ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 66–94

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ВЕКА

УДК 372.851

Уважаемый читатель, данную статью с цветными иллюстрациями Вы можете найти на сайте https://www.elibrary.ru/title_about_new.asp?id=71077

КОНСТРУКТИВНАЯ КОМБИНАТОРИКА В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

© 2023 г. М. А. Посицельская[1]

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 21.01.2023 г.
После доработки 16.02.2023 г.
Принято к публикации 10.03.2023 г.

В работе детально рассматривается класс учебных задач из курса математики и информатики для начальной школы. Этот курс реализуется в течение последних десятилетий коллективом под руководством академика А.Л. Семенова. В задачах требуется найти, построить, перечислить все объекты, удовлетворяющие некоторой системе условий. Эту деятельность ученик ведет в наглядном мире базовых объектов дискретной математики и информатики: цепочек (конечных последовательностей символов), мешков (мультимножеств), таблиц, а также высказываний, содержащих кванторы. Рассматривается связь этих задач с задачами вычислительной комбинаторики (“подсчета количества вариантов”), переборными задачами теории сложности вычислений, а также с “большими идеями”, т.е. общекогнитивными стратегиями и их присвоением учащимися. Содержание образования при нашем подходе оказывается более адекватным задачам современного мира.

Ключевые слова: начальное математическое образование, конструктивная комбинаторика, переборные задачи, наглядность, деревья поиска, конструкционизм, computational thinking, навыки XXI века

DOI: 10.31857/S2686954323700194, **EDN:** XFARRL

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Постановка проблемы

Задачи цифровой экономики и, шире, цифровой цивилизации формируют принципиально новые представления о компетентности и профессионалов, и широкого круга граждан. Базой такой компетентности является то, что называется “computational thinking”, цифровая функциональная грамотность. Одним из ключевых элементов при этом становится, с одной стороны, способность к проектированию алгоритмических процессов — программированию в производственной или условной, например, игровой среде (“Волк, коза и капуста” и т.д.). С другой стороны, “computational thinking” — это наличие представлений, дающих возможность оценивать реалистичность реализации тех или иных алгоритмов, вычислительную сложность тех или иных задач.

Одной из самых первых и самых базовых задач, которая возникает перед человеком, является задача перебора вариантов. Связанное с ней точное утверждение — “Проблема перебора” [1] стало проблемой № 1 в одном из официальных вариантов списка “Задач тысячелетия” [2]. Заметим, что в современной математике ответы на вопросы: “существует ли объект?”, “сколько существует объектов?” и “построить объект” часто оказываются содержательно тесно связанными. В русском математическом языке в связи с ними употребляется термин *перечисление*, см., например, книгу Ф. Харари и Э. Палмера “Перечисление графов” [3], начинающуюся с эпиграфа из классического Тезауруса Роже [4] (российский переводчик оставил ее без перевода): enumerate, count, number, call over, run over, take an account of, call the roll, muster, poll, sum up, cast up, tell off, cipher, reckon, reckon up, estimate, compute, calculate. Пожалуй, русский список будет короче, но тоже, вероятно, будет содержать не менее десятка слов и понятий.

Перейдем к уточнению образовательного контекста. Задача построения всех объектов, удовлетворяющих некоторому условию, и всегда была, и по-прежнему остается универсальной задачей математики. Конечно, традиционная для школьной математики задача “решить уравнение”, или, как подробнее пишут в некоторых задачниках, “найти все решения и доказать, что других реше-

[1] АНО “Центр развития образовательной среды”, Москва, Россия
**E-mail: maria_posicel@mail.ru*

ний нет", дает пример такой задачи. Однако современная система обучения школьной алгебре маскирует общую постановку: эта система подталкивает ученика к тому, чтобы немедленно заняться преобразованиями, а затем – "проверкой ОДЗ". Эта проверка в системе представлений ученика оказывается никак не связанной с логическим доказательством того, что найдены все решения уравнения и только они.

Корректное нахождение конечного множества дискретных объектов в традиционных школьных курсах затрагивается обычно в старших классах в контексте темы, называемой "комбинаторикой". Но, к сожалению, эта тема в школьных курсах, как правило, быстро превращается в набор "правил сложения" и "правил умножения"; в курсах для студентов – к вычислению биномиальных коэффициентов и получению асимптотических оценок. В курсе, комбинаторики, как правило, главной задачей оказывается не построение нужной совокупности, а получение ответа на вопрос типа "Сколькими способами можно...?", "Сколько существует...?". Вот наугад взятый пример инструктирующего письма Минобразования на эту тему; все, что там говорится о комбинаторике – это: "Решение комбинаторных задач: перебор вариантов, подсчет числа вариантов с помощью правила умножения" [5]. Фактически в школах, а тем более в вузах, перебору уделяется совсем небольшое время. Перенос центра тяжести с перебора на подсчет – ответ на вопрос "сколько?" – облегчает проверку учителем ответа, но ученика подталкивает к угадыванию: "сочетания?", "размещения?", "какую формулу использовать?". При этом обучающиеся не имеют возможности не просто пересчитать, а построить (мы называем это – *перечислить*) достаточно большие совокупности объектов, например выборок с возвращением или путей в графе.

Одновременно остается в тени и часто приводит к ошибке ответ на вопрос о том, какие из строящихся объектов мы считаем *одинаковыми* – что мы, собственно, подсчитываем? Практика показывает, что для содержательного обсуждения даже самых простых свойств чисел и фигур школьной системы понятий зачастую оказывается недостаточно. Например, в каком смысле порядок слагаемых или множителей в выражении *не важен*? В каком смысле разложение числа на множители *единственно*? Треугольник ABC и треугольник CBA – это один объект на чертеже, *один и тот же* треугольник, или разные? А четырехугольник ABCD и ABDC – один и тот же, или разные?

Предпринимаемые время от времени попытки помещения задач комбинаторики в начальную школу (см. [6]) натыкаются на чрезмерную абстрактность изначального подхода – младшеклассникам сложно считать не конкретные объекты, а абстрактное "число способов", если опять-таки не сводить, без понимания, задачу к подстановке в формулу. При этом вопросу об одинаковости объектов здесь тем более не уделяется подобающего внимания.

1.2. Предлагаемое решение

В настоящей работе рассматривается система задач о переборе вариантов, используемая в современном курсе математики и информатики, внедренном в десятках школ РФ в рамках реализации программы, начатой АН СССР во второй половине 1980-х гг. [7].

Важность выхода в образовании за рамки арифметических "знаний–умений–навыков", фиксированных алгоритмов решения арифметических задач известных типов, была осознана и подчеркивалась еще в начале 1980-х гг. Иосифом Фейгенбергом [8]. Еще раньше на это обращали внимание известные математики, серьезно занимавшиеся школьным образованием ([9, 10]).

В начальной школе начинаем именно с введения самих комбинаторных объектов, а не с обсуждения вопросов "сколько". Это является частью общего подхода курса, перемещения внимания от нескольких типов задач арифметики позапрошлого века к широкому кругу вопросов современной математики и информатики. Более точно, речь идет об общем подходе в двух курсах: о курсе "Математика и информатика 1–4" [11], рассчитанном на 4–5 ч в неделю, и курсе "Информатика" [12], рассчитанном на 1 час в неделю. Авторский коллектив курса "Математика и информатика 1–4" – А.Л. Семенов, М.А. Посицельская, С.Е. Посицельский, Н.А. Сопрунова, И.А. Хованская, Т.В. Михайлова, Т.А. Рудченко. Авторский коллектив курса "Информатика 1–4" – А.Л. Семенов, Т.А. Рудченко. Оба курса создавались внутри одной авторской концепции и под общим руководством А.Л. Семенова.

Мы вводим цепочки (конечные последовательности), совокупности (мешки, конечные мультимножества), циклы[1], деревья, таблицы – как однозначно понимаемые всеми участниками объекты, для которых сразу же определяется и понятие *одинаковости* (в этом контексте мы избегаем перегруженного слова *равенство*). В начальной школе все эти объекты предполагаются конечными.

Это позволяет сделать и рассуждения о числах и фигурах значительно более упорядоченными, системными, вписанными в более широкий и современный контекст моделирования и "computa-

[1] Циклические порядки, см. https://ru.wikipedia.org/wiki/Циклический_порядок

tional thinking” [13]. Само изучение указанных объектов позволяет ввести в основную школьную программу широкий круг задач “занимательной математики”, дать утверждениям однозначно понимаемые и логичные формулировки, развить заложенные в этих задачах большие идеи, то есть общие когнитивные стратегии [14, 15].

Заметим, что конечность строящейся совокупности объектов – не самое существенное ограничение, хотя, безусловно, конечное множество решений является в начальной школе основной моделью. Рассмотрение задач, где требуется нахождение всех решений, в начальной школе служит подготовкой и для задач, где решений бесконечное количество.

Задача конструктивного построения конечного множества естественно возникает и в непрерывной математике – например, в геометрии. Есть классическая задача: “Сколько треугольников ты видишь на картинке?”, на картинке изображен треугольник, в котором проведена медиана. На первый взгляд, треугольников два, но есть еще и большой треугольник, составленный из двух маленьких. Эта задача приводит к серии задач, развивающих геометрическую зоркость, и продолжает развитие навыков систематического перебора вариантов, которые полезны в средней и старшей школе.

Задачу построения (перечисления) всех объектов, удовлетворяющих заданному набору условий, мы в данном тексте будем называть *переборной задачей*. В русском переводе упоминавшейся книги Харари [3] говорится о задаче перечисления. Перечислять можно треугольники на картинке, кошельки с заданной суммой, цепочки, в которой каждое число больше предыдущего хотя бы на 2 и так далее.

В нашем курсе “Математика и информатика” дети перечисляют все цепочки из двух двоек и трех единиц или двоичные деревья с заданным числом вершин, выписывая или рисуя их прямо на страницах рабочей тетради. Бывает, что количество объектов как раз известно, но это не делает задачу бессмысленной – чтобы перечислить все объекты без повторов, необходимо изобрести тот или иной принцип перебора. Заметим, что понимание принципа перебора – это прямой путь к глубокому пониманию комбинаторных формул в будущем, в задачах традиционной комбинаторики.

Строить объекты до того, как их пересчитывать, на наш взгляд, полезно было бы не только младшеклассникам, но и студентам. Разумный подход для них может состоять и в том, чтобы написать программу, печатающую один за другим все комбинаторные объекты с заданными свойствами (см., например, курс программирования А. Шеня [16]).

Остановимся на важном вопросе однозначности понимания формулировки переборной задачи. Как, например, сосчитать количество *разбиений (натурального) числа в сумму упорядоченных слагаемых?* Значит ли это, что слагаемые упорядочены по возрастанию (то есть разбиение $10 = 2 + 3 + 2 + 3$ не годится) или что порядок слагаемых важен (т.е. $10 = 2 + 2 + 3 + 3$ и $10 = 2 + 3 + 2 + 3$ суть различные разбиения)?

В нашем курсе эта проблема решается на уровне разделения понятий: мы говорим, что в первом случае мы перечисляем все *совокупности (мультимножества)* с суммой 10, во втором случае – все *цепочки* (последовательности) с суммой 10. Последовательное рассмотрение используемой нами системы объектов можно найти в другой статье этого сборника: [*М.А. Посицельская, А.Л. Семенов, Т.А. Рудченко.* Математические элементы начального образования], а примеры использования – в учебниках курсов “Математика и информатика” [11] и “Информатика” [12].

Таким образом, основные, базовые объекты нашего курса существенно расширяют традиционную арифметику. Это связано с другим, более существенным обстоятельством. Основной целью арифметики в начальной школе 150 и 100 лет назад было научить ребенка механически выполнять арифметические действия в заданном контексте, например, складывать количество товара, отпущенного за неделю. Делать это было нужно быстро и безошибочно, используя в качестве инструментов счеты и лист бумаги с карандашом. В какой-то степени эта задача соответствовала и общей задаче научения человека четко и быстро выполнять полученные инструкции. Эта цель продолжала транслироваться в школу и 50 лет назад, когда ее прагматическая значимость почти исчезла: человек, которому нужно было что-то вычислить, обращался к калькулятору или компьютеру. В XXI веке, кроме того, резко возрастает роль самостоятельного принятия решений в быстро меняющейся реальности, одновременно снижается роль формальной исполнительности. Учитывая это, мы использовали расширение предметного содержания курса, класса исходных объектов для того, чтобы существенно повысить новизну решаемых ребенком задач, чтобы перед ним чаще ставились задачи, которые “неизвестно-как-решать” (подробнее см. [17]). Конечно, решение таких задач, удовольствие от открытия нового, чередуется с удовольствием показать себе и другим, как ты умеешь что-то делать. Но и в одном, и в другом случае речь идет о позитивной мотивации. Соответствующие общепедагогические установки можно считать относящимися к российской традиции математических кружков и школ. Они рассматриваются в [17, 18].

С методической точки зрения переборные задачи несут в себе еще одно, может быть несколько неожиданное, достоинство: их можно и в большинстве случаев даже нужно решать всем классом или в нескольких группах, при этом каждый осваивает материал на индивидуальном уровне. Задачи эти иногда оказываются слишком объемными для самостоятельного решения учеником начальной школы, но их решение может быть эффективно организовано в группе. Коллективная работа здесь является организационно-психологической, жизненной реализацией одной из главных больших идей современной информатики и вычислительной практики – *"разделяй и властвуй"*: математические представления осваиваются на сочетании конкретных, четко поставленных математических вопросов с человеческим взаимодействием и коммуникацией.

При решении задачи поиска/построения всех объектов с заданными свойствами появляется широкий спектр меры участия каждого. Одни дети лишь контролируют, что все утверждения выполнены для найденного/построенного объекта; другие могут сами создавать объекты с нужными свойствами. Третьи отфильтровывают одинаковые (повторяющиеся) объекты и нащупывают принципы, которые могли бы помочь систематизировать перебор. Четвертые в результате обсуждения *формулируют эти принципы* явным образом, что дает инструменты и критерии для проверки полноты перебора. Наконец, пятым доступно доказательство того, что перебор завершен, других объектов с заданными свойствами не существует. Результатом для каждого участника является опыт участия в решении переборной задачи и понимание того, как был организован процесс перебора. Подробнее об этом можно прочесть в статье С.Е. Посицельского [19]. В настоящей работе мы также коснемся этого вопроса.

