюю традицию, оказываются вне зоны ближайшего развития для большинства даже “хорошистов” и отличников: это в лучшем случае — материал для выучивания и воспроизведения с ограниченным пониманием.

При этом потребность воспитания у массы учащихся культуры доказательства ощущалась и постоянно формально провозглашалась как образовательная цель и раньше; сегодня важность доказательства только возрастает. Возможность развивать математику доказательств сегодня может быть обеспечена компьютерным и иным экспериментом и наблюдением, дающими материал для выдвижения, проверки, опровержения гипотез для доказательства. Это происходит, в том числе в геометрии, где самостоятельное построение доказательства учеником становится приоритетной целью. Наконец, упомянутые выше “занимательные” задачи, как и более широкий круг задач, сегодня относящихся к Computer Science, дают значительный простор для доказательных рассуждений различных форм и уровней. Важным примером здесь является индуктивное доказательство соответствия программы (алгоритма) системе требований — спецификации.

15. Одним из важнейших источников содержания и заданий для математического образования становится *программирование* — на минимальном алгоритмическом языке в соответствующей учебной среде или на вариантах существующих “промышленных” языков программирования. Программирование объединяет возможности эксперимента (в том числе — при отладке программы), часто — визуализации, “объективизации” ошибок и иных дефектов работы. Оно же может решать и задачу воспитания аккуратности, необходимости следования правилам и т.п., на решение которой претендует школьная математика [22]. О доказательствах в программировании мы уже упомянули.

16. *Ошибка* в решении задачи — важная составляющая образовательного процесса. Это материал для выработки у ученика умения искать у себя ошибки (причем, не только в математике), использовать различные способы обратной связи (проверки). Это предмет для дальнейшей работы, лучшего понимания учебного контента. Это важный материал для разговора учителя с учеником, совместного планирования дальнейшего продвижения по его индивидуальной траектории. Ключевым здесь являются изменение подхода, изменение реакции учителя и образовательной системы в целом: не порицание и наказание за ошибку, а повод и материал для улучшения работы ученика и своей работы, продвижение к достижению запланированного результата. Полезным может оказаться и рассмотрение ошибки учителя, как сделанной намеренно, сознательно, так и реальной, случайной ошибки: учитель ошибается и

учится, как и ученик, и это – важная позитивная часть образовательного процесса.

17. *Моделирование реальности* – важнейшая часть математического образования, представленная в сегодняшнем школьном математическом образовании очень скудно. В математике – это "текстовые задачи", в реалиях XIX века, с шаблонными рассуждениями и бедными уравнениями. Несколько лучше дело обстоит в физике, где круг явлений реальности и класс используемых математических сред шире (например, используется минимальная тригонометрия – та, которая, собственно, только и нужна для чего-то содержательного, из всей школьной тригонометрии). Благодаря применению цифровых моделей, высвобождению времени за счет применения компьютера для алгебраических и арифметических вычислений, моделирование становится серьезной, реальной и крайне актуальной школьной темой [23]. Его важность в высшем образовании очевидна, там дела обстоят несколько лучше.

18. Задачи *цифрового задачника* в силу отсутствия ограничений бумажного объема, образуют спектр, намного более широкий по охватываемой тематике и глубокий по уровням сложности (включая самые простые задания), чем в традиционных школьных задачниках. Используется накопленный в культуре за столетия корпус занимательных задач, олимпиадных и т.п. Цифровой задачник может содержать неограниченное количество задач различной сложности, иллюстраций, в том числе – динамических, "подсказок", комментариев и т.д., обеспечивая потребности широкого круга учащихся и позволяя им выстраивать индивидуальные образовательные траектории.

В связи с описанной картиной, даже если согласиться с ней в целом, или с отдельными ее элементами, возникают естественные вопросы:

- Какие усилия школы, государства, родителей потребуются, чтобы сдвинуть ситуацию в предложенном направлении?
- Какой предыдущий и нынешний опыт мог бы быть в этом смысле полезен?
- Какие есть и возникают препятствия на обозначенном пути?

Большинство статей данного выпуска – демонстрация и детализация реализации перечисленных принципов и попытка ответить на поставленные вопросы.