Заметим, что наш подход к "конструктивной комбинаторике" имеет содержательные параллели с конструктивизмом Пиаже [20] и конструкционизмом Паперта [21].

Дальнейшее рассмотрение мы начинаем с описания базовых задач, на которых далее строится вся система задач перебора. Затем мы приводим примеры переборных задач, каждая из которых является принципиально новой *для ученика*, "нестандартной", и обсуждаем общие когнитивные стратегии, большие идеи, которые осваиваются при решении этой задачи.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОБЪЕКТА, ПРОВЕРКА СВОЙСТВ, ПЕРЕБОР

Математика начинается в тот момент, когда человек начинает мыслить и строить выводы – мы хотим научить детей рассуждать. Ученики начальной школы редко могут строить безупречные и красивые рассуждения, и требовать этого от них невозможно. Но можно предложить им создать объект, который не построишь, не рассуждая. Еще до этого рассуждение возникает при объяснении того, что объект обладает некоторым свойством.

Построение объекта, обладающего некоторым свойством, другими словами, удовлетворяющего некоторому условию (системе условий), входит в большинство задач, которым посвящена настоящая работа.

Как в реальных вычислениях, так и в абстрактных математических рассуждениях, построение объекта может оказаться достаточно сложным процессом, а при этом проверка свойств объекта – простым делом. Иногда проверка очевидна: "по построению" – мы так строили этот объект. В математике и вычислительных задачах такая ситуация встречается в т.н. "переборных задачах", "проблеме перебора" и т.п. Об этом будет говориться подробнее в последней части текста.

Сейчас же мы более детально рассмотрим элементы решения задач на построение объекта.

2.1. Истинные и ложные утверждения

О любом объекте можно сделать высказывания (утверждения). Вот истинные утверждения о цепочке (см. рис. 1).

Принципиальная задача обучения в начальной школе, которую желательно решить уже в самом начале курса: сформировать у детей, на примерах, представление, что утверждения могут быть истинными или ложными (см. рис. 2).

Бывают еще утверждения, про которые по разным причинам неизвестно, истинны они или ложны, но в основной линии наших курсов мы их избегаем.

2.2. Задачи: построение какого-то объекта с заданными свойствами и перебор

Когда процедура проверки того, обладает ли объект данными свойствами, становится привычной, возникает более сложная задача – построить объект с заданными свойствами.

Раскраска цикла. Задание может выглядеть так: нужно раскрасить бусины в цепочке (мешке, цикле) так, чтобы выполнялся набор условий, или "были истинны утверждения" (см. рис. 3).

Из рисунка видно, что все бусины – круглые. Мы предлагаем читателю попытаться решить приведенную задачу и понаблюдать за собой: какие стратегии вы используете. Одна из стратегий: "попробовать и посмотреть, что получится". Эта стратегия противоречит традиционному общественному и школьному стереотипу "делай сразу

├ т — а — р — а — н — т — а — с →

Пятая буква в этом слове — **н**.

В этом слове две буквы **т**.

Следующая за каждой буквой **т** — буква **а**.

В этом слове **р** — третья буква.

В этом слове 8 букв.

Последняя буква в этом слове — **с**.

В этом слове три буквы **а** — вторая, четвёртая и предпоследняя.

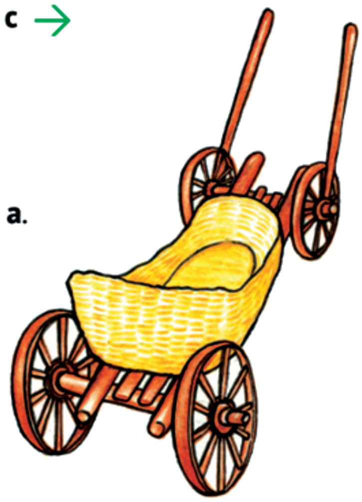


Рис. 1. Определение истинных утверждений, примеры.

3 больше, чем 6. Л
3 меньше, чем 6. И
Три равно шести. Л

Четыре больше двух на два. И
Три меньше семи на два. Л
Три меньше семи на четыре. И
Три больше семи на четыре. Л

Рис. 2. Истинные и ложные утверждения.

Раскрась бусины в цикле так, чтобы были истинны утверждения:

Если две соседние бусины одинаковые, то за ними следует красная бусина.
Если две соседние бусины разные, то за ними следует жёлтая бусина.
В цикле есть две разные бусины.

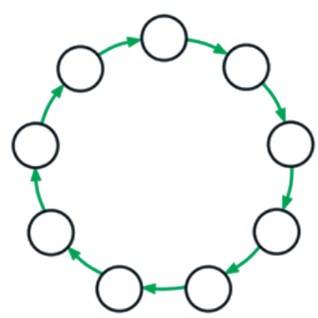


Рис. 3. Задача о построении объекта с заданными свойствами.

правильно". Конечно, можно подольше поразмышлять и нас может "осенить" идея взять в цикле две разные бусины; следом за ними обязательно идет желтая, и дальше рассмотреть два варианта: последняя из двух взятых желтая и не желтая и т.д. Но к таким рассмотрениям можно прийти и просто экспериментируя, перебирая все возможности и отбрасывая те, для которых какое-то условие не выполнено.

Привычный формат задания "раскрась" дает возможность ребенку сосредоточиться на суще-

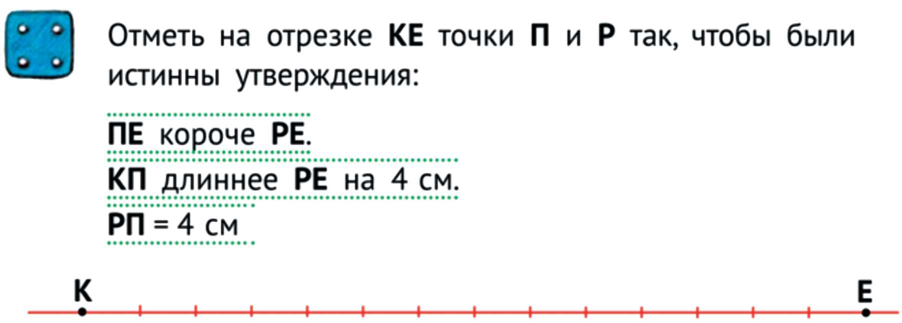


Рис. 4. Задача о взаимном расположении точек на отрезке.

стве дела. Цепочка подобных заданий может начинаться с самых простых задач, при этом, *даже если условие выглядят не так уж сложно*, задача может оказаться неожиданной, ее “неизвестно-как-решать”.

Предложенная выше задача – не самая простая, и у большинства учеников решение может не получиться сразу; к ней может вести цепочка задач, каждая из которых ученику посильна, но содержит что-то новое по сравнению с предыдущими. Пример такой подготовительной задачи: “Раскрась какую-нибудь бусину красным, а другую – зеленым” (нарисован цикл из двух бусин).

Расстановка точек на отрезке. Еще одно направление задач на перебор – задачи о взаимном расположении точек на отрезке. Перебор при этом возникает стихийно: каким-то способом не получилось, можно попробовать иначе (см. рис. 4).

Расположив наугад точки П и Р, мы можем начать проверять первое условие и понять взаимное расположение точек П и Р на отрезке. Используя последнее условие, можно увидеть, что перебирать нужно положение только одной (любой) из двух точек, положение другой, как говорят математики, “определяется однозначно”. Теперь можно опять начать перебирать, экспериментировать, расположить где-то точку П, построить точку Р и сравнить два указанных отрезка, измерив их. Возникает гипотеза, в какую сторону нужно сдвинуть П, чтобы улучшить дело (если нам не повезло сразу). После нескольких попыток мы достигаем цели. Заметим, что в условии задачи не требуется проверить (доказать), что других решений нет (хотя мы с вами понимаем, что их действительно нет).

Обратим внимание, что в данной задаче у точек есть имена. Обсуждение проблемы введения имен для математических объектов не входит в задачу настоящей статьи. Ограничимся здесь лишь замечанием, что мы вводим имена в наглядном контексте, когда *видно*, что значением имени является такой-то объект, например, цепочка, фигурка, точка. В данной задаче также *видно*, что *имя* для объекта уже есть, оно дано в условии задачи, но *значение* нужно найти, перебирая точки.

Для ребенка, который получил такую задачу впервые, она может оказаться трудной – она из разряда задач, которые “неизвестно-как-решать”. Всем детям в классе полезно с такой задачей столкнуться, попытаться ее решить. Эта задача продолжает серию из нескольких задач, каждую из которых тоже “неизвестно-как-решать”, но при этом, шаги от задачи к следующей будут уже посильными для ученика. Серия может начинаться с выяснения длины нарисованного отрезка – подсчета единичных отрезков в нем. Также в серию могут входить задачи о рисовании отрезка заданной длины, о выборе точки на отрезке так, чтобы расстояние до одного из концов было заданным, о нахождении расстояния до другого из концов, о нахождении перебором (методом проб и ошибок) точки с заданной разностью расстояний: “...расстояние до одного конца на столько-то больше, чем до другого”.

Для массового использования достаточное количество заданий различной сложности заготавливается заранее и входят в учебную литературу курса. С другой стороны, задачи могут создаваться и самим учителем, это становится частью педагогической культуры. И те и другие задачи могут сохраняться в цифровом интернет-задачнике.

Геометрия прямоугольников. Вот пример задачи на построение объекта, включающей арифметику небольших чисел и геометрию прямоугольников уже в первом классе. Р(...) в этой задаче означает периметр фигуры – длину ее границы (см. рис. 5).

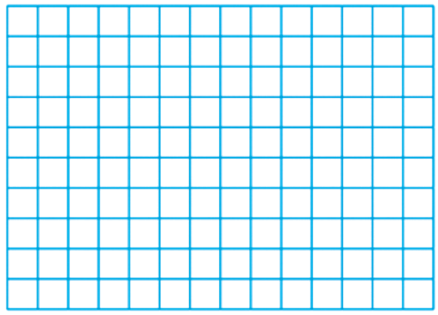
Эта задача – тоже не первая в серии задач, каждая из которых с тем же свойством новизны для каждого шага. Сначала идут задачи на построение прямоугольников, у которых вершины имеют имена. На примерах формируется представление о том, что в имени всего прямоугольника имена вершин идут по часовой стрелке.

Дальше дается понятие периметра и идут задачи на нахождение периметра прямоугольников, Начерти прямоугольники **АБВГ**, **ВГДЕ** и **БЕДА** так, чтобы были истинны утверждения:

Р(**АБВГ**) = 8 см

Р(**ВГДЕ**) = 10 см

Р(**БЕДА**) = 14 см



Чему равна сторона **ВГ**? ☐ см

Рис. 5. Задача о построении объекта с заданными свойствами.

среди которых есть и квадрат, и прямоугольник “ширины” 1. Заметим, что здесь Р – уже не имя объекта, а имя операции над объектами, переводящей геометрический объект в число, при этом – в наглядном контексте. Сложность использования такого имени здесь снижена, благодаря тому что значение этого имени фиксировано – можно просто читать “периметр” там, где написано “Р”. Учитель должен (явно – для себя, и менее явно – для учеников) зафиксировать продвижение в большой идее – присвоении имен объектам, операциям, отношениям.

Далее идет задача на построение какого-нибудь прямоугольника с заданным периметром. Здесь может начаться исследовательский проект выяснения того, для каких периметров задача имеет решение – открытие четных чисел (стороны прямоугольников пока – целые, мы их рисуем на клетчатой бумаге).

Появляется задача построения *всех* прямоугольников с заданным периметром. Нужно придумать, как вести перебор в ходе построения. Далее в проекте идет задача выяснения для конкретных чисел, сколько есть разных прямоугольников с заданным периметром. И здесь мы сталкиваемся с уже упомянутой проблемой: какие прямоугольники считать одинаковыми? Решению этой проблемы помогает вырезание прямоугольников из клетчатой бумаги.

Возвращаясь к первоначальной задаче, заметим, что мы не требуем “доказательства единственности” ответа. Это доказательство легко можно получить из решения, но построение всей логической цепочки все же слишком сложно для первоклассников.

Фиксированное число истинных утверждений. Мы используем цепочку задач, к которых требуется построить объект так, чтобы для него истинным оказалось заданное количество утверждений (см. рис. 6).

Здесь непонятно, среди каких объектов (чисел) вести перебор. Чисел, на самом деле, бесконечно много; для ребенка – просто очень много. Здесь тоже помогает стратегия “попробовать любое”. Когда ученики уже много раз ее успешно применили, такая стратегия сама по себе уже не добавляет существенного элемента новизны. Это – общая математическая и шире – жизненная стратегия. Она является большой идеей – приобретением ребенка, которое пригодится ему и в дальнейшей жизни. Однако каждое последующее применение приводит к “закреплению” этой стратегии и к удовлетворению от такого применения.

Взяв любое число, ученик сумеет указать истинные и ложные утверждения для этого числа. Очень вероятно, что это число будет небольшим, меньше, чем все, участвующие в формулировке задачи. Однако, как вести дальнейший перебор, все еще не ясно – это задача, которую “неизвестно-как-решать”. Конечно, и к этой задаче может вести цепочка более простых задач. Она может привести ученика к еще одной большой идее: попытаться решить не задачу целиком, а какую-то более простую ее часть, сначала проэкспериментировать с этой частью. Для нашей задачи первый

Напиши число, для которого истинно ровно 6 утверждений из восьми.

Это число меньше, чем 51 340. ☐
Это число меньше, чем 40 312. ☐
Это число больше, чем 14 105. ☐
Это число меньше, чем 45 217. ☐
Это число меньше, чем 41 810. ☐
Это число больше, чем 46 108. ☐
Это число больше, чем 40 012. ☐
Это число больше, чем 41 813. ☐

Рис. 6. Задача на построение объекта с заданным числом истинных утверждений.

Рис. 7. Задача о поиске двух одинаковых объектов.

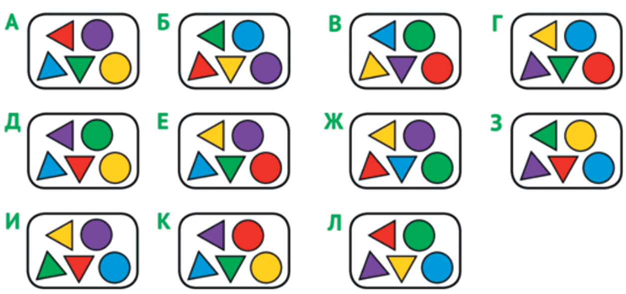


Рис. 8. Задача о поиске двух одинаковых мешков.

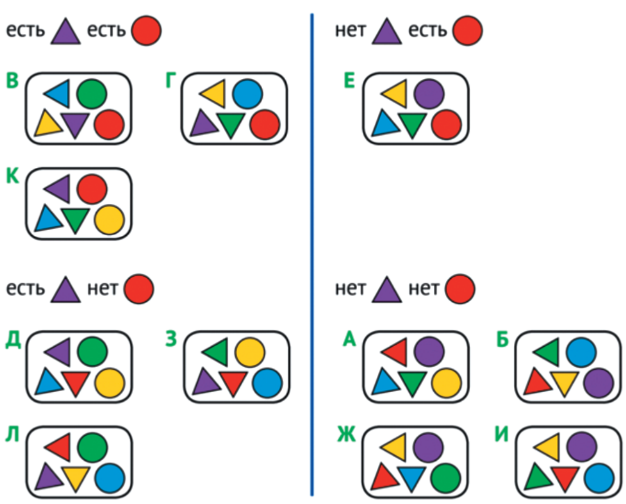


Рис. 9. Процесс решения задачи о поиске двух одинаковых мешков.

шаг такой стратегии может состоять в том, что мы из восьми утверждений оставим одно: несложно найти какое-нибудь число, для которого это утверждение истинно, и число, для которого оно ложно. Следующий шаг — выбрать из восьми утверждений какие-нибудь два и попроверять их для разных чисел. Выясняется, что можно найти числа, для которых оба истинны, оба ложны и т.д. Если изобразить соответствующие числа на числовой оси, то нащупывается путь к решению.

Решение данной задачи дает, разумеется, и внутриматематический результат — формирование “чувства числа”, интуиции перехода от внутреннего наглядного представления числа как протяженности (линейки), если угодно — записи в унарной системе, к числу, как цепочки десятичных цифр, длина которой — это логарифм числа.

Поиск одинаковых объектов. Поиск одинаковых объектов бывает непростой задачей даже в совсем небольшой совокупности. Пример такой задачи — на рис. 7.

Первая идея здесь — тоже действовать наугад, сразу увидеть, что две буквы похожи и дальше подтвердить, что они действительно одинаковы. Но что делать, если этот подход не дает результат? Возникает идея, например, сравнивать первую букву со всем следующими, потом вторую и т.д. — в данной задаче при таком подходе придется перебрать все буквы первого ряда и перейти к буквам второго ряда — решение находится при сравнении второй буквы второго ряда. Произошло изобретение стратегии перебора.

Этой задаче у нас в курсе предшествует другая: дан мешок букв, нужно найти в мешке такую же, как данная — предъявлена буква для поиска. Решение этих двух задач является прекрасным введением в проблематику математической и жизненной сложности: сложность поиска такого же объекта, как данный — линейна, поиска двух одинаковых — квадратична.

Конечно, есть и дополнительная проблема — организация поиска; об этом мы уже писали выше. В линейном случае нужно просто аккуратно просмотреть ряд картинок, расположенных построчно, или помечать галочкой уже просмотренные элементы мешка. В квадратичном случае дело сложнее. Оно может упроститься на компьютерном экране, где можно сделать две копии мешка, ставить галочки, зафиксировав очередной объект в первом мешке и пр.

2.3. Принцип “разделяй и властвуй”

Этот принцип состоит в том, чтобы разделить задачу на подзадачи, которые решаются независимо друг от друга, а потом собрать решение всей задачи из полученных решений для частей. Название этого принципа возникло в социальной практике (политике), но для нас важно его использование в программировании, математике, повседневной жизни.

Поиск одинаковых мешков

“Среди этих 11 мешков найди два одинаковых. Выпиши их имена” (см. рис. 8).

При решении этой задачи изображения мешков вырезаются из бумаги и раскладываются на столе. Затем начинается работа по их классификации. Например, в одних мешках есть фиолетовая треугольная бусина, в других нет; в одних есть круглая красная бусина, а в других нет. По этим двум признакам удается разбить все мешки на четыре группы (см. рис. 9).

Ясно, что искать одинаковые мешки нужно внутри одной группы. Это мешки Б и И.

Задачи, допускающие разбиение на независимые подзадачи, дают большой простор для организации работы в группах, в целом классе и даже в лекционной аудитории. На лекции в МПГУ мы выдавали каждому студенту факультета начального образования (их было около 300 человек) по мешку (прозрачному пакетику на молнии) с круглыми конфетами M&M разных цветов (количество разных цветов у M&M – 6). В каждом мешке было по 8 конфет. Нужно было отыскивать одинаковые мешки среди сотен похожих. Студенты быстро придумывают свои способы самоорганизации, чтобы выделить группы с одинаковыми мешками. Мы заранее предусматривали, чтобы некоторые мешки имелись в двух экземплярах, некоторые – трех и четырех. (Легко понять, что при случайном заполнении мешков одинаковых было бы немного.) Конечно, провести такую работу в классе среди 30 учеников проще, но если эти ученики – первоклассники, то это добавляет свою специфику организации работы по сравнению с работой со студентами.

2.4. Построение всех объектов с заданными свойствам

Пояснение. В РФ существуют монеты в 1 рубль, 2, 5 и 10 рублей. За время использования нашего учебника они в большой степени вышли из обращения. Поэтому некоторые наши задачи потеряли повседневный смысл. Но монетки по-прежнему удобно и наглядно использовать в школе. Обратим внимание, что решение этой задачи, как и других, имеет специфику в зависимости от среды деятельности учеников. В другой статье этого сборника [*М. А. Посицельская*, *А. Л. Семенов*, *Т. А. Рудченко.* Математические элементы начального образования] мы перечислили виды сред для работы с нашими комбинаторными объектами: телесные, графические и экранные. В этой задаче естественно использовать бумажные монетки. Их запас дети могут сделать сами, используя плотную бумагу и ножницы. В экранной среде подсчет суммы денег в кошельке может происходить автоматически, чтобы можно было сосредоточиться на комбинаторном аспекте задачи. Автоматическое суммирование можно и отключить, тогда параллельно с комбинаторикой тренируется устный счет.

Задача о кошельке с 6 рублями. “Нарисуй все кошельки с суммой в 6 рублей”. Как уже было сказано, важнейшее общее умение, которое ребенок должен приобрести и начать систематически применять в начальной школе – это умение пробовать. В данном случае сначала можно построить какой-нибудь, любой, кошелек. Если пересчитать деньги в нем, может получиться 6 рублей. Если это не так, можно попробовать еще раз и кошелек с шестью рублями в конце концов получится.

Следующая задача: как организовать построение *всех* кошельков? И здесь происходит *самостоятельное изобретение* той или иной стратегии (в крайнем случае возможна подсказка учителя) – например, попробовать перебрать все возможные количества монет достоинством в 1 рубль в кошельке.

В данном случае, положив в кошелек сколько-то рублевых монет, мы видим, что или их никак нельзя дополнить монетами другого достоинства до суммы в 6 рублей, или есть только один способ, добавляя что-то, получить 6 рублей. Оказывается, что рублевых монет может быть от 0 до 6, исключая 5 и 3 (см. рис. 10):

- 0 рублевых монет: 2 + 2 + 2
- 1 рублевая монета: 1 + 5
- 2 рублевые монеты: 1 + 1 + 2 + 2
- 3 рублевые монеты: нет вариантов
- 4 рублевые монеты: 1 + 1 + 1 + 1 + 2
- 5 рублевых монет: нет вариантов
- 6 рублевых монет: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Выбранное нами свойство, параметр – количество рублевых монет – полностью определяло строящийся объект. Мы понимаем, что это одномерная таблица – один параметр классификации объектов и возможностей их построения.

Все цепочки из трех бусин. “Нарисуй все цепочки из трех бусин, для которых истинны утверждения:

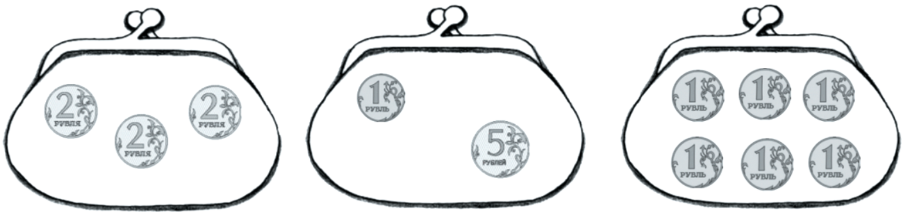


Рис. 10. Процесс решения задачи о построении всех кошельков с 6 рублями.

Рис. 11. Процесс решения задачи о построении всех цепочек из 3 бусин. Графическая заготовка по двум первым утверждениям.

Рис. 12. Процесс решения задачи о построении всех цепочек из 3 бусин. Три варианта раскраски средней бусины.

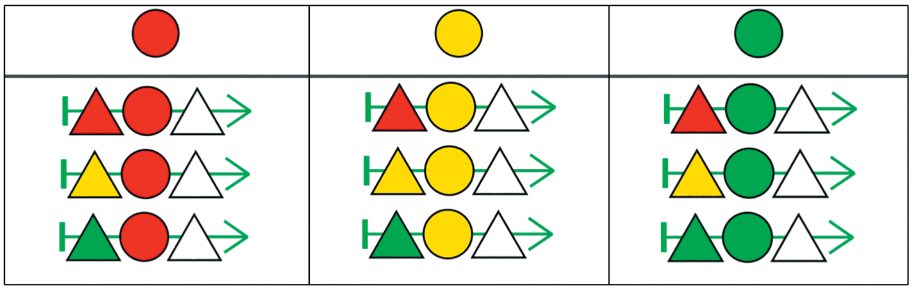


Рис. 13. Процесс решения задачи о построении всех цепочек из 3 бусин. По три варианта раскраски первой бусины.

В цепочке первая и третья бусины – треугольные.

В этой цепочке вторая бусина – круглая.

Каждая бусина в цепочке либо красная, либо желтая, либо зеленая.

В цепочке все бусины разные.”

Первые два утверждения можно выразить графически, нарисовав заготовку цепочки с нераскрашенными бусинами, и больше к этим утверждениям не возвращаться (см. рис. 11).

Замечательно, если ученику удастся сделать это изобретение *самостоятельно* – нарисовать все бусины, но не раскрашивать, а оставить белыми, получить частичное решение, фиксировать количество бусин и их формы, оставляя свободным выбор цвета для бусины, пока не принято решения о том, в какой цвет ее покрасить. Не страшно, а даже полезно, если ученик просто вычеркнет первые два утверждения, но лучше каждое из них обвести овалом и поставить рядом с ним букву И (истинно) или + (уже рассмотрели и выполнили).

Следующее в этой задаче важное *самостоятельное изобретение* – это попробовать что-то сделать наугад, об этом мы уже говорили. В данном случае – покрасить одну бусину (а можно – и все), и посмотреть, что получится. Большая идея – “метод проб и ошибок” (Trial and error, Guess and check, попробовать, сделать наугад) – здесь получает очередное подкрепление. Следующее изобретение – это, сделав какой-то ход (покрасив бусину), понять, а каковы были другие возможности (т. н. *альтернативы*) для этого хода. В нашем случае – это цвет круглой бусины.

Следующая проблема, как все эти альтернативы представить в голове и на бумаге. Довольно естественно три цепочки, в каждой из которых раскрашена только средняя бусина, нарисовать рядом, одну за другой (см. рис. 12).

Каждое из этих изобретений учитель мог бы директивно навязать ученику. Но это значило бы лишить ученика удовольствия сделать изобретение или открытие самостоятельно, задержать формирование соответствующей большой идеи (обобщающей одно маленькое изобретение) “до следующего раза”, или “до никогда”, “до греческих календ”.

Идем дальше. Самый смелый может в первом столбце как-то покрасить первую бусину цепочки. Можно рассмотреть все альтернативы и для этого действия. Получаются три цепочки, которые можно разместить под цепочкой, где раскрашена только круглая бусина, получается первый столбец таблицы. Для каждой альтернативы полезно проверить, не нарушили ли мы какое-то из исходных условий задачи (см. рис. 13).

В ходе решения задачи мы выясняем, что возникающие перед нами возможности и выборы бывают двух сортов: можно выбирать, что делать следующим (какую по счету бусину пытаться покрасить следующей) и выбирать, как именно это делать (в какой цвет покрасить эту бусину). Можно обсудить, в каком порядке рассматривать возможные цвета. Например: сначала будем говорить о красном, потом о желтом, и в конце о зеленом (как в светофоре).

Итак, мы красим первую бусину тремя возможными способами, при этом рисуем еще три цепочки в первом столбце. Три цвета, три возможности, дали три (частичных) результата – три

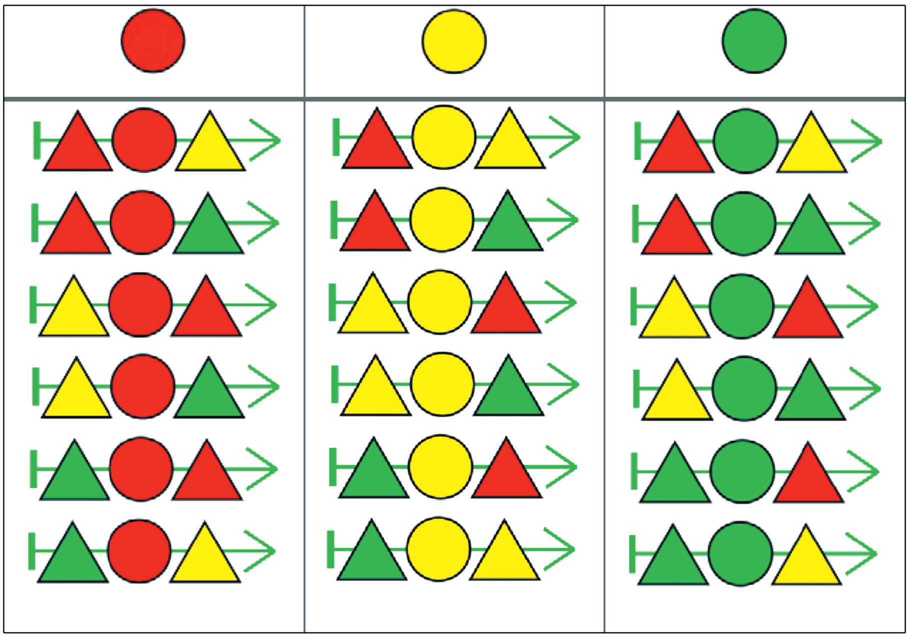


Рис. 14. Процесс решения задачи о построении всех цепочек из 3 бусин. По два варианта раскраски третьей бусины.