Принципиальным для нас является то, что исследовательская работа как необходимый элемент образовательной программы может содержать элементы "абсолютно" исследовательского уровня, т.е. не просто предлагать учащемуся пройти путь, уже пройденный профессиональными математиками, а реально попытаться найти математические доказательства новых фактов. В связи с этим мы помещаем в выпуск статью "Создание новой математики школьниками" (А.Л. Семенов. С.Ф. Сопрунов, И.А. Иванов-Погодаев), относящуюся к исследовательской работе школьников в программе Образовательного центра "Сириус" по теории определимости. Мы также включаем статью "Эффективный поиск линейно растущих конфигураций в TAG системе $\{0 \to 00, 1 \to 1101, 3\}$" (Н.В. Куриленко), где решение давно стоявшей проблемы Поста из области комбинаторики слов получено с помощью компьютера и цикл обзоров Н.А. Вавилова: "Компьютер как новая реальность математики: I. Personal account", "Компьютер как новая реальность математики: II. Проблема Варинга", "Компьютер как новая реальность математики: III. Числа Мерсенна и суммы делителей", "Компьютер как новая реальность математики: IV. Проблема Гольдбаха", относящихся к применению компьютера в окончательном разрешении классических проблем теории чисел. Формулировки проблем и результатов и в том, и в другом случае доступны школьникам. Школьники, с одной стороны, могут самостоятельно пройти какие-то конкретные уже пройденные исследовательские маршруты, с другой – получить новые результаты по смежным темам.

3. РЕАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ДЕЛ В РОССИЙСКОЙ МАССОВОЙ ШКОЛЕ

Распространено убеждение о том, что состояние математического образования существенно ухудшилось в постсоветский период. В определенной степени это так и есть и обусловлено, в том числе, снижением важности и престижности инженерного образования в стране, где был разрушен военно-промышленный комплекс, а также размыванием системы авторитетности: авторитета власти, родителей, школы.

В то же время советское математическое образование в массовой школе тоже не следует идеализировать. Приведем две характерные цитаты безусловных авторитетов в данной области.

И.В. Арнольд [24]: "В практике преподавания дело обстоит так. За основу принимается один или несколько сборников задач, из которых преподаватель выбирает те или иные по своему усмотрению. Традиция обеспечивает в известной мере то, что некоторые определенные типы "арифметического рассуждения" будут как-то представлены, но что это за типы, достаточны ли они или, наоборот, в обычном материале есть лишний балласт, чего именно надо добиваться от учеников, – на все это не дается сколько-нибудь определенного ответа. Более или менее "установлено", что учащихся надо научить решать задачи на "смешение", на "пропорциональное деление", на "совместную работу", на "движение", на “проценты”, на “тройное правило”. Если спросить о методах решения, то ответ ограничивается обычно тривиальными соображениями об аналитическом и синтетическом методе, о разложении сложной задачи на ряд простых, о способе приведения к единице, о способе пропорций, о задачах на “предположение” (“предположим, что каждого сорта куплено одинаковое количество”). Учеников — в том или ином порядке — знакомят с соответствующими “типами” задач, причем обучение решению задач сплошь и рядом сводится к рецептуре и “натаскиванию”, к пассивному запоминанию учениками небольшого числа стандартных приемов решения и узнаванию по тем или иным признакам, какой из них надо применить в том или ином случае. Количество задач, которые ученики решают действительно самостоятельно, с тем напряжением мысли, которое и должно являться источником полезности процесса решения задачи, ничтожно.

В итоге — полная беспомощность и неспособность ориентироваться в самых простейших арифметических ситуациях, при решении чисто практических задач, в дальнейшем, в алгебре — неумение составлять и исследовать уравнения и, вообще, неумение выйти за пределы узких формальных схем, — словом, то, что потом характеризуется, как “отсутствие математического развития”.”