цепочки. Стоит обсудить и понять, почему две уже закрашенные бусины разные. Ученик понимает и может объяснить, что они разные по форме. Кто-то из детей продолжит работу с первым столбцом, кто-то захочет дорисовать другие столбцы, чтобы в них было по три цепочки.

Можно сразу же посмотреть, как можно покрасить последнюю бусину в цепочках первого столбца. И здесь надо внимательно следить, чтобы одновременно рассмотреть все возможности и не нарушить условие.

После покраски двух бусин существенным становится третье условие: все бусины разные. И здесь мы видим, что у третьей бусины теперь есть только два варианта цвета, когда первые две бусины уже покрашены. Это непросто. Если кто-то сделал ошибку, надо попросить его объяснить, как он действовал. Можно напомнить о необходимости и соблюдения условий, и перебора всех возможностей.

Можно попытаться предсказать, НЕ закрашивая последнюю бусину, сколько у нас будет возможностей, вариантов для каждой нарисованной цепочки. Становится ясным, что из каждой цепочки нам нужно сделать две. Значит, можно заранее предсказать, сколько всего у нас будет цепочек (см. рис. 14).

Заметим, что при такой работе все шаги перебора получают наглядное графическое выражение.

Подчеркнем важное обстоятельство, которое должны понять ученики. Хотя перебор может быть организован по-разному, и мы по-разному можем расположить объекты в таблицах, но ответом является один-единственный *мешок (совокупность)* объектов; в этом мешке объекты никак не упорядочены.

В какой среде идет работа? В данном случае использование телесных цепочек не очень реально, хотя для более простых задач, скажем, где результат включает 4 или 6 цепочек — полезно. Использование графической среды (на бумаге) тоже имеет свои варианты. В частности, цепочки могут целиком рисоваться детьми, а могут раскрашиваться по готовым шаблонам. Цепочки могут заранее вырезаться и наклеиваться и т.п.

На экране, конечно, возможностей больше. Там, например, можно использовать среду, где легко дублировать объекты, бусины можно перекрашивать и пр. При дистанционной работе дети рисуют свои цепочки на белой доске, а потом передвигают их по общему полю, убирая дубликаты и нащупывая принцип, позволяющий структурировать процесс перечисления.

Обычно таблица возникает далеко не сразу. Вначале дети индивидуально рисуют разные цепочки и сравнивают их количество. При возникновении таблицы полезно просить детей заполнять ее по группам. Дети вырезают уже имеющиеся у них цепочки и раскладывают их в таблицу. После того, как все убедились, что в таблице нет одинаковых цепочек, их можно наклеить, а недостающие — дорисовать.

2.5. Организация перебора. Последовательность выборов

Вопросы для разбиения всех вариантов на классы, определения параметра для возможностей выбора и, тем самым, организации перебора, могут быть самыми разными. Очень хорошо, если ученики будут предлагать разные основания для классификации. Рассмотрим, например, такую задачу:

Задача о цепочках длины 3. "Перечислите все цепочки длины 3, состоящие из букв А, Б и В, для которых истинны утверждения:

- В цепочке есть две одинаковые буквы.
- В цепочке есть две разные буквы."

Начать можно с того, что спросить: могут ли в какой-то цепочке, которую мы хотим построить, встретиться все три буквы А, Б, и В?

В связи с этой задачей существенно вспомнить о договоренности, широко используемой в математике. Когда мы говорим "цепочка, состоящая из букв А, Б и В" – это не значит, что все три буквы в цепочке обязательно должны присутствовать. Даже и две различные буквы присутствовать не обязаны, да и вообще букв может не быть – цепочка может быть пустой. Здесь мы утверждаем лишь, что каких-то еще букв, кроме указанных, в цепочке точно нет. Большой неожиданностью для учеников могут стать ситуации, в которых принятые в математике умолчания контр-интуитивны, но формально верны. Здесь, конечно, важны такт и компетентность учителя. И это – большая идея: в некоторых случаях понимание слов есть результат договоренности – часто при этом цитируют Льюиса Кэррола [22], в частности, этот отрывок (в переводе Н.М. Демуровой):

– Когда *я* беру слово, оно означает то, что я хочу, не больше и не меньше, – сказал Шалтай презрительно.

– Вопрос в том, подчинится ли оно вам, – сказала Алиса.

– Вопрос в том, кто из нас здесь хозяин, – сказал Шалтай-Болтай. – Вот в чем вопрос!

["When *I* use a word," Humpty Dumpty said in rather a scornful tone, "it means just what I choose it to mean—neither more nor less."

"The question is," said Alice, "whether you can make words mean so many different things."

"The question is," said Humpty Dumpty, "which is to be master—that's all."]

Обсуждение слов, их употребления и значений является полезной частью начального образования в курсах математики, информатики и лингвистики (родного языка и родной речи).

В данной задаче естественно использовать одну из больших идей, – а именно, придумать какой-то *более простой вариант задачи*. Как и в других проблемных ситуациях, предложение детям придумать задачу попроще открывает содержательные возможности, и желательно, чтобы ученики придумали упрощение сами. Можно, например, рассмотреть случаи, когда в нашем распоряжении есть не три разных буквы, а две, или даже, одна буква. В последнем случае у задачи, конечно, решений нет, но это полезно заметить самим ученикам. Если разных букв две, например, это А и Б, то задача становится более содержательной. И здесь тоже можно предложить детям дальше ее упростить. Многие могут сообразить, что дальнейшее упрощение состоит в том, что в цепочке ровно одна, или ровно две буквы А; трех быть не может, как мы уже установили.

Вспомогательная задача. "Перечислите все цепочки длины 3, в которых есть две буквы А и одна буква Б".

Ученики быстро выписывают эти цепочки: конечно, цепочка определяется местом, где находится Б: |-А-А-Б->, |-А-Б-А->, |-Б-А-А->. Полезно проверить, что для этих цепочек выполнены оба утверждения из условия задачи.

Найденный "паттерн" из трех цепочек может быть использован и в решении исходной задачи. При таком использовании новой большой идеей может быть именно "одинаковость", "изоморфизм" ситуаций, формально разных. С детьми можно говорить о "похожих" цепочках, при этом стараясь прояснять, что "похожесть" означает в данном случае.

Перебор в основной задаче можно организовать разными способами, и ученики действительно подходят к нему по-разному. Вполне тривиальная и при этом большая идея разных способов решения задачи обычно противоречит традиционному "школьному" мышлению и обучению, с единственно правильными решениями, заучиванием наизусть и т.п.

Пусть ученик выбрал какое-то свойство цепочек. Нужно сразу же понять, какими могут быть значения этого свойства и, в частности, проверить, что другие значения невозможны. Цепочки с одинаковым значением можно сложить в один столбец таблицы и назвать этот столбец значением этого свойства.

Мы приведем пять способов, реально встречающихся в детских работах.

В качестве свойства можно взять количество букв А в цепочке. Сразу выясняется, что больше двух это количество не может быть. Дальше не будем прорисовывать линии цепочки, чтобы было легче читать (см. рис. 15).

В этой таблице возникла упорядоченность: в верхней строчке каждой клетки у нас "главной", в дополнении к А, была буква Б (она встречается дважды), в нижней – буква В. Может возникнуть идея двумерной таблицы. Именем первой строч-

Сколько в цепочке букв А?

0	1	2
БББ БВБ ВББ	ББА БАБ АББ	ААБ АБА БАА
ВВБ ВБВ БВВ	ВВА ВАВ АВВ	ААВ АВА ВАА

Рис. 15. Процесс решения задачи о цепочках букв длины 3. Построение по свойству 1.

Какая буква входит в цепочку дважды?

А	Б	В
ААБ АБА БАА	ББА БАБ АББ БВВ	ВВА ВАВ АВВ
ААВ АВА ВАА	БВБ ВББ	ВВБ ВБВ БВВ

Рис. 16. Процесс решения задачи о цепочках букв длины 3. Построение по свойству 2.

Какой буквы нет в цепочке?

А	Б	В
БВВ БВБ ВББ ВВБ	ВВА ВАВ АВВ	ББА БАБ АББ
ВБВ БВВ	ААВ АВА ВАА	ААБ АБА БАА

Рис. 17. Процесс решения задачи о цепочках букв длины 3. Построение по свойству 3.

На каком месте стоит та буква, которая входит в цепочку один раз?

На первом	На втором	На третьем
АББ БАА ВББ АВВ	БАБ АБА АВА	ББА ААБ ААВ
БВВ ВАА	ВАВ ВБВ БВБ	ВВА ВВБ ББВ

Рис. 18. Процесс решения задачи о цепочках букв длины 3. Построение по свойству 4.

Какая первая буква в цепочке?

А	Б	В
ААБ АБА АББ	ББА БАБ БАА БВВ	ВВА ВАВ ВАА
ААВ АВА АВВ	БВБ БВВ	ВВБ ВБВ ВББ

Рис. 19. Процесс решения задачи о цепочках букв длины 3. Построение по свойству 5.

ки станет Б, именем второй строчки — В. Кто-то из детей может заметить симметрию: нижняя строчка получалась из верхней заменой Б на В, а В на Б.

Или можно перебирать по букве, которая входит в цепочку дважды (см. рис. 16).

Здесь мы тоже, переходя от верхней строчки к нижней, следовали алфавитному порядку.

Есть и такое рассуждение: раз есть две одинаковые буквы, значит, какая-то из трех букв не входит в цепочку (см. рис. 17).

Какая буква входит в цепочку только один раз? См. рис. 18.

И, наконец, можно взять первую букву в цепочке (см. рис. 19).

Полезно обсудить разные способы организации перебора, предлагая ученикам каждому рассказать о своем способе. В некоторых случаях можно показать детям готовую классификацию, просить их угадать и сформулировать принцип этой классификации.

2.6. Двумерная таблица. Формула умножения

Двумерная таблица соответствует случаю, когда у нас есть два свойства объекта и мы хотим перебрать все их комбинации, причем все объекты оказываются различными. Если для какой-то комбинации объекта нет, можно соответствующую клетку зачеркнуть, чтобы не забыть, что эту комбинацию мы уже рассмотрели.

Двумерную таблицу можно использовать, например, для перебора двузначных чисел (см. рис. 20, 21).

Таблица хороша для работы в группах: сначала все дети пишут числа хаотично на отдельных листочках, потом кто-то (в крайнем случае — учитель) предлагает заполнить таблицу, и теперь уже каждый ищет для своих чисел места в таблице. Иногда таблица дается детям с самого начала, и каждому достается свой столбик, который нужно заполнить.

1. Заполни таблицу двузначными числами.

Сколько существует двузначных чисел, у которых обе цифры нечётные? ☐

Первая цифра (десятки)	Вторая цифра (единицы)				
	1	3	5	7	9
1					
3					
5					
7					
9					

Рис. 20. Задача о переборе двузначных чисел.

2. Мы хотим узнать, сколько существует трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные. Составим таблицу, как в задаче 1.

Для первой цифры есть только 5 возможностей.

Мы начали выписывать варианты второй и третьей цифры, но их оказалось слишком много. Посмотри в задаче 1: сколько вариантов для второй и третьей цифр?

первая цифра (сотни)	вторая и третья цифры (десятки и единицы)										
	11	13	15	17	19	31	33	35	37	...	97	99
1										...		
3										...		
5										...		
7										...		
9										...		

Сколько трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные?

Рис. 21. Задача о переборе трехзначных чисел.

Иногда можно ответить на вопрос, сколько есть тех или иных комбинаций цифр, не выписывая все числа. То есть для подсчета количества вариантов оказывается достаточно убежденности, что в каждой клетке таблицы есть ровно одно число, и эти числа во всех клетках разные. Если все объекты, которые надо создать, являются “независимыми комбинациями” (упорядоченной) пары объектов, то эти объекты можно так и предъявить, а их количество получится как произведение. Тем самым “формула произведения” оказывается непосредственным следствием построения пары и определением произведения, как числа квадратиков в прямоугольнике (его площади). Перечисляя нужные комбинации при помощи таблицы, ученики сами приходят к “формуле произведения” вариантов. Она становится для них понятной и естественной. Тут же возникает много поводов разобраться с тем, когда эта формула не работает – например, если в какой-то клетке таблицы нет вариантов и мы перечеркнули ее крестом, количество вариантов уже не равно произведению количества строк на количество столбцов. При обсуждении задачи о трехзначных числах (еще до того, как дети увидели эту задачу в учебнике) кто-то может сообразить, что количество столбцов в таблице – это в точности количество клеток в задаче про двузначные числа с нечетными цифрами. Это – настоящее открытие, и оно не становится меньше от того, что потом мы прочтем про него в формулировке задачи.

Мы уже обращали внимание, что для нас удобным объектом для переборных задач являются традиционные российский монеты достоинств 1, 2, 5 и 10 руб. Они добавляют к чисто комбинаторному еще и арифметическое содержание: нарабатываемые навыки быстрого суммирования пригодятся ребенку в любом случае.

Возвращаясь к комбинаторному аспекту, мы отмечаем, что у кошелька с такими монетами есть 4 свойства: количество рублевых, 2-рублевых, 5-рублевых и 10-рублевых монет. Если нас интересует сумма денег в кошельке, то естественно ее анализировать, начиная с монет большего достоинства. Как всегда, было бы хорошо, чтобы это предложение исходило от кого-то из учеников.

Задача о кошельке с 36 рублями. Найти все способы набрать 36 рублей монетами по 2, 5 и 10 рублей.

Попробуем перебирать все варианты с фиксированным количеством монет достоинством в 10 и 5 рублей – это дает нам двумерную таблицу. В каждой клетке должно появиться указанное количество 10- и 5-рублевых монет и еще сколько 2-рублевых, чтобы в сумме получилось 36 рублей. Начав заполнять таблицу, ученик быстро приходит к выводу, что одной клетке таблицы соответствует или один-единственный вариант наполнения кошелька, или ни одного варианта. Этот экспериментальный факт стоит обсудить и дать ему “теоретическое объяснение” (см. рис. 22).

Некоторые клетки можно вычеркнуть сразу. Например, если в кошельке уже есть 6 пятирубле-

	Нет 5-руб. монет	5 · 1	5 · 2	5 · 3	5 · 4	5 · 5	5 · 6
Нет 10-руб. монет	2 · 18						
10 · 1					10 · 1 5 · 4 2 · 3		
10 · 2							
10 · 3							

Рис. 22. Решение задачи о кошельке с 36 рублями.

вых монет — это уже 30 рублей, добавлять туда еще 3 десятирублевые монеты бессмысленно — сумма получится точно больше заданных 36 рублей. Обсудив это обстоятельство, можно предложить всем вычеркнуть и другие клетки, в которых еще до добавления двухрублевых монет получается слишком большая сумма. Если кто-то из детей заметит, что такие клетки располагаются около правого нижнего угла таблицы, важно обсудить всем вместе, почему так получается.

Возможно, кто-то из детей поймет, что в некоторых столбцах не возникает ни одного решения и спросит, чем это объясняется. Довольно тонкое объяснение, с использованием соображения четности, оказывается доступным существенно большей доле учащихся благодаря тому, что они сами проводят эксперимент и пытаются объяснить его результат.

Задача о поиске всех делителей числа. С помощью таблицы хорошо перебирать все делители числа, имеющего только два простых делителя. Это упражнение закрепляет представление о числе как о произведении мешка его простых сомножителей.

Вот, например, все делители числа 1000000 (см. рис. 23).

Эта таблица устроена как обычная таблица умножения — в каждой клетке стоит произведение числа, стоящего в имени столбца, и числа, стоящего в имени строки. Каждый делитель миллиона представим в виде произведения какого-то количества двоек и какого-то количества пятерок, значит, мы ничего не потеряли. Таким образом, у числа 1000000 имеется 49 делителей. Можно провести соревнование — кто сможет заполнить больше клеток таблицы, не используя калькулятор.

Конечно, из приведенной таблицы не вытекает, что у числа 1000000 нет других делителей — например, числа 7 или числа 128. Эти два факта, как и другие аналогичные, можно проверить экспериментально — при помощи калькулятора. Общий же факт — что в нашей таблице есть все делители числа 1000000 — есть частный случай основной теоремы арифметики.

2.7. Два последовательных выбора. Мешки и цепочки

Рассмотрим простую модельную задачу, в которой у учеников начинает формироваться идея последовательных выборов в разных представлениях объектов. В ней в условиях, ограничивающих класс объектов, используется числовое отношение *больше* (см. рис. 24).

Начать необходимо с обсуждения вопроса: если в цепочке желтых бусин — две, а зеленых нет совсем — верно ли, что желтых больше, чем зеленых? Можно предложить детям обменяться мнениями по этому вопросу и в конце концов сформулировать общую идею, что если каких-то бусин нет, то их количество равно 0. Далее надо сравнивать количества бусин: если желтых 2, а зеленых 0, то желтых больше, чем зеленых, потому что 2 > 0. Можно начать и с того, что слова “используя

умножить на	$5^0 = 1$	$5^1 = 5$	$5^2 = 25$	$5^3 = 125$	$5^4 = 625$	$5^5 = 3125$	$5^6 = 15\,625$
$2^0 = 1$							
$2^1 = 2$							
$2^2 = 4$							
$2^3 = 8$		40					
$2^4 = 16$							
$2^5 = 32$							
$2^6 = 64$							

Рис. 23. Решение задачи о поиске всех делителей числа 1 000 000.

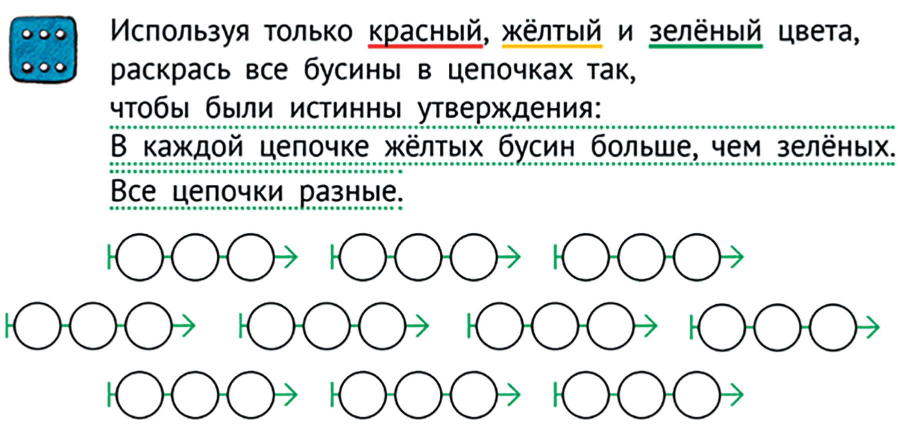


Рис. 24. Задача о раскраске бусин в цепочках длины 3.

только красный, желтый,...” надо понимать таким образом, что использовать можно только перечисленные цвета, но при этом, например, красный можно не использовать вовсе. Это – математический язык!

Затем можно предложить ученикам нарисовать мешки из 3 бусин, из которых можно составлять цепочки, годящиеся для решения задачи. Перебирать можно по числу желтых бусин, сразу определяя, сколько может быть зеленых, и добавлять красных до трех.

Мешков оказывается 4:

- 3 желтых,
- 2 желтых 1 красная,
- 2 желтых 1 зеленая,
- 1 желтая 2 красных.

Можно составить таблицу, где эти мешки будут именами столбцов. В клетки таблицы можно вписать получающиеся цепочки (см. рис. 25).

2.8. Дерево перебора

Что такое дерево перебора? В корне дерева мы помещаем условие задачи. В развилках дерева пишем вопросы, позволяющие разбить все множество вариантов на классы. На каждой ветке – ответ на вопрос. Наконец, в листах дерева размещаем собственно перебираемые или строящиеся объекты. Дерево перебора часто оказывается двоичным деревом (например, если всегда имеются в виду ответы “да” или “нет”), но так бывает далеко не всегда (см. рис. 26).

В каждой развилке (узле дерева) стоит вопрос. Если ответы на уже заданные вопросы не опреде-

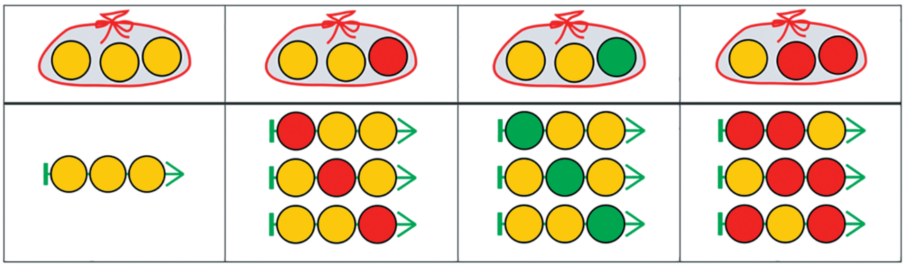


Рис. 25. Решение задачи о раскраске бусин в цепочках длины 3.

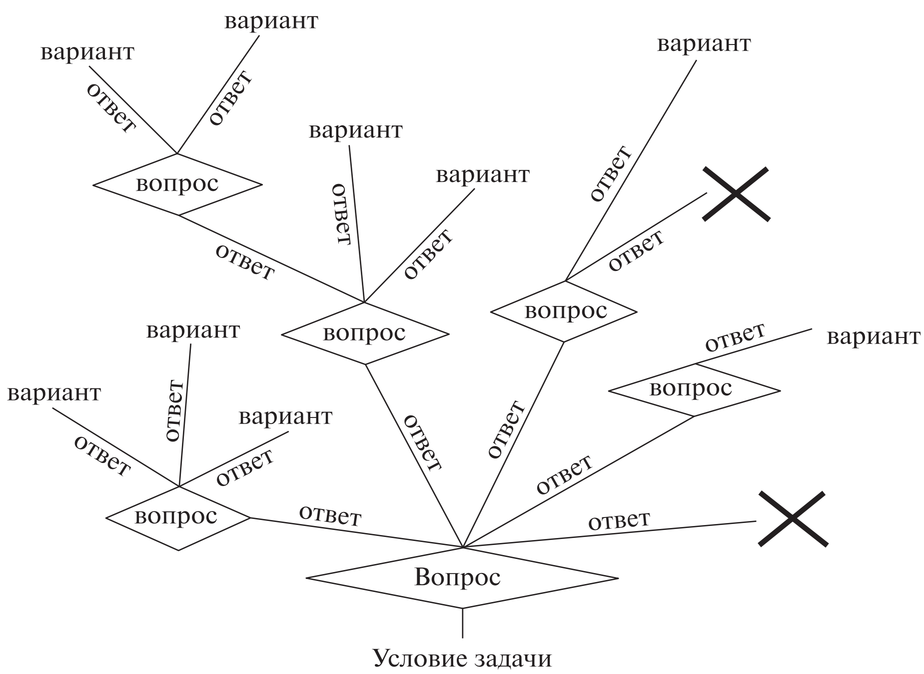


Рис. 26. Схема дерева перебора.

ляют строящийся объект однозначно, необходимо задать еще один вопрос. Если мы видим, что какой-то ответ не дает ни одного варианта действия и построение завершается неудачей, ставим крест.

Если на вопрос только один ответ, то из развилки выходит только одна ветка. Это может быть, когда мы уже пришли к конечному варианту (листу дерева), но может быть, мы хотим задать еще какой-то вопрос, чтобы убедиться, что мы ничего не забыли — на этот вопрос ответов будет несколько, но при всех других вариантах ответа что-то не сойдется с условием и вариантов нет — ставим там кресты.

Для задач в начальной школе путь от корня к листу не должен быть слишком длинным — не больше 5 развилок, иначе ребенку будет трудно совместить в голове одновременно все ответы на вопросы, которые были заданы, даже если ответы выписаны около ветвей. Исключение можно сделать в случае очень однородных вопросов, например, при угадывании загаданного числа из данного диапазона. Чтобы уменьшить высоту дерева, при прочих равных стоит выбирать вопрос так, чтобы на него было побольше возможных ответов — т.е. увеличивать ветвление, а не высоту дерева. Это значит, что из двух вопросов: “Есть ли в мешке число 6?” и “Каково наименьшее число в мешке?” мы отдаем предпочтение второму.

Во многих задачах полезно изобразить на большом листе бумаги полное дерево перебора. В задачах с однотипными, повторяющимися ветками бывает достаточно нарисовать его частично.

В обсуждении школьной математики часто акцентируется важность задач, у которых много числовых “ответов” или нет “ответа”. Например, тема работы [23] — это именно построение множества “ответов”, при этом множество это может

Выпиши все цепочки из семи однозначных чисел, для которых истинны утверждения:

Первое число в цепочке — 2.
Каждое следующее число в цепочке больше предыдущего.
Все цепочки разные.

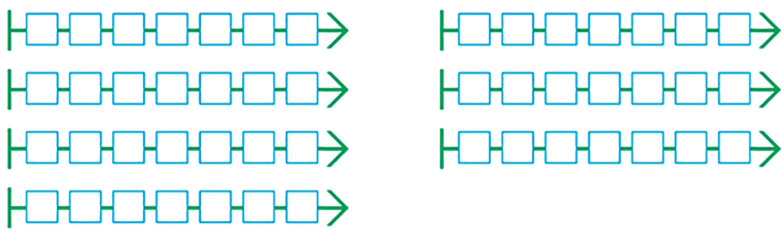


Рис. 27. Задача о цепочках из семи чисел.

оказаться и пустым. В случае перебора с помощью дерева возможность отсутствия ответа становится очень наглядной — вполне может оказаться, что все пути дерева закончатся крестами. Это означает, что объекта, удовлетворяющего данной системе условий, не существует. Конечно, такой ответ может быть ошибочным, если что-то при построении было сделано неправильно, например, пропущена какая-то ветвь. И в таком случае нарисованное дерево помогает ребенку еще раз проверить свое решение, найти и исправить свою ошибку — самостоятельно или с помощью учителя.

Заметим, наконец, что дерево является естественным сочетанием и обобщением двух базовых структур в нашем курсе: цепочки (последовательность выборов) и совокупности (мешка) альтернатив — ветвей, выходящих из одного узла.

Дерево перебора в графическом или мыслимом виде удобно использовать для перечисления всех:

• мешков с заданными свойствами, в том числе — мешков чисел с заданной суммой или произведением;

• цепочек и циклов с заданными свойствами (в частности, цепочек цифр в арифметических ребусах);

• частей геометрической конфигурации с некоторым свойством, например, все пятиугольники на данном чертеже;

• ходов в дереве игры;

• объектов в задачах, где задается частичная информация о соответствии между объектами и их свойствами и надо восстановить полную картину — таким задачам посвящена целая книга [24]. Некоторые из задач там решаются с помощью двумерных таблиц, в других используются деревья.

2.9. Перебор цепочек

Перебирать цепочки проще всего, строя первый, второй, третий элемент (бусину) цепочки и т.д. Однако возможны и другие стратегии. Например, иногда удобнее строить цепочку с конца, или с какой-то выделенной бусины, свойства которой известны, или в качестве вариантов первого хода фиксировать и номер бусины, и значение ее свойств. Одна из общих продуктивных стратегий состоит в том, чтобы фиксировать максимум информации, которую удается извлечь, или из условия задачи, или из уже полученной. В результате будет возникать частично определенная цепочка, в которой постепенно некоторые бусины приобретают форму, другие — цвет, известны длины отдельных участков, но их взаимное расположение пока не известно, и т.д.

Задача о монотонных цепочках. В следующей задаче параметры перебора не очевидны заранее и возникают при использовании осваиваемой учениками стратегии “попробовать как-нибудь”. В задаче используются арифметические термины, такие как *больше на*, *больше в*, *не более, чем на* и т.п. Тем самым при ее решении закрепляются арифметические понятия, но основная суть здесь все-таки комбинаторная (см. рис. 27).

Ученик начинает пробовать, поставив на первое место в цепочке 2, как сказано в условии: тут вариант только один. Что поставить на следующее место? Чтение условия показывает, что у нас есть выбор из чисел: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Осторожный и понимающий ребенок поставит на это место 3, более “рисковый” — 9. “Математик”, опытный экспериментатор, поставит, например, 5 и посмотрит, что будет дальше. В какой-то момент в обсуждении может появиться идея в качестве следующего брать самое маленькое возможное число. Получится цепочка: |-2-3-4-5-6-7-8->.