А. Я. Хинчин [25]: “Как-то мне пришлось спросить несколько опытных учителей пятых классов о том, какой примерно процент учащихся действительно научается решать арифметические задачи, не являющиеся простыми вычислительными примерами, т. е. такие, где способ решения, как бы прост он ни был, должен быть найден самим учащимся. Из всех опрошенных мною учителей только один утверждал, что этому искусству удается научить до 15% учащихся; все другие говорили, что лишь отдельные учащиеся овладевают этим искусством, а некоторые даже заявляли, что “этому вообще научить невозможно”. Конечно, решив целый ряд совершенно однотипных задач, ученик без труда решит задачу в точности того же типа (этим объясняется отсутствие сплошных провалов на экзаменах и контрольных работах); но добиться, чтобы ученик самостоятельно нашел решение задачи нового, хотя бы очень простого типа, — это, по единодушному мнению учителей, есть дело, удающееся только в самых исключительных случаях.

Таким образом, как раз то “развитие сообразительности”, которое у нас любят выставлять как основную цель введения “трудных задач”, оказывается, никак не удается даже у лучших учителей.”

Такое положение дел было вызвано, в частности, целью “индустриализации” школы в различных смыслах. С одной стороны, подготовка будущих инженеров и техников была важнейшей целью, с другой стороны, “выращивание” системы всеобщего образования, начиная от уровня элитарного, которое было в дореволюционное время, требовало “индустриальных” методов.

Важнейшим событием в математическом образовании, но не в массовой школе, было создание специализированных математических школ и классов, об этом уже говорилось выше.

В общешкольном же массовом математическом образовании существенным было введение в середине 1980-х гг. курса информатики во всех старших школах страны [26]. Школа не отторгла этот курс, хотя во многих случаях его алгоритмо-математическое содержание частично было заменено освоением прикладных компьютерных навыков. Тем не менее большинство учащихся сегодня получает хотя бы минимальный опыт решения задач по разработке алгоритмов и других задач современной математики, разнообразящих решение ставших традиционными типовых заданий (логарифмических неравенств и текстовых задач на переливание). Распространено мнение, что наличие этого курса в школе содействовало притоку выпускников в математические направления высшего и среднего профессионального образования и на работу в ИТ-сферу.

С начала 2000-х гг. в массовом курсе математики появились разделы теории вероятностей и математической статистики. Соответствующие задания входят и в государственную итоговую аттестацию, это гарантирует, что указанные разделы “проходят” в подавляющем большинстве школ страны.

Стандарт 2009 г. [27] и последовавшие за ним варианты стандартов для начального образования [28] очень кратко, но все же перечисляют новые элементы, соответствующие рассматриваемому нами подходу, курса математики в составе единой области “Математика и информатика”.

Отвечающая описанным принципам (в частности, принципу высокой новизны заданий) олимпиада “Кенгуру”, не поддерживаемая государством, в течение десятилетий привлекает учащихся и учителей в десятках процентов начальных школ России [29, 30].

Безусловно, в самых разных образовательных системах, в том числе — в российской, важнейшим фактором, определяющим содержание образования, является выпускной экзамен, в нашей стране — государственная итоговая аттестация. В ней отражены перечисленные в данном разделе изменения: есть экзамен по информатике, в экзамен по математике включены задания по теории вероятностей и математической статистике, кроме того, этот экзамен дает пример массового и, очевидно, высоконадежного использования цифровых технологий, персональных компьютеров в общеобразовательном процессе:

• с самого начала ЕГЭ миллионы страниц работ выпускников оцифровываются, оцифровка передается по линиям связи в единый федеральный центр, а оттуда возвращается в регионы к экспертам, к результатам проверки имеет доступ каждый выпускник и т. п.;

• в течение ряда лет устная часть экзамена по иностранному языку использует компьютер для воспроизведения и записи речи;

• с 2021 г. компьютер используется в ГИА по информатике за 11 класс, в ГИА за 9 класс – еще раньше;

• правила проведения ГИА за 9-й класс (допускающие большее разнообразие по регионам) предусматривают возможность более широкого применения цифровых технологий, в частности – калькулятора, в разных предметах (но не в математике).

Пандемия COVID не отменила школу в России, Конституция РФ и Закон об образовании продолжали действовать, но их реализация потребовала массового применения цифровых технологий в образовательном процессе, в том числе – в математике. При этом государство не понесло сколько-нибудь существенных затрат. Возвращение к “нормальной” жизни, видимое многими как status quo до пандемии, сегодня может помешать адекватной оценке опыта, накопленного в этот период.

Цифровая трансформация математической учебной деятельности учащихся идет и в России, и во всем мире. В сотнях российских школ учителя, несмотря на отсутствие серьезной специальной дополнительной подготовки, морального, или материального стимулирования, уже десятилетиями успешно используют:

• в начальной школе: описанное содержание и некоторые другие элементы описанного подхода, реализованного в учебниках, в том числе издательства “Просвещение” [31–33];

• в начальной школе: проектно-исследовательский подход к изучению математики, основанный на использовании сред Лого и Scratch и образовательной философии конструкционизма [12, 34];

• в основном образовании: компьютерную поддержку школьного курса геометрии в форме GeoGebra [35], “Живая математика” [36], “Математический конструктор 1С” [37, 38], повышающую роль эксперимента, проводимого учащимся; компьютерную поддержку курса алгебры – в “Математическом конструкторе 1С”.

Российская традиция обучения математике через решение новых задач, самостоятельное открытие и эксперимент продолжается сегодня в сотнях математических классов и математических школ [39]; тысячах математических кружков [40]; подготовке участников олимпиад; проектных сменах “Сириуса” и других центров математического образования.

4. НЕОБХОДИМЫЕ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРИНЦИПОВ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В РОССИИ

Мы считаем, что для реализации предлагаемых принципов математического образования для широкого круга учащихся необходимо следующее:

1. Разрешить (но не сделать обязательным) учащимся применение цифровых технологий в образовательном процессе, в том числе – в процессе государственной итоговой аттестации.

2. Изменить, трансформировать процесс подготовки учителей математики, информатики, физики, технологии, включая цифровую трансформацию, для чего необходимо, в частности:

• декларативная и нормативная поддержка со стороны федеральных органов исполнительной власти;

• формирование сообщества вузовских преподавателей, готовых к изменениям, которые будут принимать участие в подготовке учителей математики, учителей начальной школы, учителей других дисциплин; координированная работа этого сообщества по изучению опыта, освоению технологий, организации инновационной деятельности в школах, созданию учебно-методических материалов, работе со студентами;

• реализация, в том числе дистанционная, модулей, курсов, практик и целостных программ для учителей математики и студентов – будущих учителей; перестройка программ подготовки и переподготовки учителей в направлении сокращения обязательного материала, не имеющего прямого отношения к школьному образованию; перестройка образовательных методик в том же направлении, в котором идет трансформация школьного образования: самостоятельности в решении принципиально новых задач; использовании цифровых технологий, при поощрении умения решать задачи без таких технологий; готовности осваивать новое, в том числе – вместе с учащимися.

3. Разработать учебно-методические комплексы (УМК, включающие учебные пособия, учебники, книги для учителя), основанные на обсуждаемых принципах, соответствующих ФГОС и образовательным программам, разрешенным федеральными органами исполнительной власти; существенная, вероятно, основная часть этих УМК должна быть цифровой и размещена в ин-

тернете; важно получение этими УМК грифа "допущено" от Министерства просвещения.

Во всех этих направлениях уже достигнуты определенные результаты. Например, при подготовке учителей математики в Московском педагогическом государственном университете в течение ряда лет реализуется психолого-педагогический модуль, предполагающий большой объем взаимодействия студентов со школьниками разных возрастов, начиная с первого года обучения [41]. Модуль предусматривает знакомство не только с тем, как происходит обучение математике и информатике в основной школе (5–9 классы), но и с особенностями развития школьника и предметным математическим материалом в начальной школе (1–4 классы). В 2016 г. совместно с важной системой математических кружков Москвы – малым мехматом – в МПГУ начал работу математический кружок, где заинтересованные студенты, выступая в качестве организаторов, могли пообщаться со школьниками прямо в стенах вуза.

Еще ранее была осознана необходимость в выравнивающих занятиях по проверке и восполнению у студентов знаний школьной программы по математике. Кстати, такие занятия, согласно данным опросов, проводятся сегодня далеко не только в педвузах. После перерыва были восстановлены практикумы по решению задач школьной математики у студентов 1–4 курсов, проводимые сотрудниками профильных математических кафедр.