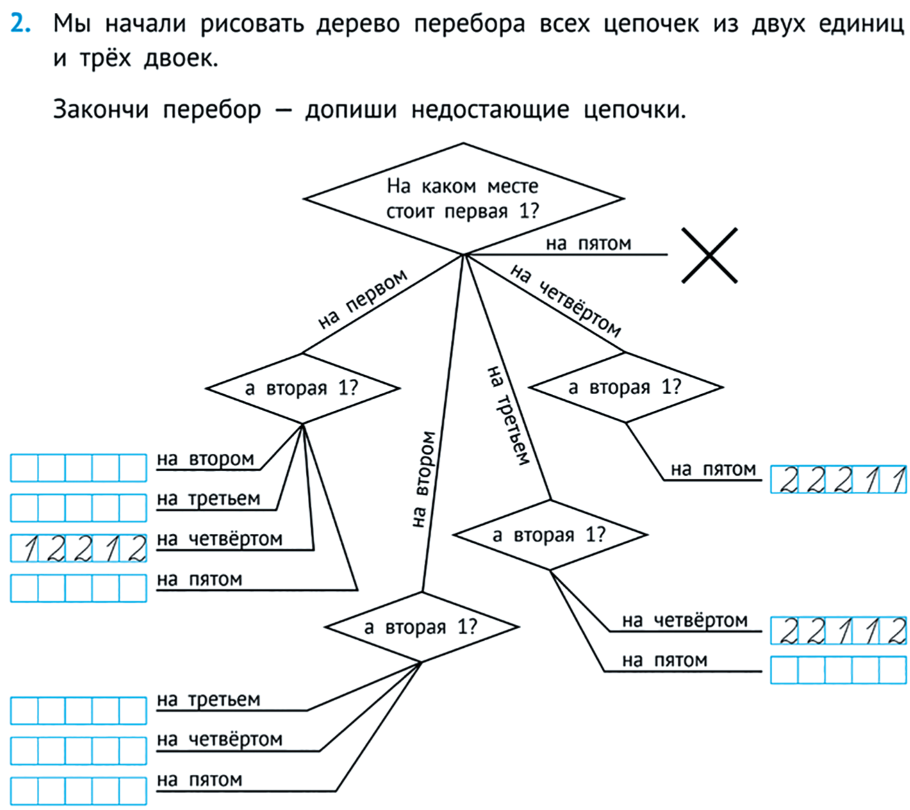


Рис. 28. Задача о цепочках из единиц и двоек.

Один вариант требуемого объекта построен. Одновременно мы поняли, что не любой из разрешенных выборов второго элемента цепочки перспективен. Некоторые такие выборы “заранее обречены”. Таким образом, последовательно осуществляется несколько выборов, некоторые выборы заканчиваются тупиком – не приводят к построению никакого объекта. Это приводит нас к визуализации ходов и тупиков перебора в виде дерева и формулирования соответствующей системы понятий.

Задача о цепочках из единиц и двоек. Дано незавершенное дерево перебора – детям предлагается поместить нужные цепочки в листья дерева (см. рис. 28).

Итак, дерево помогло нам построить все цепочки, ничего не упустить. Новизна здесь в переходе от двух выборов к их результату – построенной цепочке.

2.10. Перебор мешков

Дерево перебора мешков чисел с произведением 128. Детям предлагается понять принцип построения дерева и написать нужные числа в мешках. Перед началом работы с деревом полезно разложить число 128 на простые множители и выписать все делители этого числа (см. рис. 29).

Задача не первый взгляд выглядит не такой уж сложной. Но все же большинству учащихся без какой-то подсказки, например, в виде этого дерева, решить ее будет сложно. Можно, после решения с деревом, предложить ученикам решить ее иначе. Обсудить сначала, каким может быть самое большое число в мешке. Потом коллективно рассмотреть случаи, когда это число 128 и 64. После этого разбить класс на группы, предложив ученикам каждой группы самим выбрать самое большое число. Один из вопросов – определить список возможностей.

2.11. Перебор геометрических конфигураций

При изучении геометрии в средней школе зачастую оказывается, что детям сложно найти на чертеже фигуру с данным именем. Особенно это касается обозначения углов тремя буквами. В начальной школе можно поработать только над этим, не отвлекаясь на более сложные вещи – задачи, определения, аксиомы и теоремы. Кроме того, можно привлечь более широкий контекст, в том числе – топологический, рассмотреть многоугольники более общие, чем в стандартном курсе геометрии.

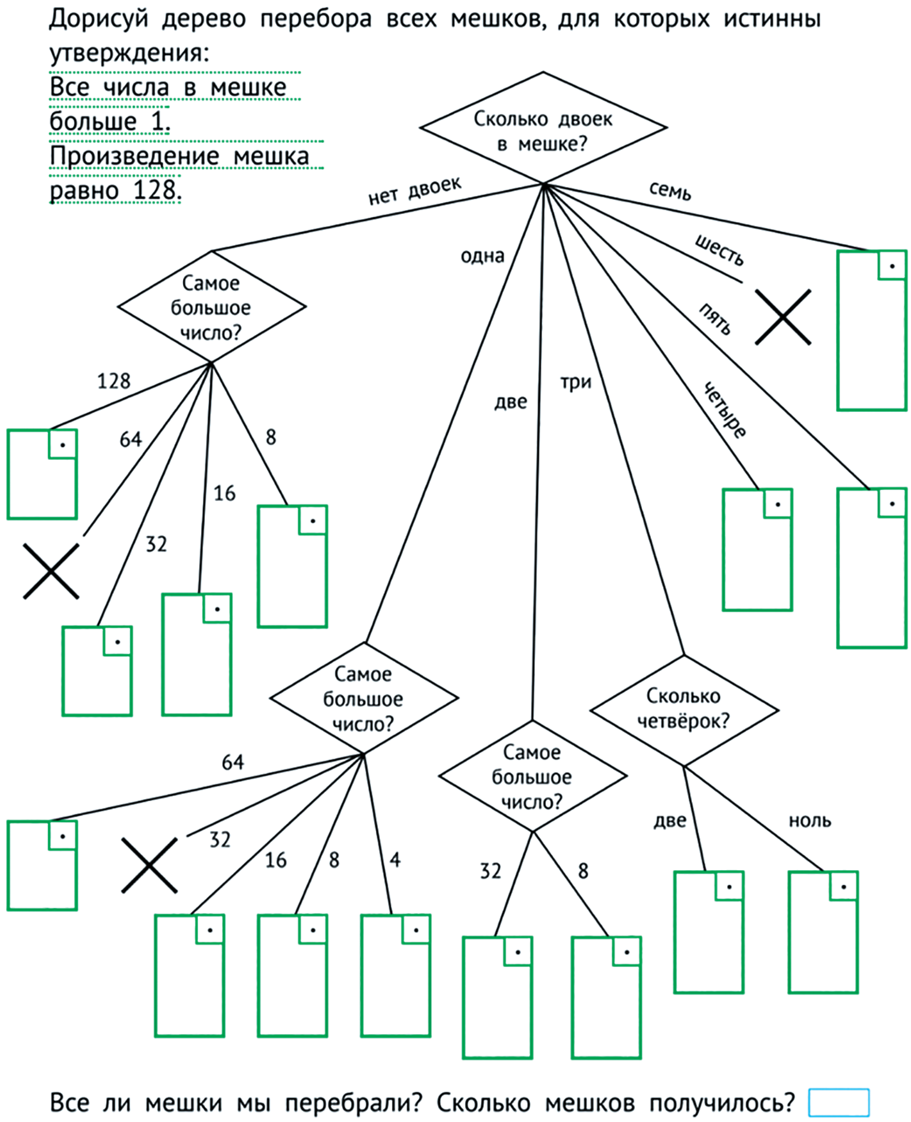


Рис. 29. Задача о переборе мешков чисел с произведением 128.

В самом начале курса дети усваивают понятие *области* на картинке, т.е. компоненты связности, которую можно раскрасить, не пересекая границ (см. рис. 30).

Далее детям демонстрируются разные примеры областей, являющихся многоугольниками, на картинке выделяются вершины и стороны, указывается количество вершин и сторон для них (см. рис. 31).

Рис. 30. Задача о подсчете областей в картинке.

Математическая сторона дела, которую мы объясняем на примерах, не вводя терминов, такова. Многоугольник – это фигура, ограниченная замкнутой несамопересекающейся ломаной. То есть многоугольник – не обязательно выпуклая фигура. Вот примеры *не многоугольников*, которые помогают нам объяснять, что имеется в виду (см. рис. 32).

Левая фигура состоит из двух кусков, которые не составляют вместе многоугольник. Правая фигура имеет “дырку” внутри, ее граница – не одна замкнутая линия, а две; это тоже не многоугольник.

Рис. 31. Примеры областей, являющихся многоугольниками.

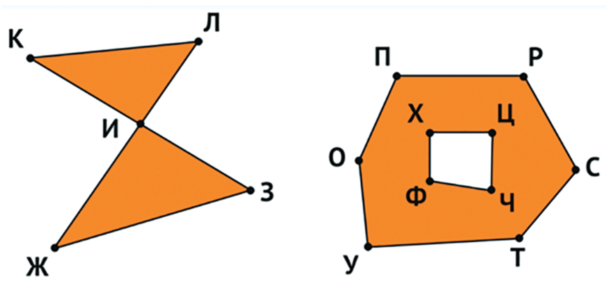


Рис. 32. Примеры не многоугольников.

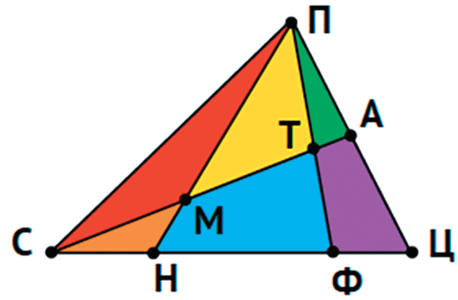


Рис. 33. Рисунок к задаче о перечислении треугольников.

Задача о поиске всех треугольников. “Перечислите все треугольники, изображенные на чертеже ниже (см. рис. 33).

В переборе здесь легко запутаться. Что может помочь упорядочению перебора? Можно предложить ученикам подсчет числа (одноцветных) областей, образующих какой-то из треугольников, которые мы хотим найти.

Дальше мы приводим подробный, довольно сложный разбор всех случаев. Задача учителя организовать работу всех учащихся, предлагая каждому, или каждой группе, свою систему “наводящих” вопросов так, чтобы всюду очередная задача была посильной и трудной. Формулируемые далее вспомогательные утверждения могут возникать в диалоге с классом, изобретаться самими детьми.

Рассмотрим сначала области *одного* цвета — всего на чертеже 6 таких областей, 4 из них треугольные.

Следующий шаг – объединять по *две* области, имеющие общую границу. Всего таких границ и фигур-объединений на чертеже 7, 6 из них – это треугольники.

Некоторые дети уже на этих случаях начинают “видеть” треугольники. Важно дать возможность каждому ученику двигаться самостоятельно, со своей скоростью. Они могут довольно быстро находить некоторые примеры в каждом из случаев. Но нужно еще убедиться, что найдены *все* примеры.

Посмотрим, сколько треугольников можно составить из *трех* областей. Сначала заметим, что среди трех областей, составляющих треугольник, должна быть одна, которая граничит с двумя другими. Это утверждение интересно обсудить: если у первой области есть общая граница только со второй, то вторая должна иметь границу с третьей; или можно считать его очевидным. Значит, можно перебрать все шесть закрашенных областей, к каждой из них добавить две, возможно, разными способами и из получившихся фигур выбрать треугольники.

Хотя это можно сделать и устно, в коллективном обсуждении, но кому-то из детей может понравиться организовать перебор в виде дерева. В помощь таким детям можно дать много копий исходных нераскрашенных чертежей. Тогда в узлах дерева можно рисовать частично раскрашенные треугольники.

Из корня мы попадем в 6 рисунков, где закрашено по одной области, а дальше из каждого узла в дополнение этой раскраски двумя областями. Больше всего ветвей (как легко сообразить) будет исходить из чертежей, где область граничит с тремя другими. Именно к этим (двум) областям можно добавить еще по две области и получить треугольники. Итак, из трех областей на чертеже составлены 2 треугольника.

Наглядная фиксация является важной частью доказательства того, что мы нашли все возможности.

Посмотрим сколько треугольников можно составить из *четырех* областей. Заметим, что есть ровно три области, которые не содержат точки П. Значит, среди четырех объединяемых областей есть хотя бы одна, эту точку содержащая. Все области, содержащие точку П, треугольные. Каждая из них граничит по крайней мере еще с одной, содержащей точку П. Если среди нашей четверки есть только одна такая область, то еще три – это в точности те, которые не содержат П. Перебирая три содержащих П области, видим, что добавление к каждой из них этих трех областей треугольника не дает. Если включить в четверку все содержащие П области и добавлять к ним еще какую-то одну из трех, треугольника не получится. Остается рассмотреть случай, когда к паре областей, содержащих П, добавляется еще пара не содержащих П. Рассматриваем три варианта и получаем 2 треугольника.

Сколько треугольников можно составить из *пяти* областей? Будем перебирать области, которые не входят в эти пять. Видим, что треугольника не получается.

Из *шести* областей уже составлен 1 треугольник.

Данную сложную задачу интересно решать в коллективе, строя одно большое дерево и обсуждая, какие варианты перебираются. Естественно разбивать детей на группы, возможно разного состава на разных этапах.

Задача о поиске всех шестиугольников. “Найти все шестиугольники, которые имеются на чертеже” (см. рис. 34).

Детям предлагается разобраться в принципе, по которому строится дерево перебора, и раскрасить шестиугольники на чертежах в листах дерева. Наш чертеж состоит из треугольных областей, не разбивающихся на более мелкие. Их неплохо было бы раскрасить в разные цвета.

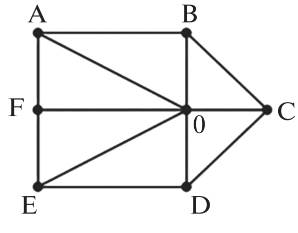


Рис. 34. Рисунок к задаче о поиске всех шестиугольников.