В учебных планах учителей математики и информатики появились также дисциплины, связанные с освоением студентами компьютерных инструментов преподавания – систем динамической геометрии, демонстрационных компьютерных моделей из других разделов школьной математики. Многие учебные дисциплины получили сопровождение в виде электронного курса, на математическом факультете, как немногим ранее и в МПГУ в целом, возникло само понятие электронной образовательной среды в обучении учителя математики и информатики.

Сформулированные подходы к обучению математике и информатике в России поддержаны в Казахском национальном педагогическом университете имени Абая – на кафедре методики преподавания математики, физики и информатики. Здесь в образовательном процессе применяется ряд современных цифровых технологий и это позволяет в значительной степени повысить качество подготовки учителей математики [42]. Кафедра стремится к тому, чтобы выпускники отвечали современным требованиям в соответствии с реализацией в стране государственной программы "Цифровой Казахстан", принятой Постановлением Правительства Республики Казахстан 12 декабря 2017 г.

БЛАГОДАРНОСТИ

Российский фонд фундаментальных исследований, начиная с 2020 г., реализует грантовую программу "Фундаментальные основы цифровой трансформации общего образования". В рамках этой программы был разработан программный документ "Хартия цифрового пути школы", отражающий основные принципы настоящей работы [43]. В той же программе работает ряд математических коллективов, реализующих указанные принципы. В частности, Фондом поддержаны работы по проектам № 19-29-14152 мк "Фундаментальные основы формирования математической грамотности для цифрового общества на начальном уровне образования", № 19-29-14199 мк "Фундаментальные основы цифровой трансформации начального общего образования", № 19-29-14208 мк "Анализ потребностей и препятствий цифровизации в системе общего образования", № 19-29-14217 мк "Перспективные направления и формы использования компьютерных технологий в школьном курсе математики", № 19-29-14234 мк "Анализ разработки, цифровизации и внедрения содержания общего образования, базирующегося на результатах фундаментальных исследований (фундаментальное ядро содержания общего образования)". Мы пользуемся случаем для того, чтобы поблагодарить Фонд за поддержку, в том числе – за возможность открытого доступа к статьям настоящего выпуска.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Данная статья подготовлена при поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант № AP19680007, А.Е. Абылкасымова, А.Л. Семенов) и РФФИ – грант № 19-29-14152 мк (С.А. Поликарпов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров Андрей Николаевич (12(25).04.1903–20.10.1987) // Математическое образование, Общедоступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/kolmogorov_a_n/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
2. Гельфанд Израиль Моисеевич (20.08(02.09).1913–05.10.2009) // Математическое образование, Общедоступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/gelfand_i_m/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
3. Фаддеев Дмитрий Константинович (17(30).06.1907–20.10.1989) // Математическое образование, Общедоступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/faddeev_d_k/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
4. Кронрод Александр Семенович (22.10.1921–06.10.1986) // Математическое образование, Обще-

доступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/kronrod_a_s/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).

5. Дынкин Евгений Борисович (11.05.1924–14.11.2014) // Математическое образование, Общедоступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/dynkin_e_b/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
6. Башмаков Марк Иванович (10.02.1937–31.03.2022) // Математическое образование, Общедоступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/bashmakov_m_i/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
7. Лаврентьев Михаил Алексеевич (06(19).11.1900–15.10.1980) // Математическое образование, Общедоступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/lavrentjev_m_a/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
8. *Константинов Н.Н., Семенов А.Л.* Результативное образование в математической школе // Чебышёвский сборник. 2021. Т. XXII. Вып. 1 (77). С. 413–446.
9. *Колмогоров А.Н., Маркушевич А.И., Яглом И.М.* Проект программы средней школы по математике // Математика в школе. 1967. 1. С. 5–24.
10. *Неретин Ю.* Колмогоровская реформа математического образования (1970–1980) https://www.mat.univie.ac.at/~neretin/obraz/reforma20022022.pdf (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
11. Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР от 28 марта 1985 года № 271 “О мерах по обеспечению компьютерной грамотности учащихся средних учебных заведений и широкого внедрения электронно-вычислительной техники в учебный процесс”. Вопросы образования. 2005. № 3. С. 341–346.
12. *Бетелин В.Б., Кушниренко А.Г., Семенов А.Л., Сопрунов С.Ф.* О цифровой грамотности и средах ее формирования // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. Вып. 4. С. 102–109. https://doi.org/10.14357/199222642004014
13. *Семенов А.Л., Поликарпов С.А., Рудченко Т.А.* Будущее математического образования // Математика в школе, Армения, 2022. 1 (114), С. 10–15. ISBN 1829-4111.
14. *Семенов А.Л.* Перспективы математического образования в цифровом мире // Актуальные проблемы обучения математике и физике в школе и вузе в условиях обновленного содержания образования. Материалы международной научно-практической конференции, Алматы: КазНПУ им. Абая, изд-во “Улагат”, 2022. С. 11–17.
15. *Abylkassymova A.E.* On Mathematical-Methodical Training of Future Mathematics Teacher in the Conditions of Content Updating of School Education // Modern Journal of Language Teaching Methods (MJLTM), Iran, 2018. V. 8. Iss. 3. P. 411–414. ISSN: 2251-6204.
16. *Abylkassymova A.E., Sedova E.A., Kalimullin A.N.* Fact, Belief, Truth and Cognition in School Mathematics Education // International conference “Education Environment for the Information Age”. The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences. 2018. P. 653–660. ISSN: 2357-1330.
17. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки, или Арифметика для всех: опыт математической хрестоматии. Книга для семьи и школы. С.-Петербург, 1908. 275 с.
18. *Перельман Я.И.* Веселые задачи: 101 головоломка для юных математиков. Петроград : тип. т-ва А.С. Суворина, 1916. 158 с.
19. *Семенов А.Л., Вишняков Ю.С.* Цифровая трансформация общего образования: перспективы и пути развития // Антропологическая дидактика и воспитание. 2021. Т. 4. № 4. С. 8–23.
20. *Семенов А.Л.* Исследование в цифровой среде – ключевой контекст общего образования // Сб. трудов Международной конференции по исследовательскому образованию школьников “От учебного проекта к исследованиям и разработкам” ICRES’2020, Москва, 23–26 марта 2020 г. Под ред. Богоявленской Д.Б., Карпова А.О., Багдасарьян Н.Г., Розова Н.Х. М.: НТА АПФН, 2020. С. 57–65.
21. *Семенов А.Л., Поликарпов С.А.* Цифровая трансформация школы и роль математики и информатики в ней. Проблемы и парадоксы математического образования // Тр. IV Междунар. науч. конф. “Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании”. Красноярск, 6–9 октября 2020 г. / Под общ. ред. М. В. Носкова. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2020 – С. 192–200.
22. *Семенов А.Л.* Концептуальные проблемы информатики, алгоритмики и программирования в школе. Вестник кибернетики. Международный журнал. 2016. № 2(22). С. 11–15.
23. *Дубровский В.Н.* Математическое моделирование для школьников // Компьютерные инструменты в образовании. 2017. № 6. С. 54–66.
24. *Арнольд И.В.* Принципы отбора и составления арифметических задач // Известия АПН РСФСР. 1946. Вып. 6. С. 8–28.
25. *Хинчин А.Я.* О так называемых “задачах на соображение” в курсе арифметики // Математика, ее преподавание, приложения и история. М.: Математическое просвещение, 1961. Сер. 2, 6. С. 29–36.
26. *Ершов А.П., Кушниренко А.Г., Лебедев Г.В., Семенов А.Л., Шень А.Х.* Основы информатики и вычислительной техники: Проб. учебник для сред. учеб. заведений // Под ред. А.П. Ершова. М.: Просвещение, 1988. 206 с., ISBN 5-09-000593-1.
27. ФГОС НОО 2009 года [Приказ Минобрнауки России от 06.10.2009 N 373 (ред. от 11.12.2020) Зарегистрирован в Минюсте России 22 декабря 2009 г. № 15785. https://fgos.ru/fgos/fgos-noo/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
28. ФГОС НОО 2021 года. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 286 “Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования”. Зарегистрирован 05.07.2021 № 64100. http://publication.pravo.gov.ru/Docu-

ment/View/00012021070500 28 (дата обращения 1 декабря 2022 г.).