Первый вопрос, как и в предыдущей задаче, состоит в количестве областей, образующих шестиугольник. Тут возможно теоретическое обсуждение: сколько треугольников могут образовать шестиугольник, если они примыкают только по целой стороне?

У *двух* треугольников 6 вершин. При склейке двух треугольников по стороне из четырех вершин остается две, в итоге остается 6 – 2 = 4 вершины. Тут полезно обсудить, а может ли из двух треугольников получиться треугольник, и, если может, то почему это не противоречит нашему вычислению.

У *трех* треугольников 9 вершин. Этого должно было бы хватить для шестиугольника, но давайте посмотрим. Начнем склеивать. Если мы склеиваем два треугольника, то общее число вершин сокращается по крайней мере до 7. Приклеив к ним еще один, получаем не больше 5 вершин – не годится.

У *четырех* треугольников 12 вершин, при склейке остается 12 – 6 = 6 вершин. Это может быть шестиугольник.

Общее число областей у нас 6. Все они содержат общую точку и “идут вокруг нее по циклу”, т.е. каждая из областей граничит ровно с двумя другими. Если из этих областей вынуть две не соседние, то цикл распадется, шестиугольника (и, вообще, многоугольника) не получится. Значит, будем вынимать по две соседние области. Это можно сделать шестью способами (стоит заранее обсудить, почему). Из этих способов один дает четырехугольник, два дают пятиугольники, три дают шестиугольники.

Подумав про *пять* треугольников, мы быстро приходим к выводу о том, что надо перебирать варианты выбрасывания одной из 6 областей. Кроме того, кто-то может заметить, что наша картинка симметрична относительно горизонтальной оси, имеющейся на чертеже, т.е. “одинаково устроена сверху и снизу”. Поэтому достаточно посмотреть на три варианта, получающихся выбрасыванием одного из треугольников, лежащих, например, в верхней половине чертежа. Получаем 6 вариантов.

Шесть треугольников на чертеже уже образовали пятиугольник, этот случай тоже перебирать не нужно (см. рис. 35).

Вот еще одно дерево. Оно используется для перебора всех четырехугольников на чертеже. Нужно раскрасить четырехугольники на чертежах, расположенных в листах дерева, и подписать имена этих четырехугольников (см. рис. 36).

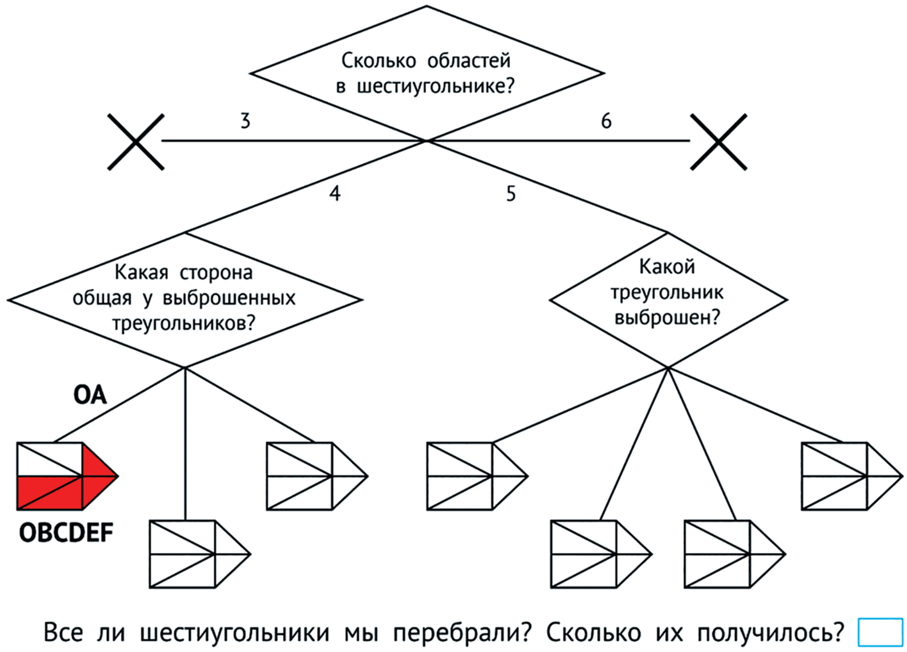


Рис. 35. Заготовка дерева для решения задачи о поиске шестиугольников.

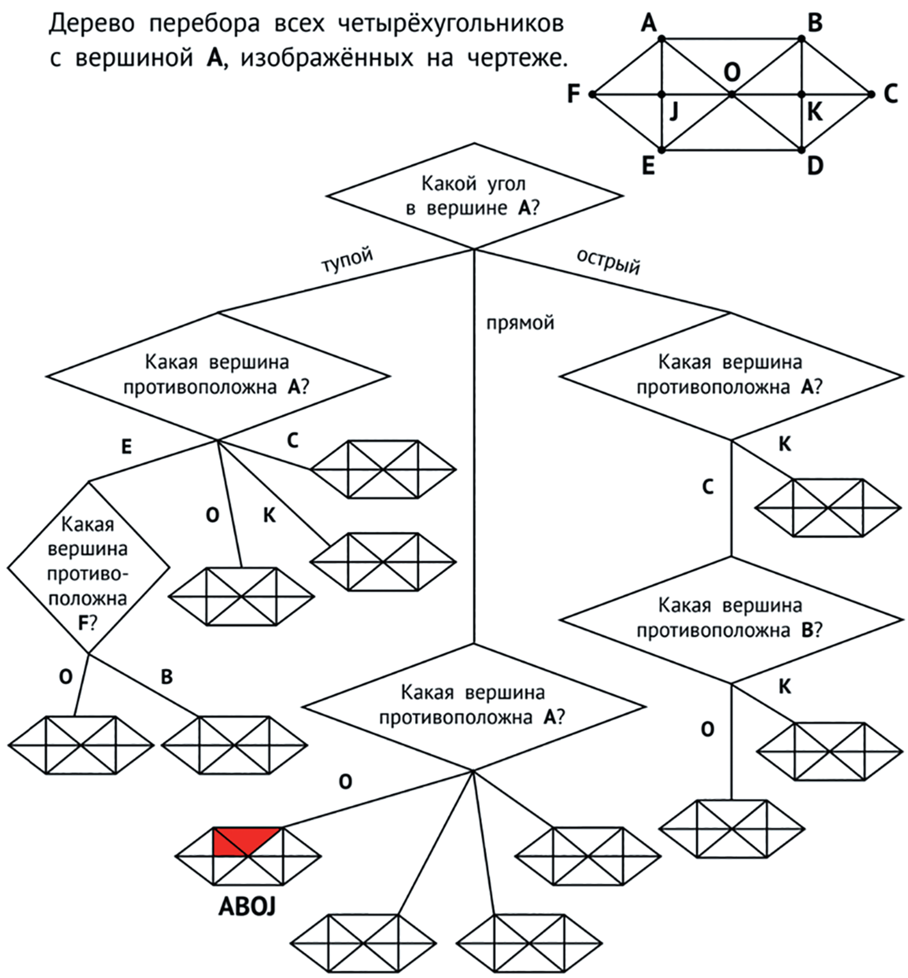


Рис. 36. Заготовка дерева перебора всех четырехугольников.

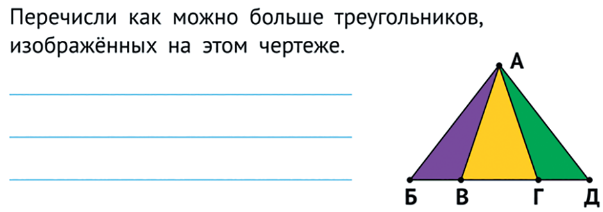


Рис. 37. Задача о перечислении треугольников. Для того, чтобы образовать треугольник, нужно выбрать две точки на нижней стороне.

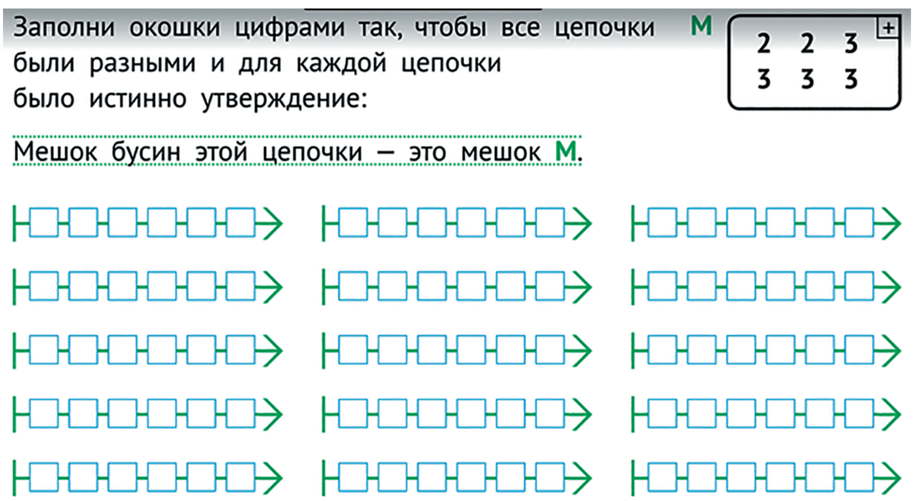


Рис. 38. Задача о цепочках из бусин двух видов и числе сочетаний.

Построение объектов и вычисление их количеств в переборных задачах. Изоморфизм ситуаций. В данном разделе мы рассматриваем примеры, где естественно возникает переход от построения комбинаторных объектов к вычислению их количества.

Использование числа сочетаний в работе с детьми описано в статье А.К. Звонкина 1986 г. [25] (позднее вышла книга [26], включающая в себя описание работы его математических кружков для дошкольников). А.К. Звонкин был членом коллектива под руководством А.Л. Семенова, создававшегося в то время. Он использовал различные ситуации, сводящиеся к выбору 2 элементов из 5, и наблюдал за тем, как постепенно дети учатся видеть сходство, изоморфизм всех этих задач.

Как уже видно из предыдущего, для нас существенно в первую очередь построение самих перебираемых объектов. С другой стороны, изоморфизм с некоторой стандартной ситуацией, и следующий отсюда числовой результат о количестве объектов, тоже представляет интерес.

Мы начнем с более простых задач, чем уже рассмотренные выше, чтобы проиллюстрировать описанный сейчас переход.

Задача о перечислении треугольников и числе сочетаний. При перечислении треугольников на чертеже также могут возникнуть числа сочетаний (см. рис. 37).

Для того, чтобы образовать треугольник, нужно на нижней стороне выбрать две точки из четырех. Это будут две вершины треугольника, еще одна вершина — это точка А.

Задача о цепочках из бусин двух видов и числе сочетаний. Мы аналогично перебираем цепочки, составленные из бусин двух видов (см. рис. 38).

В этой задаче мы выбираем два объекта из шести — это места в цепочке, где стоят двойки.

Следующая задача требует значительного объема анализа, чтобы свести ее к той же задаче о числе сочетаний.

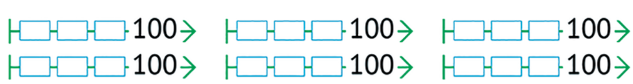


Рис. 39. Рисунок к задаче о делителях числа 100 и числе сочетаний.

Задача о делителях числа 100 и числе сочетаний. “Заполни окошки во всех цепочках так, чтобы были истинны утверждения (см. рис. 39):

• В каждой цепочке следующее число больше предыдущего или в 2 раза, или в 5 раз.

• Все цепочки разные”.

Конечно, из условия видно, что нам придется три раза умножать на двойки и пятерки. Но 100 = 2*2*5*5. Среди этих сомножителей нужно выбрать три. Их произведение – или 50, если мы не взяли двойку, и тогда первое число будет двойкой, или 20, если мы не взяли пятерку, и тогда первое число будет пятеркой.

Теперь видно, что начать можно с того, что умножить единицу на двойку или пятерку, и это будет первый элемент цепочки, а все различные цепочки получаются выбором двух из четырех моментов, когда мы умножаем на 2.

Задача о двоичных цепочках и числах Фибоначчи. Числа Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) появляются в разных задачах.

“Назовем цепочку из нулей и единиц красивой, если в ней нет двух единиц подряд. Начните выписывать все красивые цепочки нулей и единиц.”

Это пример *новой* задачи, вполне посильной для детей, если они уже потренировались в решении задач, которые “неизвестно-как-решать”. В задаче есть неопределенность. Можно начать делать то, что требуется, но где остановиться? Такая ситуация часто встречается в работе математика, который начинает работать с новым видом объектов. Надо начать их строить, может получиться что-то интересное. По ходу дела дети начинают сами формулировать вопросы и предложения. В чем-то помогает учитель.

Пустая цепочка, конечно, подходит: |–>.

Цепочки *длины 1* тоже годятся: |-0-> и |-1->.

Цепочки *длины 2* годятся *уже не все*: из четырех цепочек подходят только три (дальше не будем прорисовывать линии цепочки, чтобы было легче читать): 01, 00, 10.

Вот какие получаются красивые цепочки *длины 3*: 001, 101, 000, 010, 100.

Прежде чем переходить к цепочкам длины 4, зададимся вопросом: из каких красивых цепочек длины 2 и длины 3 и как можно получить красивую цепочку длины 4? Красивые цепочки длины 4 могут заканчиваться на 0 или на 1. Вопрос: какие цепочки длины 3 получатся, если в красивой цепочке длины 4 отбросить последний 0? Ответ: красивые. Вопрос: все ли? Вопрос: Если у красивой цепочки в конце стоит 1, что стоит перед ним? Ответ: обязательно 0. Вопрос: какие цепочки длины 2 получатся, если отбросить эти 01?

Наконец, вопрос: как получить все цепочки длины 4 из цепочек длины 3 и 2?

Цепочки с нулем на конце: 0010, 1010, 0000, 0100, 1000.

Цепочки с единицей на конце: 0101, 0001, 1001.

Вопрос: пусть нам известно, сколько есть красивых цепочек длины 4 и длины 5. Сколько будет красивых цепочек *длины 6*? Попробуйте найти ответ на этот вопрос, не выписывая цепочки длины 6, а потом выпишите. Теперь уже выписывать можно быстрее и надежнее, беря цепочки двух предшествующих длин. Вопрос: сколько будет красивых цепочек длины 10?