29. Кенгуру. Математика для всех. Конкурсы для школьников // https://russian-kenguru.ru/konkursy/kenguru (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
30. *Башмаков М.И.* Математика в кармане “Кенгуру”. Международные олимпиады школьников. М.: Дрофа, 2011.
31. *Семенов А.Л., Рудченко Т.А.* Информатика. 3–4 классы. В 3 частях. Учебно-методический комплект (учебники, рабочие тетради, тетради проектов, поурочные разработки для каждой части) для обещеобразовательных организаций // М., Просвещение, ИНТ, 2019. Серия “Школа России”.
32. *Рудченко Т.А., Семенов А.Л.* Информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники, рабочие тетради, тетради проектов, поурочные разработки для каждого года обучения) для общеобразовательных организаций. М., Просвещение, ИНТ, 2019–2022. Серия “Перспектива”.
33. *Семенов А.Л., Посицельская М.А., Посицельский С.Е., Рудченко Т.А. и др.* Математика и информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники и задачники) для обещеобразовательных организаций. М., МЦНМО, ИНТ, 2012–2019.
34. *Семенов А.Л.* Симор Паперт и мы. Конструкционизм – образовательная философия XXI века // Вопросы образования. 2017. № 1. С. 269–294. ISSN 1814-9545.
35. *Geogebra for Teaching and Learning Math*. https://www.geogebra.org/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
36. Живая математика. Виртуальная математическая лаборатория // https://www.int-edu.ru/content/rusticus-0 (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
37. Математический конструктор. Лучшая российская программа динамической математики // https://obr.1c.ru/mathkit/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
38. *Дубровский В.Н.* “1С: Математический конструктор” как инструмент математического моделирования // Новые информационные технологии в образовании, 2020. С. 217–220.
39. *Башмаков М.И.* У истоков ЮМШ // Сб. “Из истории МатМеха”, 15 октября 1996 г. http://dm47.com/sbornik_iimm_bashmakov.html (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
40. *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. М.: МЦНМО, 2021.
41. *Семенов А.Л.* Учим учиться и учить. О возрождении педагогического образования, принципах работы педагогического университета и перспективах его учеников // Российская газета, 7127(259), 15 ноября 2016 г.
42. *Abylkassymova A.E.* On the Methodological Support of Teaching Mathematics at School and Pedagogical Institution in the Context of Updating the Content of School Education // 3rd International Conference on Innovative Studies of Contemporary Sciences. Tokyo, Japan, February 19–21, 2021. P. 5.
43. Хартия цифрового пути школы. https://rffi.1sept.ru/document/charter (дата обращения 1 декабря 2022 г.).

FOUNDATIONS OF MATHEMATICAL EDUCATION IN THE DIGITAL AGE

Academician of the RAS A. L. Semenov[a,b], A. E. Abylkassymova[c], and S. A. Polikarpov[d]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC CSC RAS, Moscow, Russian Federation*

[c] *Abay University, Almaty, Republic of Kazakhstan*

[d] *Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russian Federation*

The article formulates the foundations of modern mathematical education that meet the new goals and objectives of mathematical education dictated by: changes in mathematics itself over the last century, changes in its role in the modern digital world, changes in the world itself. The basic system of concepts is described, starting from which all modern mathematics of finite as well as primary mathematical education is built. For all levels of mathematical education and for all learners, independent, with the help and support of a motivating teacher, solving problems that are not known (to the student) how to solve, are fundamental. A significant role is played by a computer mathematical experiment and the transfer of tasks to the computer, the solution of which is found by the student. The article also describes the real state of affairs in the Russian mass school and proposes the necessary actions to implement the formulated principles of modern mathematical education in Russia. The results achieved in this direction are described. Most of the articles in this issue demonstrate and detail the implementation of formulated principles.

Keywords: updating of mathematical education, foundations of modern mathematical education, mathematical literacy, digital tools to support mathematical discovery and proof, unexpectedness of the problem