Давайте попробуем: 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

Решение рассмотренной только что задачи сложно именно своей логической структурой. Эта сложность преодолевается рассмотрением примеров, в которых логика становится наглядной и очевидной. Когда это прояснение произошло, выписывание общего количественного закона уже не составляет труда.

2.9. Сложность вычислений

Учет фактора сложности вычислений – обязательный элемент вычислительного мышления современного человека. Умение учитывать сложность вычисления может формироваться уже в начальной школе, становиться уже на этом этапе одной из больших идей математики и информатики.

Приведем пример, который мы используем для введения в понятие сложности вычислений. Учащимся второго класса предлагается страница, на которой имеется порядка 50 изображений. В первой из двух похожих задач фигурка, для которой нужно найти пару, предъявляется сразу в условии задачи (см. рис. 40).

Во второй похожей задаче (см. рис. 41) требуется найти пару одинаковых фигурок, неизвестно, каких именно (на листе есть ровно одна пара одинаковых).

Решение этих двух задач запускает формирование представлений о сложности вычислений, в частности, сложности перебора. В классе происходит обсуждение того, почему первая задача решена *всеми в классе* за несколько минут, а вторая за то же время не решается. Это обсуждение может привести к “качественным” оценкам сложности: “здесь мы ищем такую же картинку, а здесь – непонятно что искать”, “здесь я быстро нашла такую же, а там – непонятно, что сравнивать”. Уже в начальной школе после такого “качественного” обсуждения можно попросить посчитать, сколько картинок ученику пришлось сравнить, когда он решал первую задачу, и сколько пар фигурок может понадобиться сравнить при решении второй. Если сразу посчитать не удастся, можно взять меньшую картинку, где, например, 6 фигурок. На ней скорее всего удастся найти две одина-

Рис. 40. Задача о поиске такой же фигурки, как заданная.

ковых относительно быстро, при этом можно соединить каждую фигурку с каждой – тогда станет ясно, что каждая соединяющая линия соответствует одному сравнению двух картинок, и можно будет посчитать сколько сравнений понадобится.

Задача о рюкзаке или проблема перебора. “Возьмем 7 отрезков линейки различной длины, равной целому числу сантиметров – каждый меньше 1 м. Можно ли, взяв некоторые из этих семи отрезков, сложить линейку в 1 метр?”

Ясно, при одном наборе отрезков это возможно, при другом – нет. Также ясно, что получить ответ можно, просто перебирая все подмножества совокупности (мешка) из семи отрезков. Взрослый математик быстро сообразит, что количество подмножеств будет равно $2^7 = 128$. Число не такое уж большое, но все же достаточное, чтобы при некоторых наборах отрезков пришлось потрудиться.

Наконец, можно вспомнить, что предлагаемая задача – это т. н. “Задача о рюкзаке”, она является универсальной переборной задачей, т.е. никто не умеет решать ее существенно быстрее, чем полным перебором, и неизвестно, существует ли такой способ быстрого решения.

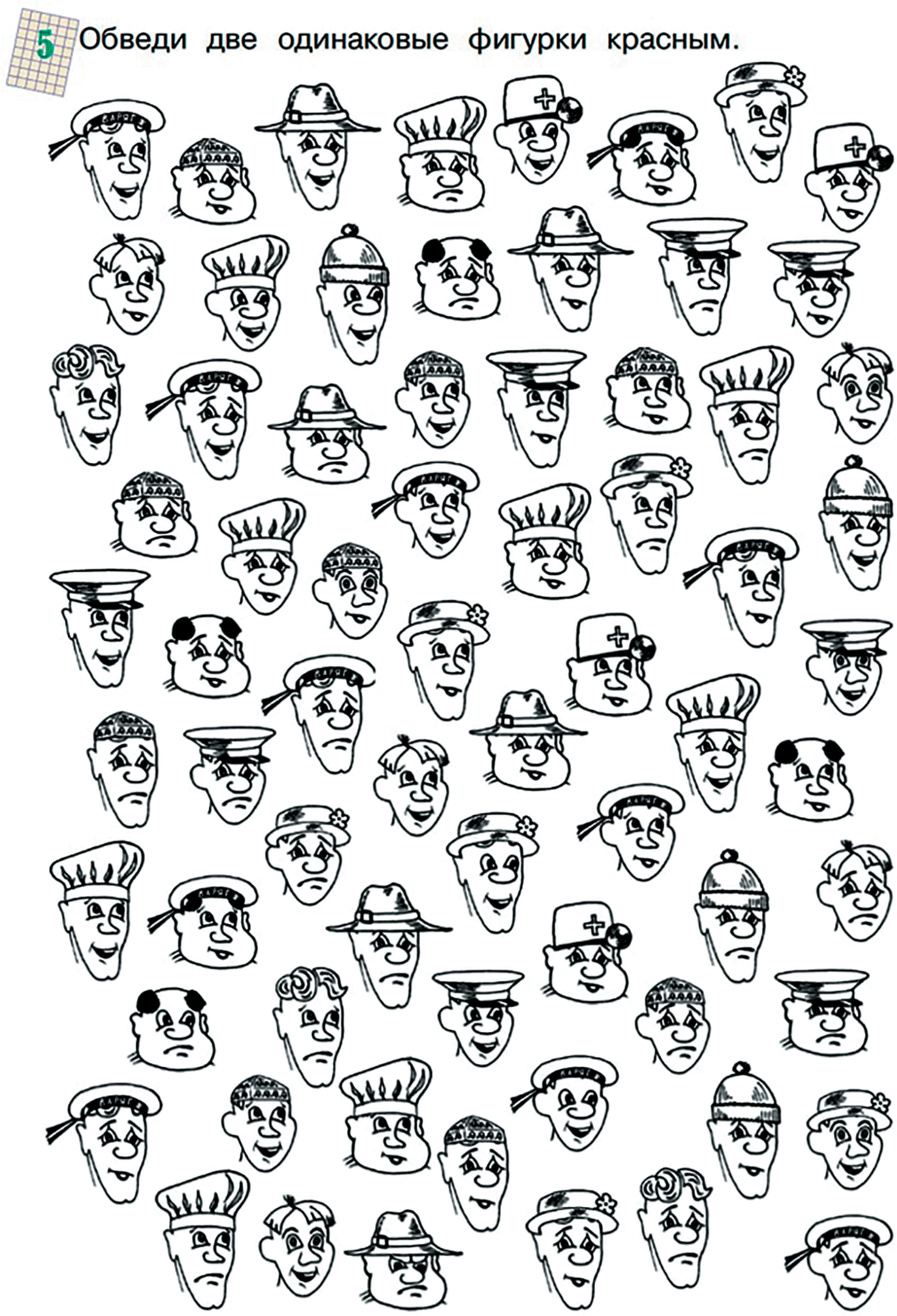


Рис. 41. Задача о поиске двух одинаковых фигурок.

Поэкспериментировав с палочками нужной длины или отрезками в цифровой среде, ученики могут попытаться работать просто с числами — длинами отрезков. Таким образом, ученики параллельно тренируются в сложении нескольких двузначных чисел, осваивают идею полного перебора в комбинаторных задачах и осознают, что такая переборная задача даже при небольших параметрах может стать непосильной для человека.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наш опыт практической работы с учителями и школьниками в течение более чем двух десятилетий подтверждает исходные посылки. Ограничение математики в начальной школе только рутинными арифметическими упражнениями, после утраты, во многом, своего первоначального прагматического значения, сегодня удерживается только инерцией. Эта инерция может легко разрушаться, когда учитель видит, что дети с интересом решают переборные и другие комбинаторные задачи. Более существенна инерция на уровне принятых стандартов, методик, издателей учебников и, наконец родителей, которых "учили иначе и вот, мы же выросли людьми". Если все же ориентироваться на потребности экономики и общества XXI века, то следует, видимо, наряду с накоплением практического материала, вести педагогические измерения, пользоваться авторитетом математического и бизнес-сообщества. На это могут уйти десятилетия, за которые жизнь – Ахиллес уйдет еще дальше от школы – Черепахи.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-14152 мк.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левин Л.А.* Универсальные задачи перебора // Проблемы передачи информации. 1973. Т. 9. Вып. 3. С. 115–116. https://www.mathnet.ru/rus/ppi914
2. Clay Mathematics Institute page. Millennium Problems // URL: https://claymath.org/millennium-problems
3. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов // Пер. с англ. Г.П. Гаврилова. М.: Мир, 1977. 324 с. Оригинал: Harary F., Palmer E. M. Graphical enumeration. New York, London, 1973.
4. Roget's Thesaurus. Wikipedia page // URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Roget%27s_Thesaurus
5. Инструктивное письмо №03-93ин/13-03 от 23.09.2003 г. Министерства образования РФ "О введении элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в содержание математического образования основной школы" // URL: https://docs.cntd.ru/document/901882934
6. *Виленкин Н.Я., Нешков К.И., Шварцбурд С.И., Чесноков А.С., Семушин А.Д.* Математика. Учебник для 4-го класса средней школы // Под ред. А.И. Маркушевича. Изд. 3-е. М.: Просвещение, 1977. 240 с.
7. *Semenov A., Uspensky V.A., Polivanova A.* Introduction to the School Project of the Soviet Academy of Sciences // Education for Global Citizenship in the 21st Century. Explorations by the USSR and the USA. Proceedings of a Soviet/American Conference on Education. Oct. 31–Nov. 2, 1989. Monkato State University, Monkato, Minnesota USA. 1989. P. 27–40.
8. *Фейгенберг И.М.* Проблемные ситуации и развитие активности личности // Сер. "В помощь лектору". М.: Знание, 1981. 48 с. Переиздано в сборнике: Фейгенберг И. М. Учимся всю жизнь. М.: Смысл, 2014. 223 с. ISBN 978-5-89357-323-7.
9. *Арнольд И.В.* Принципы отбора и составления арифметических задач // Известия АПН РСФСР. 1946. Вып. 6. С. 8–28. https://math.ru/lib/files/iva46.htm
10. *Хинчин А.Я.* О так называемых "задачах на соображение" в курсе арифметики // Математика, ее преподавание, приложения и история, Матем. просв. 1961. Сер. 2. № 6. С. 29–36. https://www.mathnet.ru/rus/mp677
11. *Семенов А.Л., Посицельская М.А., Посицельский С.Е. и др.* Математика и информатика. 1–4 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: МЦНМО, 2012–2021.
12. *Рудченко Т.А., Семенов А.Л.* Информатика. 1–4 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2021–2022.
13. *Levin I., Tsybulsky D.* The Constructionist Learning Approach in the Digital Age // Creative Education. 2017. 8. P. 2463–2475. http://www.scirp.org/journal/ce. ISSN Online: 2151-4771.
14. *Posicelskaya M.A., Rudchenko T.A., Semyonov A.L.* Axiology of Primary Mathematical Education // Mathematics in School, Armenia. 2023. 2(115). P. 7–12. ISSN 1829-4111.
15. *Семенов А.Л., Зискин К.Е.* Расширенная личность как основной субъект и предмет философского анализа. Следствия для образования // Человек и системы искусственного интеллекта, ред. Лекторский В.А. СПб.: ООО "Издательство "Юридический центр"", 2022. С. 172–200. ISBN 978-5-94201-835-1.
16. *Шень А.* Программирование: теоремы и задачи. Учебное пособие // Изд. 6-е, дополненное. М.: МЦНМО, 2017. 321 с. ISBN 978-5-4439-0685-0.
17. *Семенов А.Л.* О продолжении российского математического образования в XXI веке // Вестник Московского университета. 20 серия. Педагогическое образование, 2023. Т. 21. № 2. С. 7–45. https://doi.org/10.55959/MSU2073-2635-2023-21-2-7-45.
18. *Константинов Н.Н., Семенов А.Л.* Результативное образование в математической школе // Чебышевский сборник. 2021. Т. XXII. Вып. 1(77). С. 413–446. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446
19. *Посицельский С.Е.* Математика и информатика: разноуровневое обучение в рамках единых учебных тем // Первое сентября. Начальная школа. 2013. № 10. С. 54–55.
20. *Ackermann E.* Piaget's Constructivism, Papert's Constructionism: What's the Difference? // 2001, URL: http://learning.media.mit.edu/content/publications/EA.Piaget%20_%20Papert.pdf
21. *Семенов А.Л.* Симор Паперт и мы. Конструкционизм – образовательная философия XXI века // Вопросы образования. 2017. № 1. С. 269–294.
22. *Кэрролл Л.* Сквозь зеркало и что там увидела Алиса, или Алиса в Зазеркалье // Пер. Н.М. Демуровой. Стихи в пер. С.Я. Маршака, Д.Г. Орловской и О.И. Седаковой. М., "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, 1991. Оригинальное издание: Carroll, Lewis. Through the Looking-Glass and What Alice Found There // Macmillan and Co., 1871.
23. *Фейгенберг И.М.* Учимся всю жизнь. М.: Смысл, 2014. 223 с. ISBN 978-5-89357-323-7.

24. *Бизам Д., Герцег Я.* Игра и логика. 85 логических задач // Пер. с венгерского Ю.А. Данилина. М.: Мир, 1975. 358 с. Оригинальное издание: Bizám György, Herczeg János. Játék és logika 85 feladatban // Budapest, 1972.

25. *Звонкин А.К.* Дети и C_5^2. М.: Знание – сила, 1986, № 2.

26. *Звонкин А.К.* Малыши и математика. Домашний кружок для дошкольников. М.: МЦНМО, МИОО, 2006. 240 с.

CONSTRUCTIVE COMBINATORICS IN PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS

M. A. Posicelskaya[a]

[a] *"Center for the Development of the Educational Environment", Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

The paper is describing the class of educational problems from the course of mathematics and computer science for elementary school. This course has been implemented over the past decades by a team led by A.L. Semenov. In the problems it is required to find, build, list all objects that satisfy a certain system of conditions. The student conducts these activities in the visual world of the basic objects of discrete mathematics and computer science: strings (finite sequences of symbols), bags (multisets), tables, trees, and statements containing quantifiers. The connections of these problems with problems of computational combinatorics ("counting the number of options"), search problems of the theory of computational complexity, with "big ideas", general cognitive strategies in their formation are considered. The content of education in our approach is more adequate to the context of the modern world.

Keywords: elementary mathematical education, constructive combinatorics, enumeration problems, visibility, search trees, constructionism, computational thinking, 21st century skills